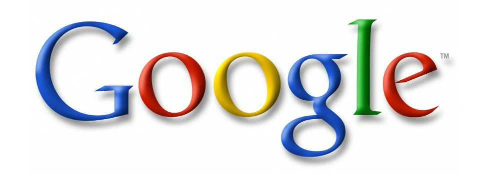


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

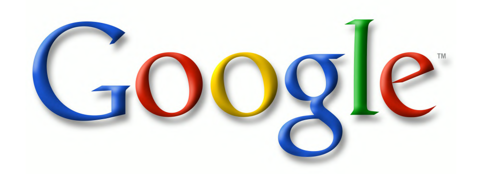
Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

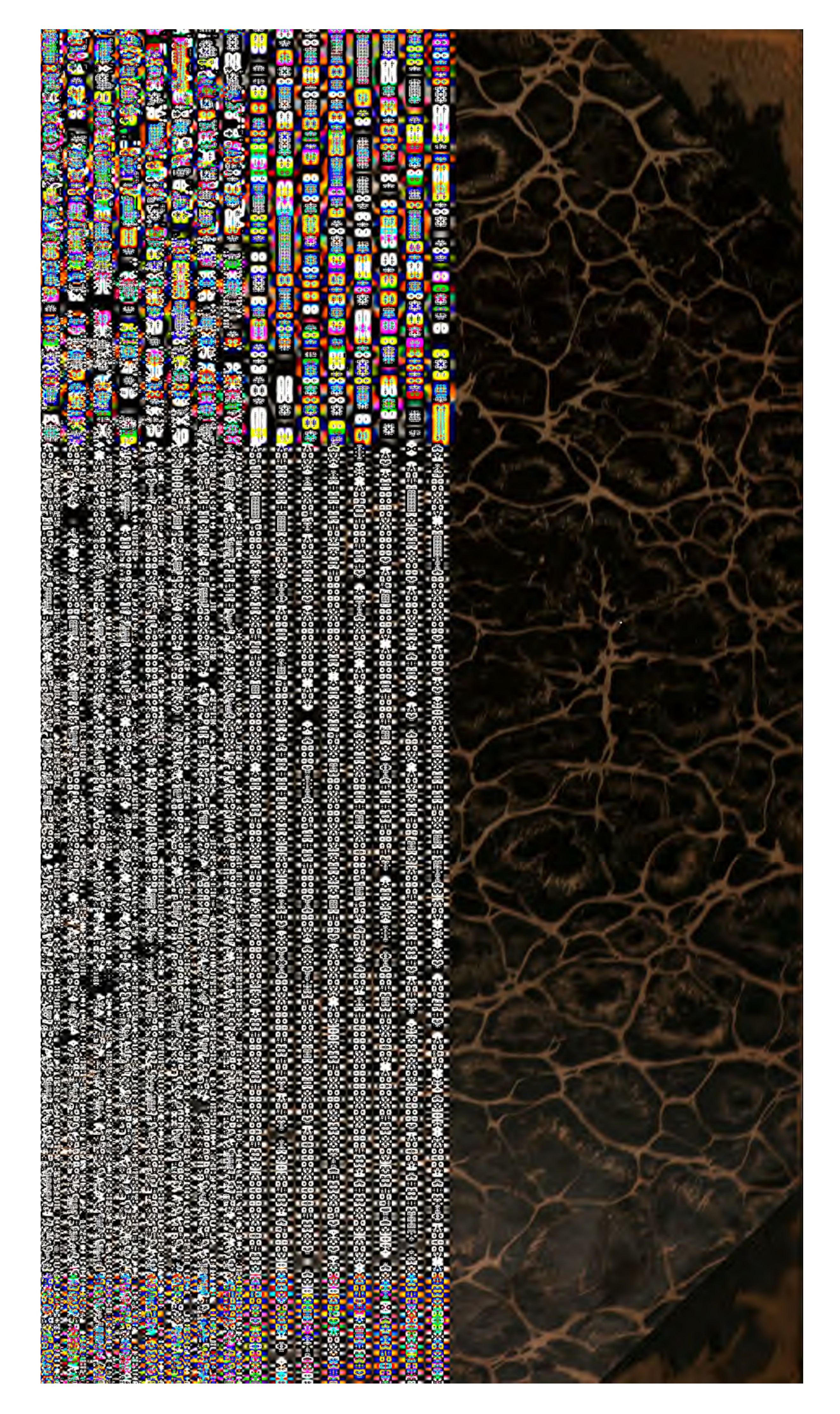
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

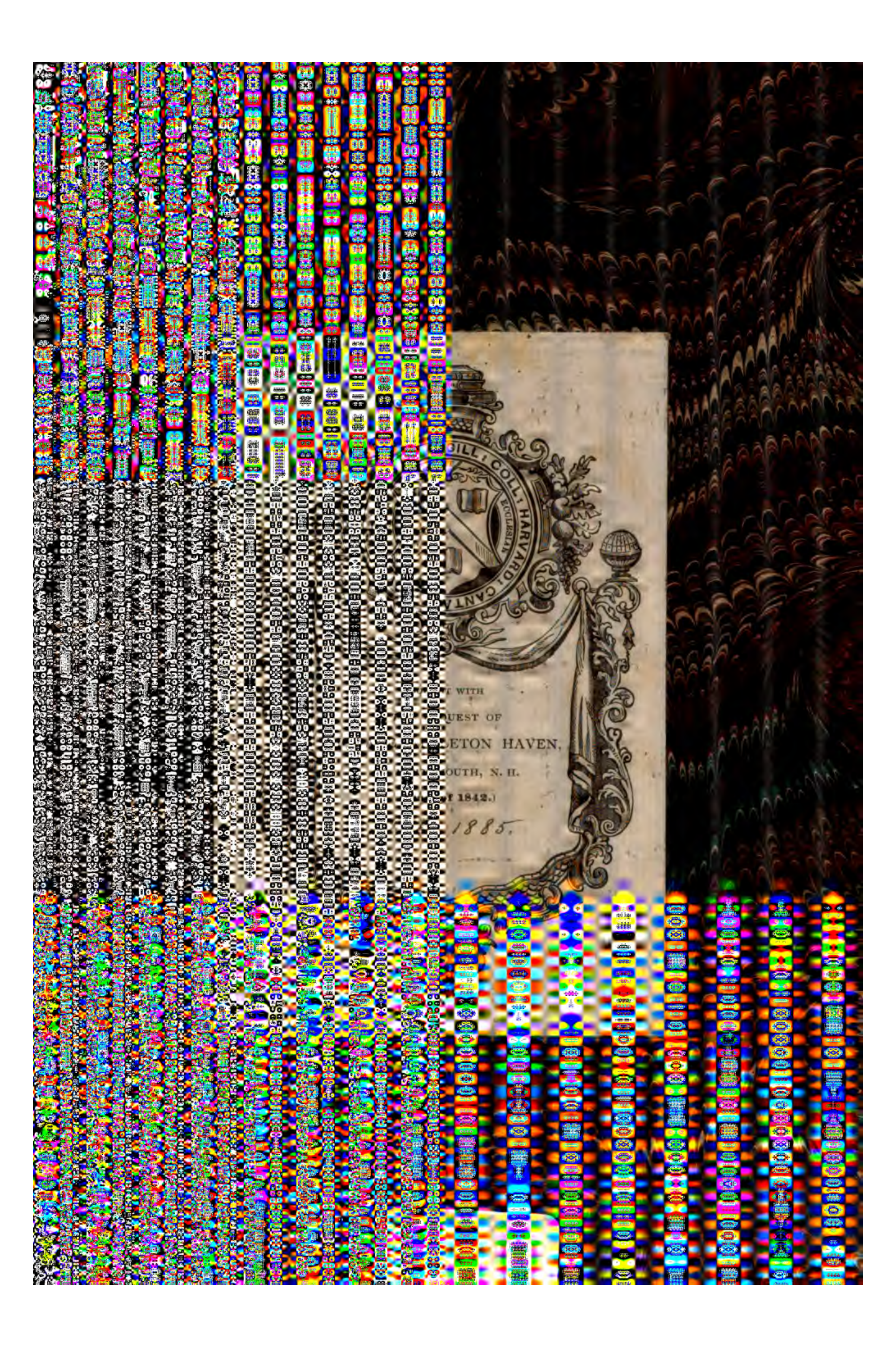
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

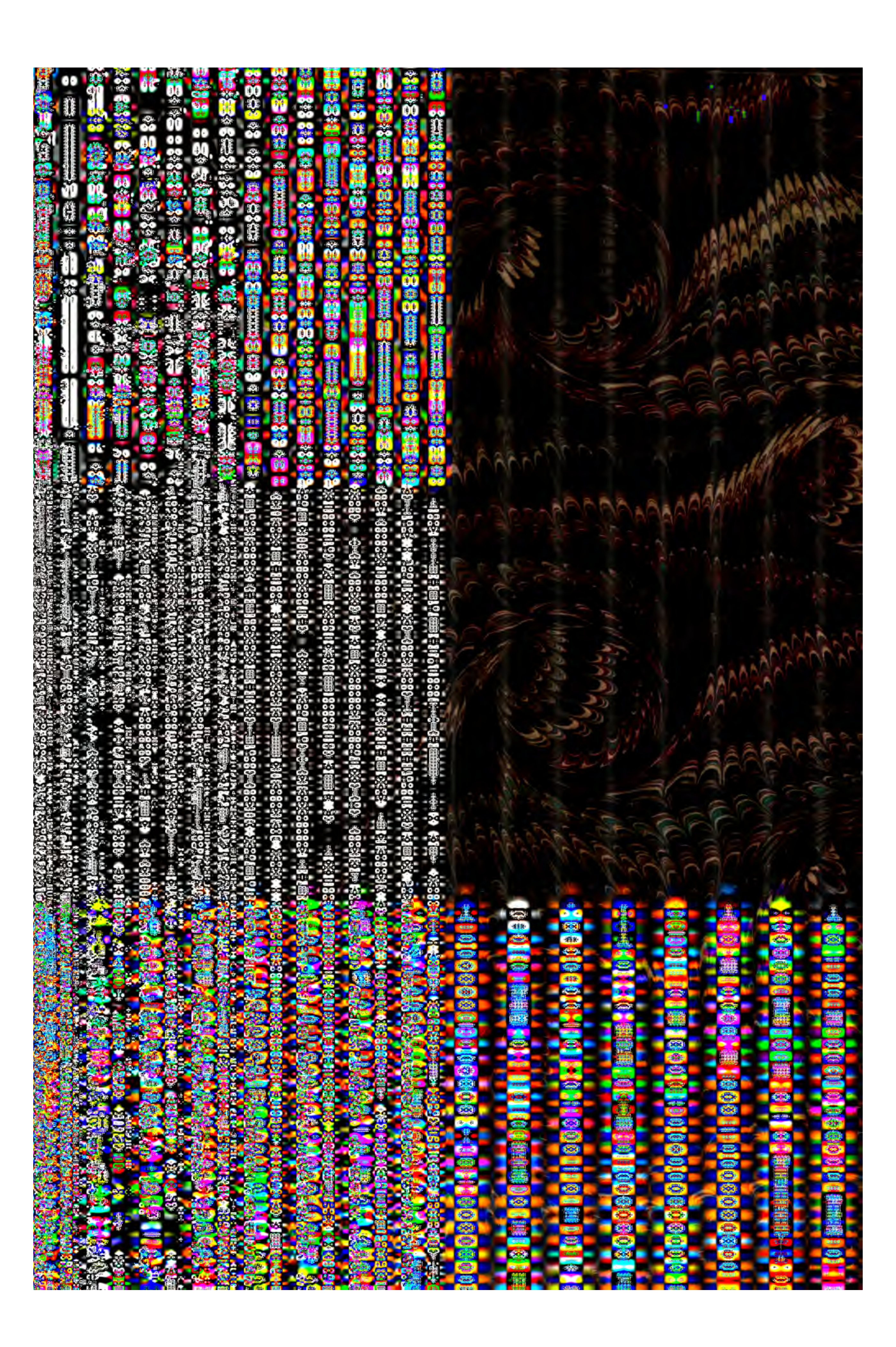
+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

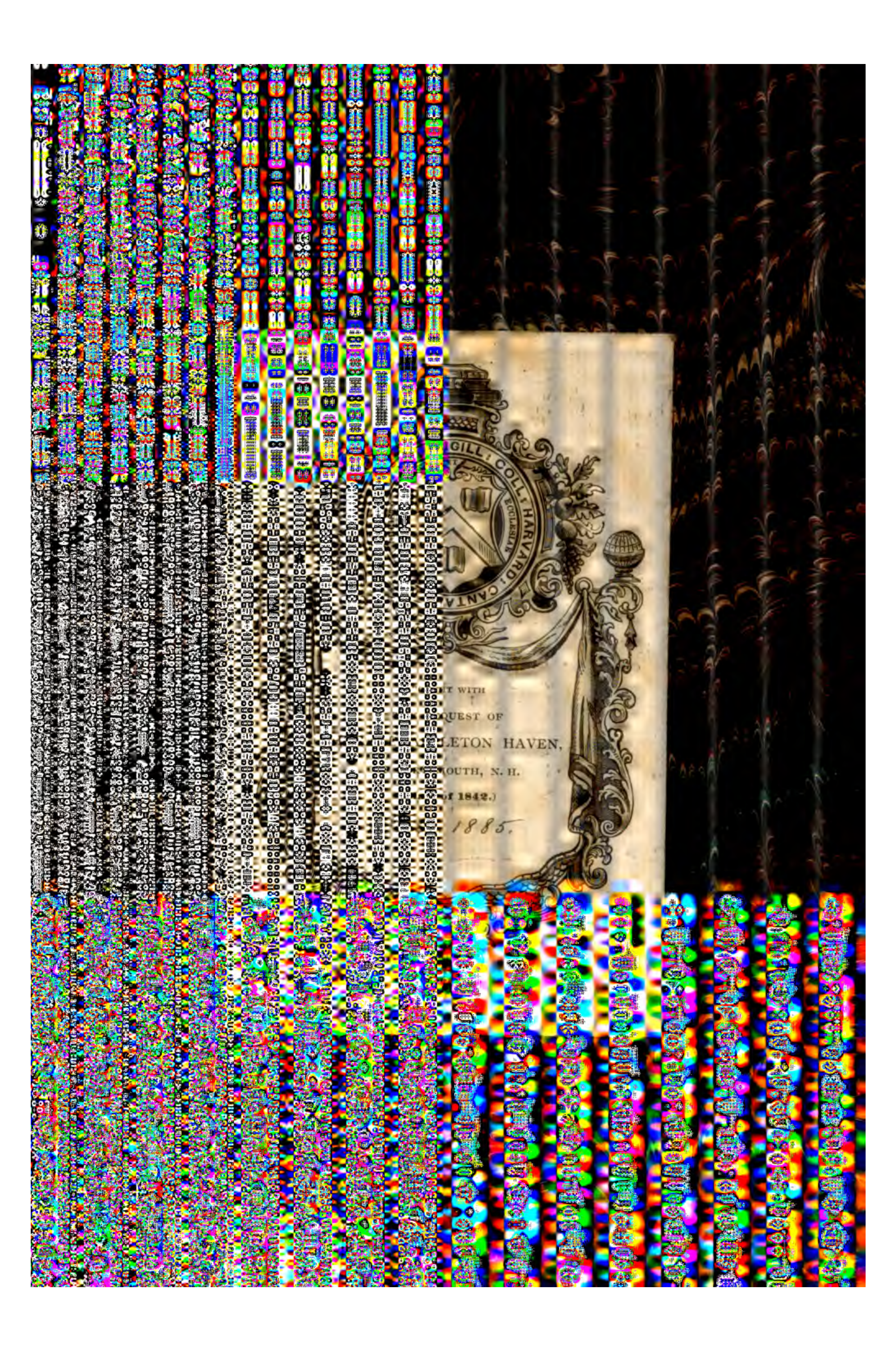
Über Google Buchsuche

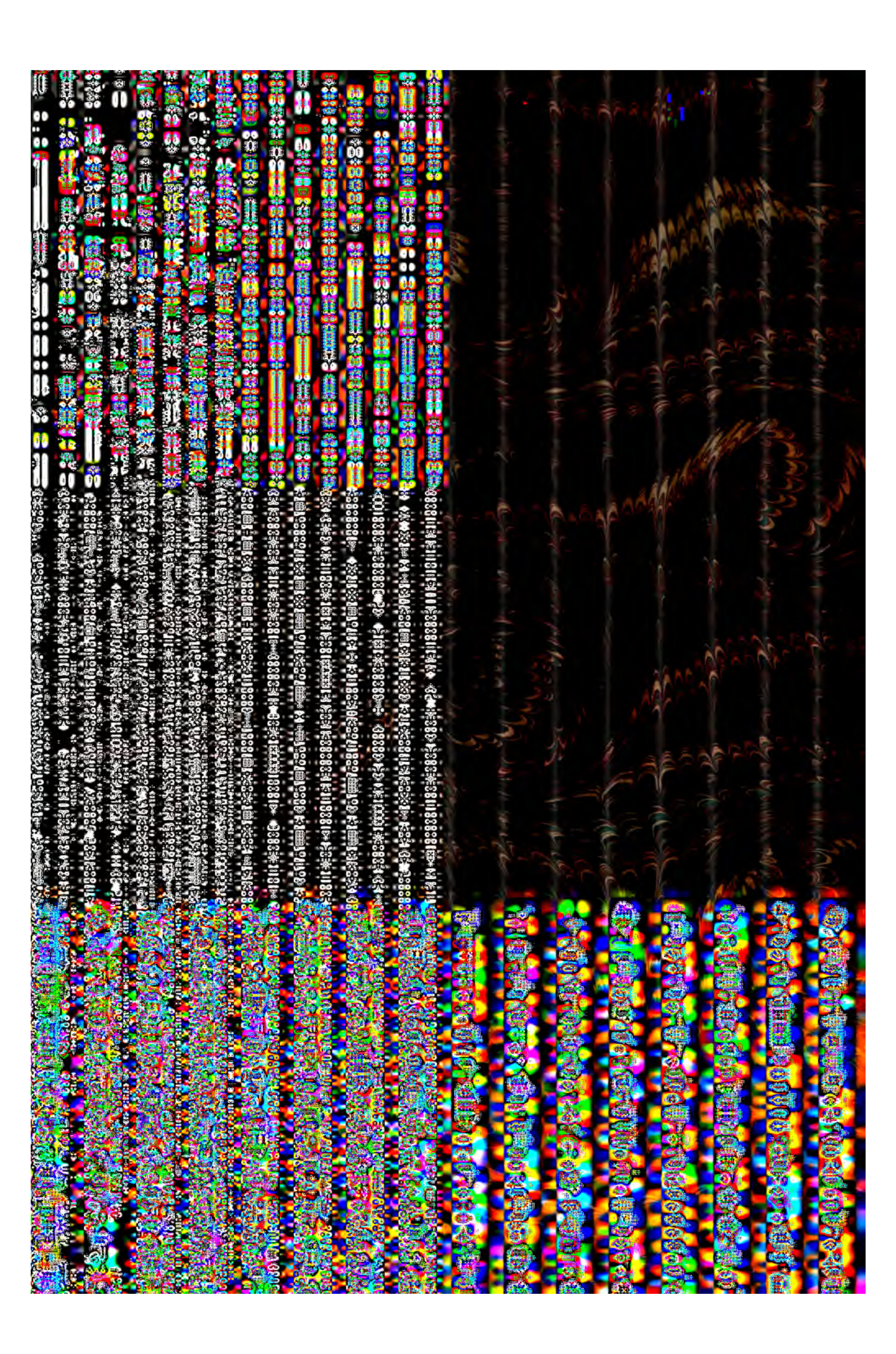
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.




SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB
ECCLESIAE
T WITH
UEST OF
ETON HAVEN,
OUTH, N. H.
F 1842.)
1885.



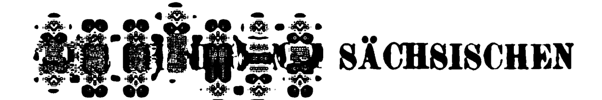

HAVEN,
N. H.
1842.)
1885.



ABHANDLUNGEN

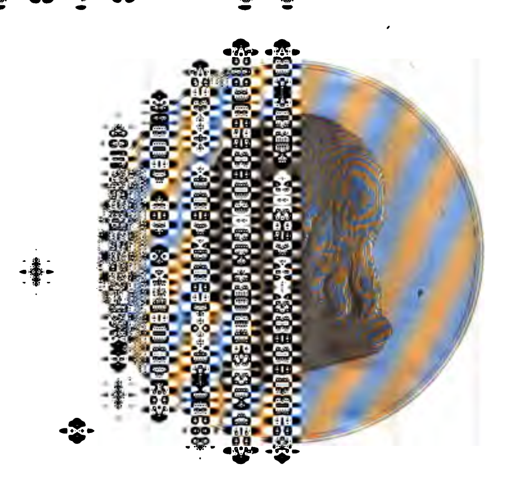
FÜNFZEHNTER BAND.

...LUNGEN



... SÄCHSISCHEN

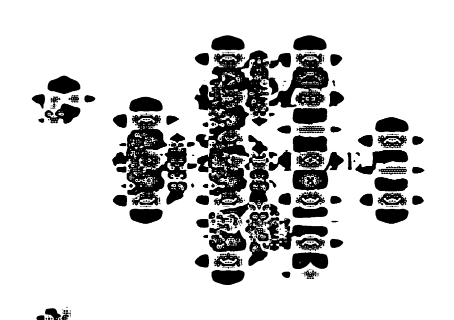
... WISSENSCHAFTEN.





...TER BAND.

...N TAFELN.

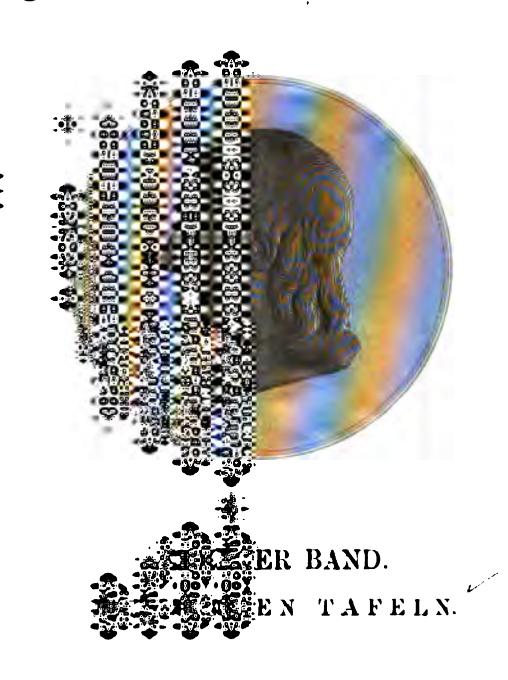


[illegible]DLUNGEN

[illegible]-PHYSISCHEN CLASSE

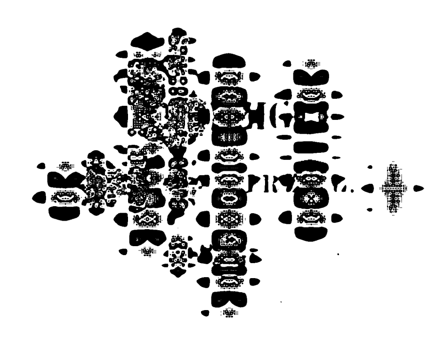
[illegible]CH SÄCHSISCHEN

[illegible]R WISSENSCHAFTEN.



[illegible]ER BAND.

[illegible]EN TAFELN.



~~48.19~~
LSoc1726.5

FEB 27 1883
Harvard Fund.
(X–XII.)

INHALT.



ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

ÜBER DAS

PRINCIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

VON

WILHELM WEBER

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GES. DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1871.

Vom Verfasser übergeben den 9. Januar 1871.
Der Abdruck vollendet den 25. Februar 1871.

ELEKTRODYNAMISCHE

MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE

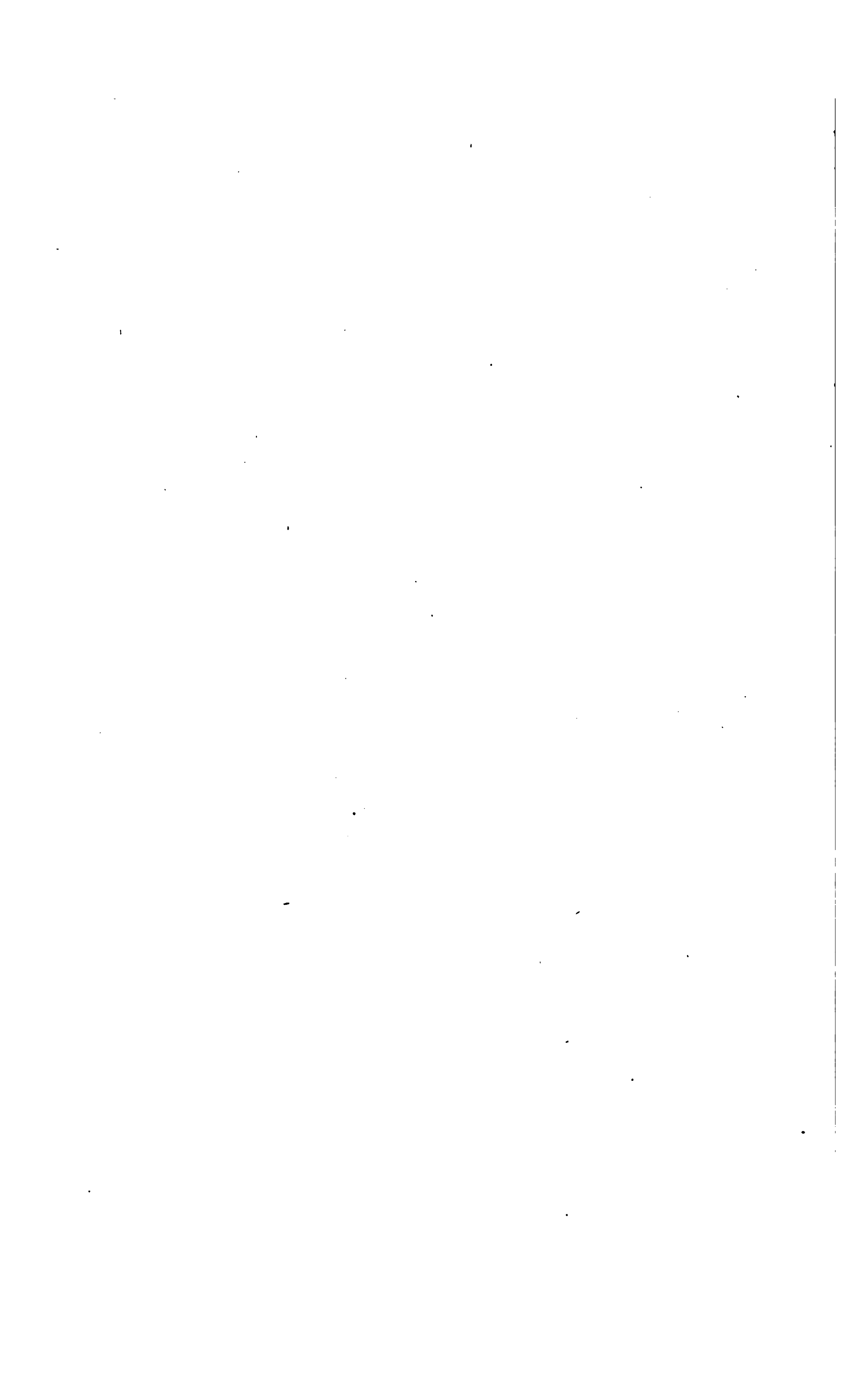
ÜBER DAS

PRINCIP DER ERHALTUNG DER ENERGIE

VON

WILHELM WEBER

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GES. DER WISSENSCHAFTEN.



Das Gesetz der elektrischen Wirkung, welches in der ersten Abhandlung über Elektrodynamische Maassbestimmungen (Leipzig 1846) ausgesprochen worden, ist von verschiedenen Seiten geprüft und mehrfach abgeändert, auch zum Gegenstand allgemeinerer Betrachtungen und Speculationen gemacht worden, die noch keineswegs als abgeschlossen anzusehen sein dürften. Die folgende Abhandlung beschränkt sich im ersten Abschnitte auf eine Erörterung des Verhältnisses dieses Gesetzes zum Princip der Erhaltung der Energie, dessen grosse Wichtigkeit und Bedeutung besonders in der mechanischen Wärmetheorie hervorgetreten ist. Da behauptet worden war, dass jenes Gesetz mit diesem Principe im Widerspruch stände; so ist nachzuweisen versucht worden, dass kein solcher Widerspruch statt finde. Jenes Gesetz gestattet vielmehr, dem Principe der Erhaltung der Energie noch einen Zusatz beizufügen, und dasselbe so umzuformen, dass seine Anwendung auf jedes Paar von Theilchen keineswegs blos auf die Zeit beschränkt ist, wo ein solches Paar durch andere Körper weder Gewinn noch Verlust an lebendiger Kraft erleidet, sondern immer gilt, unabhängig von den mancherlei Beziehungen, in welche beide Theilchen zu andern Körpern treten können.

Ausserdem wird im zweiten Abschnitte noch eine Anwendung jenes Gesetzes auf die Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier, blos ihrer Wechselwirkung überlassenen, elektrischen Theilchen gemacht. Führt diese Entwickelung direct auch zu keinen Vergleichungen und exacten Prüfungen mit vorhandener Erfahrung, was der Grund ist warum sie bisher wenig Beachtung gefunden; so führt sie doch zu manchen Resultaten, welche als Leitfaden bei Erforschung der Molecularverhältnisse und

Molecularbewegungen der Körper, die so grosse Bedeutung für Chemie und Wärmelehre gewonnen, wichtig erscheinen, und interessante Beziehungen in diesen noch dunkeln Gebieten der weiteren Forschung darbieten.

Ueber das Verhältniss der elektrischen Gesetze zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

1.

Elektrische Theilchen und elektrische Massen.

Man bezeichnet Theilchen des positiven und des negativen elektrischen Fluidums mit denselben Buchstaben, z. B. mit e oder e' u. s. w., legt aber e oder e' ... einen positiven oder negativen Werth bei, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört.

Wird die messbare Abstossungskraft des ersten Theilchens e auf ein ganz gleiches Theilchen e bei der messbaren und beharrlichen Entfernung r mit f bezeichnet, ferner die messbare Abstossungskraft des zweiten Theilchens e' auf ein ganz gleiches Theilchen e' bei derselben Entfernung r mit f'; so wird $\pm r\sqrt{f}$ als Grössenwerth von e, und $\pm r\sqrt{f'}$ als Grössenwerth von e' genommen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, jenachdem das Theilchen dem positiven oder negativen Fluidum angehört. — Der Messung der Kräfte f, f' wird dabei das in der Mechanik festgesetzte Kräftemaass zum Grunde gelegt, nämlich diejenige Kraft, welche wenn sie auf die in der Mechanik festgesetzte Masseneinheit (Milligramm) wirkt, dieser Masseneinheit in der Zeiteinheit die Einheit der Geschwindigkeit ertheilt. — Die Abstossungskraft der beiden Theilchen e, e', während ihre Entfernung r unverändert bleibt, ist dann, dem elektrostatischen Gesetze gemäss,

$$= \frac{ee'}{rr}.$$

Ein negativer Werth dieses Ausdrucks bedeutet Anziehungskraft.

Bei dieser Bezeichnungsweise der Theilchen der elektrischen Fluida haben nun e, e' nicht die Bedeutung von Massen, im Sinne der Mechanik, wie man schon daraus ersieht, dass e, e' bald positive, bald negative Werthe haben können; doch stehen die Werthe von e, e' mit den Massen der Theilchen in naher Beziehung. Bezeichnet man nämlich die Massen der Theilchen e, e' (im Sinne der Mechanik, wonach die Masseneinheit [Milligramm] durch die Masse eines ponderabelen Körpers gegeben ist, und verschiedene Massen untereinander verglichen werden nach Proportion der reciproken Beschleunigungen, die ihnen von gleicher Kraft ertheilt werden) mit ε, ε', die stets positive Werthe haben; so ergiebt sich für positive Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = a,$$

für negative Werthe von e, e'

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{e'}{\varepsilon'} = b,$$

wo a einen bestimmten positiven, b einen bestimmten negativen Werth hat. Ob hierin $aa = bb$ sei, oder in welchem Verhältnisse aa zu bb stehe, ist bisher ebensowenig ermittelt worden, wie der Zahlwerth von a oder b selbst. — In vielen Fällen ist die elektrische Masse ε an eine ponderabele Masse m so gebunden, dass sie ohne dieselbe gar nicht bewegt werden kann, wo dann nur die Gesammtmasse $m + \varepsilon$ in Betracht kommt und ε gewöhnlich im Vergleich mit m als verschwindend betrachtet werden kann. Es kommen daher die Massen ε, ε' nur selten in Betracht.

Man unterscheidet nicht immer auf die angegebene Weise zwischen den Theilchen e, e' und ihren Massen ε, ε', sondern gebraucht oft die Zeichen der Theilchen e, e' auch für die Massen, wobei jedoch zu bemerken, dass dann von den Vorzeichen von e, e' abgesehen werden muss. Die Weglassung der Faktoren a und b, welche unbekannt sind, ist immer gestattet, wenn es sich nur um relative Werthbestimmungen von Massen der positiven oder der negativen Elektricität handelt.

2.

Das Gesetz der elektrischen Kraft.

Das Gesetz der elektrischen Kraft ist in den »Elektrodynamischen Maassbestimmungen«, Leipzig 1846, S. 119 auf folgende Weise ausgesprochen worden:

> Bezeichnet man zwei elektrische Theilchen mit e und e'; so wird die von beiden Theilchen aus der Entfernung r auf einander ausgeübte abstossende Kraft dargestellt durch
>
> $$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right),$$

wo c dieselbe Constante ist, welche a. a. O. mit $\frac{4}{a}$ bezeichnet worden ist.

Dieser Ausdruck für die Kraft, welche die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, ist aber, wie man leicht übersieht, von einer Grösse abhängig, welche die zu bestimmende Kraft selbst als Faktor enthält. Man erkennt dies leicht, wenn man die relative Beschleunigung der beiden Theilchen, nämlich $\frac{ddr}{dt^2}$, in zwei Theile zerlegt,

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{ddr'}{dt^2} + \frac{ddr''}{dt^2},$$

wovon der erstere Theil $\frac{ddr'}{dt^2}$ diejenige relative Beschleunigung ist, welche von der Wechselwirkung beider Theilchen, der letztere Theil $\frac{ddr''}{dt^2}$ dagegen derjenige Theil, welcher von anderen Ursachen (nämlich von der vorhandenen auf r senkrechten Bewegung der Theilchen, und von den Wechselwirkungen, in denen sie mit andern Körpern stehen) herrührt. Der erstere Theil nun, welcher von der Wechselwirkung beider Theilchen herrührt, ist der von dieser Wechselwirkung herrührenden Kraft proportional und wird durch den Quotienten dieser Kraft und der Masse, auf welche sie wirkt, dargestellt.

Hieraus ergiebt sich, wie a. a. O. Seite 168 gezeigt worden, leicht ein anderer Ausdruck für die Kraft, die die Theilchen e und e' wechselseitig auf einander ausüben, welcher nur Grössen enthält,

die von der zu bestimmenden Kraft unabhängig sind, nämlich der Ausdruck

$$\frac{ee'}{rr - \frac{2r}{cc}(e+e')}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{cc}\right),$$

wo $f = \frac{ddr''}{dt^2}$ gesetzt worden ist, oder, wenn man die elektrischen Theilchen e und e' von ihren Massen ε und ε' auf die im vorigen Artikel angegebene Weise unterscheidet (was a. a. O. nicht geschehen) der Ausdruck

$$\frac{ee'}{rr - \frac{2r}{cc}\cdot\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2rf}{cc}\right).$$

Es ergiebt sich hieraus nun, dass das Gesetz der elektrischen Kraft keineswegs so einfach ist, wie von einem Grundgesetz erwartet wird; dasselbe erscheint vielmehr in zwei Beziehungen besonders verwickelt.

Erstens nämlich geht aus diesem Ausdrucke der Kraft hervor, wie a. a. O. schon bemerkt worden, dass die Kraft, welche zwei elektrische Theilchen auf einander ausüben, nicht ausschliesslich von diesen Theilchen selbst, von ihrer Entfernung und relativen Geschwindigkeit, sondern auch von dem mit f bezeichneten Theile ihrer relativen Beschleunigung abhängt, der zum Theil von andern Körpern herrührt. Auch ist bemerkt worden, da die von zwei Körpern auf einander ausgeübten Kräfte, wenn sie von der Gegenwart eines dritten Körpers abhängen, von Berzelius mit dem Namen katalytischer Kräfte bezeichnet worden sind, dass hienach die elektrischen Kräfte, allgemein betrachtet, katalytische Kräfte seien.

Zweitens ergiebt sich aus demselben Ausdruck der Kraft noch ein anderes merkwürdiges Resultat, dass nämlich, wenn die Theilchen e und e' gleichartig sind, dieselben keineswegs einander immer abstossen, sondern, wenn $\frac{dr^2}{dt^2} < cc + 2rf$ ist, nur so lange, als $r > \frac{2}{cc}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'$ ist, dass dagegen Anziehung eintritt, wenn $r < \frac{2}{cc}\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}ee'$.

Eine Ausnahme hiervon findet nur in dem Falle statt, wenn $\left(r - 2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\frac{ee'}{cc}\right)$, was immer Faktor des Nenners ist, zugleich auch

Faktor des Zählers wird. Dieser Fall tritt ein, wenn die beiden elektrischen Theilchen in beharrlicher relativer Ruhe sich befinden, so dass $\frac{dr}{dt} = 0$ und $\frac{ddr}{dt^2} = 0$ ist.

Der obige allgemeine Ausdruck der Kraft geht nämlich, wenn $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, über in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right),$$

woraus durch Division mit der Masse $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}$, derjenige Theil der Beschleunigung gefunden wird, welcher von der von beiden elektrischen Theilchen auf einander ausgeübten Kraft herrührt, nämlich

$$\frac{(\varepsilon + \varepsilon')\, ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right).$$

Fügt man hiezu den andern Theil der Beschleunigung, nämlich f, welcher aus der vorhandenen Bewegung der Theilchen senkrecht gegen r, und aus der Einwirkung anderer Körper sich ergiebt; so erhält man die ganze Beschleunigung, nämlich

$$\frac{ddr}{dt^2} = f + \frac{(\varepsilon + \varepsilon')\, ee'}{\varepsilon\varepsilon' r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right),$$

welche bei beharrlicher relativer Ruhe $= 0$ ist. Hieraus folgt, bei beharrlicher relativer Ruhe,

$$f = -\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{rr}.$$

Wird dieser Werth für f im Ausdrucke der Kraft

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \left(1 + \frac{2r}{cc} f\right)$$

substituirt, so verwandelt sich letzterer in

$$\frac{ee'}{r\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)} \cdot \frac{1}{r} \left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)$$

Man sieht also, dass im Falle beharrlicher relativer Ruhe der Faktor $\left(r - 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}\right)$ dem Zähler und Nenner gemeinschaftlich ist. Der von diesem Faktor unabhängige Werth des Quotien-

ten, nämlich $\frac{ee'}{rr}$, giebt hienach für den Fall beharrlicher relativer Ruhe den Ausdruck der Kraft, in vollkommener Uebereinstimmung mit dem elektrostatischen Grundgesetze, wonach diese Kraft für gleichartige Theilchen bei allen Entfernungen einen positiven Werth behält.

3.

Das Gesetz des elektrischen Potentials.

Der vorhergehende Artikel beweist, dass das Gesetz der elektrischen Kraft in zwei Beziehungen von sehr zusammengesetzter Art ist, nämlich erstens in Beziehung darauf, dass die Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen abhängig ist von Dingen, die weder zum Wesen der Theilchen, welche die Kraft auf einander ausüben, noch zu ihrer gegenseitigen Lage im Raume, noch zu ihrer vorhandenen relativen Bewegung gehören, nämlich von andern Körpern; zweitens in Beziehung darauf, dass zwischen denselben Theilchen, zwischen welchen in einigen Entfernungen Abstossung, in andern Entfernungen Anziehung statt finde.

Im Vergleich mit diesem complicirten Gesetze der elektrischen Kraft ist das Gesetz des elektrischen Potentials viel einfacher.

Der Werth des Potentials V zweier elektrischen Theilchen e, e' ist nämlich, wie schon in Poggendorffs Annalen 1848. Bd. 73, S. 229 von mir ausgesprochen worden ist, durch folgendes Gesetz bestimmt, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Beachtet man nämlich, dass r sowohl wie $\frac{dr}{dt}$ für die beiden Theilchen e und e' zu verschiedenen Zeiten verschiedene Werthe haben, beide also Functionen der Zeit sind; so ergiebt sich daraus, dass $\frac{dr}{dt}$ auch als eine Function von r betrachtet werden dürfe, welche mit fr bezeichnet werden soll. Man erhält hiernach

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot(fr)^2 - 1\right),$$

folglich durch Differentiation den Ausdruck der Kraft

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{ee'}{rr}\left(\frac{1}{cc}\cdot(fr)^2 - 1\right) + 2\,\frac{ee'}{rcc}\cdot fr\cdot\frac{dfr}{dr},$$

oder, wenn darin wieder $\frac{dr}{dt}$ für fr gesetzt wird,

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\cdot\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\frac{dr}{dt}}{dr}\right),$$

wofür geschrieben werden kann

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\,\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\cdot\frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Man sieht hieraus, dass

$$\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$$

eine Function ist, deren Differentialquotient nach r die Abstossungskraft der beiden Theilchen e und e' darstellt, wenn r ihren Abstand und $\frac{dr}{dt}$ ihre relative Geschwindigkeit, als Functionen der Zeit betrachtet, bezeichnen. Da nun $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\,\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right) = 0$ wird, wenn e und e' sich unendlich weit von einander entfernen; so ist $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\,\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ das Potential der elektrischen Theilchen e und e', d. h. die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen, unter Einwirkung ihrer Abstossungskraft, aus unendlicher Entfernung bis zur Entfernung r genähert, hier mit der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ anlangen. *)

Es geht daraus zugleich hervor, dass die Arbeit, welche bei der Ueberführung eines Systems von Theilchen e, e', aus einer gewissen Lage und einem gewissen Bewegungszustande, in eine andere Lage und in einen andern Bewegungszustand verrichtet wird, nur von der Lage und Bewegung am Anfang und am Ende abhängig ist, dage-

*) Von diesem Gesetze des elektrischen Potentials ist auch Beer in der Einleitung in die Elektrodynamik ausgegangen. Siehe »Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik von August Beer. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von Julius Plücker.« Braunschweig 1865. S. 250. — Das Gesetz des Potentials als Grundgesetz an die Spitze zu stellen und das Gesetz der Kraft daraus abzuleiten dürfte kein Bedenken finden. In manchen Beziehungen lässt sich von der physischen Existenz der durch das Potential ausgedrückten Arbeit mit mehr Recht sprechen, als von der physischen Existenz einer Kraft, von der man nur sagen kann, dass sie physische Verhältnisse der Körper zu ändern sucht.

gen unabhängig von dem Wege, auf welchem die Ueberführung erfolgt ist, und unabhängig von den Bewegungszuständen, welche auf diesem Wege statt gefunden haben.

4.

Elektrische Grundgesetze.

Das Gesetz des elektrischen Potentials scheint zwar seiner Einfachheit nach den wahren elektrischen Grundgesetzen weit näher zu stehen, als das viel complicirtere Gesetz der elektrischen Kraft; jedoch lässt sich auch der Ausspruch jenes Gesetzes noch auflösen in zwei einfachere Gesetze, welche auf folgende Weise ausgesprochen werden können.

Erstes Gesetz. Wenn zwei Theilchen e und e' in zwei Entfernungen r und ϱ in relativer Ruhe oder in gleicher relativer Bewegung sich befinden; so verhalten sich die Arbeiten V und U, welche verrichtet werden, wenn beide Theilchen unter wechselseitiger Einwirkung aus diesen beiden Entfernungen in unendliche Entfernung gebracht werden, umgekehrt wie diese beiden Entfernungen, d. i.

$$V : U = \varrho : r \tag{1}$$

Zweites Gesetz. Die Arbeit U, die unter Einwirkung der Kraft, welche die Theilchen e und e' auf einander ausüben, verrichtet wird, wenn diese Theilchen aus einer bestimmten mit der Grösse ee' proportionalen Entfernung, $\varrho = \frac{ee'}{a}$, in unendliche Entfernung gebracht werden, bildet zusammen mit der lebendigen Kraft x, welche den Theilchen in Folge ihrer relativen Bewegung bei der Entfernung ϱ zukam, eine constante Summe, nämlich a, d. i.

$$U + x = a\,. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) folgt nämlich

$$U = \frac{r}{\varrho}\,V\,,$$

und hiemit folgt aus Gleichung (2)

$$\frac{r}{\varrho}\,V + x = a\,,$$

oder, da $\varrho = \frac{ee'}{a}$ war,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Die relative lebendige Kraft x ist nun aber dem Quadrate der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ proportional, wonach man für a eine neue Constante cc einführen kann, indem man nämlich

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \text{*)}$$

---

*) Bezeichnen ε und ε' die Massen der Theilchen e und e' und α, β die Geschwindigkeiten von ε in der Richtung r und senkrecht darauf, α', β' dieselben Geschwindigkeiten für ε', wonach $\alpha - \alpha' = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist; so ist

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon(\alpha\alpha + \beta\beta) + \tfrac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'\alpha' + \beta'\beta')$$

die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha, \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} + \frac{\varepsilon'(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'}$$

$$\text{für } \alpha', \quad \frac{\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha'}{\varepsilon + \varepsilon'} - \frac{\varepsilon(\alpha - \alpha')}{\varepsilon + \varepsilon'};$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe zweier Theile folgendermassen dargestellt, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta\beta + \varepsilon'\beta'\beta'\right),$$

wovon der erstere Theil, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, welche oben mit x bezeichnet worden. a ist nun auch eine relative lebendige Kraft derselben Theilchen, aber bei einer bestimmten relativen Geschwindigkeit c derselben, wonach also $a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc$ ist. Hieraus ergiebt sich $\frac{x}{a} = \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, wie oben angegeben worden.

Es möge noch bemerkt werden, dass der zweite Theil der obigen Summe, nämlich $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + \varepsilon\beta\beta + \varepsilon'\beta'\beta'\right)$, nochmals getheilt, wieder als Summe zweier Theile dargestellt werden kann, nämlich

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha + \varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon + \varepsilon'} + (\varepsilon + \varepsilon')\gamma\gamma\right),$$

wo $\frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit darstellt, mit welcher die beiden Theilchen gegen einander, im Raume, senkrecht gegen r sich bewegen, während γ die Geschwindigkeit des Schwerpunkts beider Theilchen senkrecht gegen r darstellt. Es ergiebt sich hiernach die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft in drei Theile zerlegt,

setzt Alsdann erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Hier bezeichnet V die Arbeit, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Soll V die Arbeit bezeichnen, welche verrichtet wird, wenn die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die Entfernung r gebracht werden, was angenommen zu werden pflegt, damit positive Werthe von $\frac{dV}{dr}$ Abstossung bedeuten; so ergiebt sich

$$A = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1\right),$$

d. i. das Gesetz des elektrischen Potentials.

5.

Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen, welche ein abgesondertes System bilden.

Die beiden im vorigen Artikel ausgesprochenen Grundgesetze, welche sich bezeichnen lassen als

das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der Entfernung, bei gleicher relativer Bewegung, und als

das Gesetz der Abhängigkeit des Potentials von der relativen Bewegung, bei einer bestimmten Entfernung,

bedürfen noch einer näheren Erläuterung in Betreff ihres Verhältnisses zu dem Princip der Erhaltung der Energie.

Nach dem Princip der Erhaltung der Energie werden drei

---

nämlich 1) $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, 2) $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$, 3) $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'} + (\varepsilon+\varepsilon')\gamma\gamma\right)$, wovon der erste Theil, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+e'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, ferner die beiden ersten Theile zusammen, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\left(\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{ds^2}{dt^2}\right)$ die ganze innere lebendige Kraft oder die innere Bewegungsenergie des Systems darstellt, im Gegensatz zum dritten Theile, nämlich $\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'} + (\varepsilon+\varepsilon')\gamma\gamma\right)$, welcher die äussere lebendige Kraft oder die äussere Bewegungsenergie des Systems (d. i. die dem Schwerpunkt beider Theilchen zugehörige lebendige Kraft) darstellt.

Formen der Energie unterschieden, nämlich die Bewegungsenergie, die Potentialenergie und die Wärmeenergie.

Die Bewegungsenergie ist der von der vorhandenen Bewegung abhängige Theil der Energie, und es wird eine besondere Bestimmung darüber gegeben, wie er von der Bewegung abhängt, nämlich theils von der Grösse der bewegten Masse, theils von der Geschwindigkeit, mit welcher diese Masse sich bewegt.

Dieselbe Bestimmung gilt auch von der Wärmeenergie, wenn nach der mechanischen Wärmetheorie die Wärme als eine innere Bewegung in den Körpern betrachtet wird. Handelt es sich aber um ein System zweier Elementartheilchen, d. i. solcher Theilchen, in deren Innerem keine Bewegung statt findet; so leuchtet ein, dass bei einem solchen Systeme die Wärmeenergie wegfällt, und dass blos die Bewegungsenergie und die Potentialenergie übrig bleiben.

Die Potentialenergie endlich ist der von dem vorhandenen Potentiale abhängige Theil der Energie, und es bedarf für die Potentialenergie einer näheren Bestimmung, wie sie vom Potential abhängt, geradeso, wie es für die Bewegungsenergie einer nähern Bestimmung bedurfte, wie sie von der Bewegung abhinge.

Eine solche nähere Bestimmung ist nun gegeben worden, indem man die Potentialenergie (abgesehen vom Vorzeichen) dem Potential gleich gesetzt hat.*)

Die Berechtigung zu dieser Bestimmung fand man darin, dass das Potential eine der Bewegungsenergie homogene Grösse ist, welche, wenn sie negativ genommen und zu der Bewegungsenergie hinzugefügt wird, stets die nämliche Summe giebt, solange beide Theilchen ein abgesondertes System bilden, welches weder von Aussen Energie mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt.

---

*) Das Vorzeichen des Potentials V wird so bestimmt, dass positive Werthe von $\frac{dV}{dr}$ abstossende Kräfte bezeichnen; das Vorzeichen der Potentialenergie richtet sich nach dem Vorzeichen der Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung der Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen aus der Entfernung r in unendliche Entfernung gebracht werden. Für zwei ponderabele Theilchen m, m' ist daher das Potential $V = \frac{mm'}{r}$, die Potentialenergie $= -\frac{mm'}{r}$. Für zwei elektrische Theilchen e, e' ist das Potential $= \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$, die Potentialenergie $= \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$.

Hat man z. B. ein System zweier ponderabelen Theilchen m, m', so ist das Potential

$$V = \frac{mm'}{r},$$

und die innere lebendige Kraft, oder die innere Bewegungsenergie des Systems, ist

$$W = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'} \cdot (uu + \alpha\alpha),$$

wenn $u = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, α den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches abgesondertes System, wenn $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$uu = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0}\alpha\alpha\right) ^{*)},$$

folglich die Summe

---

*) Die Kraft, mit welcher die beiden Theilchen auf einander wechselseitig wirken, nämlich $\frac{dV}{dr}$, mit m dividirt, giebt die Beschleunigung des Theilchens m, $= \frac{1}{m}\frac{dV}{dr}$; mit m' dividirt, die Beschleunigung des Theilchens m', $= \frac{1}{m'}\frac{dV}{dr}$; folglich ist der von ihrer Wechselwirkung herrührende Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen $= \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{dV}{dr}$, während derjenige Theil der relativen Beschleunigung beider Theilchen, welcher von ihrer Drehung um einander herrührt, durch $\frac{\alpha\alpha}{r}$ ausgedrückt wird. Zieht man nun den letzteren Theil von der ganzen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ ab; so erhält man folgende Gleichung

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Setzt man für den Augenblick wo $u = 0$ ist, $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$; so ergiebt sich für den Fall, dass auf die beiden Theilchen blos die von ihrer Wechselwirkung herrührenden Anziehungskräfte wirken,

$$\alpha r = \alpha_0 r_0.$$

Hiernach ergiebt sich durch Integration obiger Differentialgleichung, nachdem sie mit $2dr = 2udt$ multiplicirt worden,

$$uu + \alpha_0\alpha_0 r_0 r_0\left(\frac{1}{rr} - \frac{1}{r_0 r_0}\right) = 2\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)\left(\frac{mm'}{r} - \frac{mm'}{r_0}\right)$$

und hieraus

$$uu = \frac{r_0 - r}{r}\left(\frac{2(m+m')}{r_0} - \frac{r_0 + r}{r}\alpha_0\alpha_0\right) = \frac{r_0 - r}{r_0}\left(\frac{2(m+m')}{r} - \frac{r_0 + r}{r_0}\alpha\alpha\right).$$

$$W - V = -\frac{mm'}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{mm'}{m + m'} \cdot \alpha_0\alpha_0 \,.$$

Diese Summe behält immer denselben Werth, solange als die Werthe von r_0 und α_0 unverändert bleiben, d. h. solange das System der beiden Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt. — Die äussere Bewegungsenergie bildet bei einem solchen abgesonderten Systeme eine constante Summe für sich. —

Dasselbe gilt nun auch ferner für zwei elektrische Theilchen e, e', deren Potential negativ genommen, zu ihrer Bewegungsenergie hinzugefügt, gleichfalls immer die nämliche Summe giebt, solange beide Theilchen ein abgesondertes System bilden.

Denn man hat für ein solches System zweier elektrischen Theilchen das Potential

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) ,$$

ferner die innere Bewegungsenergie des Systems

$$W = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}(uu + \alpha\alpha) = \frac{ee'}{\varrho cc}(uu + \alpha\alpha) \,,$$

wenn $u = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit der beiden Theilchen, α den Unterschied ihrer Geschwindigkeiten im Raume senkrecht gegen r bezeichnet. Es ergiebt sich aber leicht für ein solches abgesondertes System, wenn $r = r_0$ und $\alpha = \alpha_0$ für $u = 0$ gesetzt wird,

$$\alpha = \frac{r_0}{r}\alpha_0$$

$$uu = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0}cc + \frac{r_0 + r}{r}\alpha_0\alpha_0\right) \,, \; ^{*})$$

folglich die Summe

$$W - V = \frac{ee'}{r_0} + \frac{ee'}{\varrho} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} = \frac{ee'}{r_0} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \alpha_0\alpha_0 \,.$$

Auch diese Summe behält denselben Werth, solange die Werthe von r_0 und α_0 unverändert bleiben, d. h. solange das System beider Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält noch nach Aussen abgiebt. **) — Für die äussere Bewegungsenergie gilt bei

*) Siehe Art. 11.

**) In der sehr lehrreichen Schrift des Herrn Tait: Sketch of thermodynamics. Edinburgh 1868, findet sich pag. 76, mit Beziehung auf die von Riemann und

einem abgesonderten Systeme für zwei elektrische Theilchen dasselbe wie für zwei ponderabele Theilchen. —

6.

Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Energie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden.

Setzt man die Potentialenergie, wie es im vorhergehenden Artikel geschehen, dem Potentiale entgegengesetzt gleich, so gilt das Princip der Erhaltung der Energie für zwei Theilchen nur so lange, als diese beiden Theilchen ein abgesondertes System bilden, d. h. so lange, als das System beider Theilchen weder Energie von Aussen mitgetheilt erhält, noch nach Aussen abgiebt.

War die ganze Energie eines solchen abgesonderten Systems zweier Theilchen $= A$, bleibt aber dieses System nicht abgesondert, sondern wird ihm von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt; so scheint zu folgen, dass, wenn darauf das System wieder abgesondert würde, die ganze Energie wieder constant werden und constant bleiben würde, so lange, als es abgesondert bliebe; dass aber die dem abgesonderten Systeme zukommende ganze Energie während seiner letzteren Absonderung den constanten Werth $A + a$ haben würde, also einen um a grösseren Werth, als während seiner früheren Absonderung. Es ist hiemit aber die Unmöglichkeit der Ausdehnung des Princips der Erhaltung der Ener-

Lorenz in Poggendorffs Annalen 1867 erschienenen Untersuchungen, folgende Stelle: But the investigations of these authors are entirely based on Weber's inadmissible theory of the forces exerted on each other by moving electric particles, for wich the conservation of energy is not true — while Maxwell's result is in perfect consistence with that great principle. Diese Behauptung des Herrn Tait erscheint mit Obigem in Widerspruch. Herr Tait hat pag. 56 desselben Werks angeführt, dass Helmholtz die Lehre von der Energie auf Newton's Princip und auf folgendes Postulat gegründet habe: Matter consists of ultimate particles which exert upon each other forces whose directions are those of the lines joining each pair of particles, and whose magnitudes depend solely on the distances between the particles. Es leuchtet der Widerspruch des elektrischen Grundgesetzes mit diesem Postulate wohl ein, aber keineswegs mit dem Principe der Erhaltung der Energie, was Herr Tait verwechselt zu haben scheint.

gie auf zwei elektrische Theilchen, welche kein abgesondertes System bilden, noch keineswegs vollständig bewiesen.

Denn streng genommen ist dies nur unter der Voraussetzung bewiesen, dass die Potentialenergie des Systems blos von der Entfernung beider Theilchen abhänge; wenn dagegen die Potentialenergie nicht blos von der Entfernung beider Theilchen, sondern auch von ihrer gegenseitigen Bewegung abhängt; so leuchtet ein, dass das System, während es von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt erhält, dadurch mittelbar auch eine Aenderung seiner Potentialenergie erleiden muss. Es wäre dann also möglich, dass diese mittelbar von Aussen herrührende Aenderung der Potentialenergie $= - a$ wäre, so dass die ganze Energie (Bewegungsenergie und Potentialenergie zusammen) beider Theilchen, auch wenn sie kein abgesondertes System bilden, immer denselben Werth behielte.

Dies findet nun zwar für ein System zweier elektrischen Theilchen wirklich nicht statt, wenn man die Potentialenergie dem Potentiale entgegengesetzt gleich setzt, was also jene Ausdehnung des Princips unmöglich machen würde, was selbst aber keineswegs als nothwendig nachgewiesen ist. Im Allgemeinen wurde nämlich nur eine nähere Bestimmung darüber erfordert, wie die Potentialenergie vom Potentiale abhänge, wobei nur einleuchtete, dass zwischen Potential und Potentialenergie, weil sie homogene Grössen waren, ein reines Zahlenverhältniss statt finden müsse. Ob aber dieses Zahlenverhältniss immer das Verhältniss von $+1$ zu -1 sei, oder ob dieses Verhältniss anders zu bestimmen sei, kann noch im Allgemeinen als zweifelhaft betrachtet werden, womit die Möglichkeit jener Ausdehnung des Princips bleibt.

Unter Potential zweier Theilchen versteht man nämlich diejenige Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird, während die beiden Theilchen auf beliebige Weise aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden.

Man sieht aber ein, dass Arbeit in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen nicht blos verrichtet werde während der Versetzung aus grösserer Entfernung in die Entfernung r, sondern

auch während der Versetzung aus kleinerer Entfernung in die Entfernung r. Und es liegt gar kein Grund vor, die dem Systeme zuzuschreibende Energie blos von jener Arbeit und nicht auch von dieser Arbeit abhängig zu machen.

Zum Beispiel könnte, wenn jene Arbeit nach Art. 4 mit V, diese Arbeit mit $\frac{\varrho - r}{\varrho} V$ bezeichnet wird, die dem Systeme zuzuschreibende Potentialenergie der Differenz beider Arbeiten gleich sein, nämlich $= \frac{\varrho - r}{\varrho} V - V = -\frac{r}{\varrho} V$. Diese Differenz beider Arbeiten ist offenbar die Arbeit, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen während der Versetzung von dem Grenzwerth der kleineren Entfernung zum Grenzwerth der grösseren Entfernung verrichtet wird, d. i. der Werth, welchen $-V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{uu}{cc}\right)$ annimmt, wenn darin r dem Grenzwerthe der kleineren Entfernung gleich genommen, oder $r = \varrho$ gesetzt wird, wo ϱ den Grenzwerth der kleineren Entfernung bezeichnet. Hiernach ist also diese Differenz beider Arbeiten $= \frac{ee'}{\varrho}\left(1 - \frac{uu}{cc}\right) = -\frac{r}{\varrho} V$.

Bei solcher Bestimmung der Potentialenergie für ein System zweier elektrischen Theilchen, wo jene erstere Arbeit

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

ist, würde also zur Bestimmung der letzteren Arbeit es nur noch der Bestimmung des Werths von ϱ bedürfen, nämlich der kleineren Entfernung, für welche letztere Arbeit gelten soll.

Diese kleinere Entfernung muss nun, ebenso wie jene grössere Entfernung, für sich, unabhängig von den vorhandenen Verhältnissen der beiden Theilchen, bestimmt sein. Für die grössere Entfernung war dies dadurch erreicht, dass man ihr einen unendlich grossen Werth beilegte; für die kleinere Entfernung lässt sich dasselbe erreichen, wenn man ihr den Werth $= 2\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}$ beilegt, eine Entfernung welche durch die Theilchen e, e', durch ihre Massen ε, ε' und durch die bekannte elektrische Constante c gegeben ist.

Wird nun die kleinere Entfernung diesem Werthe von ϱ gleich gesetzt, so erhält man, da

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

$$\frac{\varrho - r}{\varrho} V = \frac{\varrho - r}{\varrho} \cdot \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

war, den gesuchten Werth der Potentialenergie

$$-\frac{r}{\varrho} V = -\frac{ee'}{\varrho}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\left(cc - uu\right).$$

Zu der hier gemachten Unterscheidung zwischen Potential- und Potentialenergie zweier elektrischen Theilchen und der hiernach gegebenen Bestimmung ihres Verhältnisses, möge nun auch noch eine ähnliche Bemerkung über den zwischen lebendiger Kraft und Bewegungsenergie zweier Theilchen zu machenden Unterschied hinzugefügt werden. Denn auch die Bewegungsenergie zweier Theilchen braucht nicht nothwendig der ganzen beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft gleichgesetzt zu werden, sondern es wird im Allgemeinen nur eine nähere Bestimmung darüber erfordert, in welcher Beziehung die Bewegungsenergie zweier Theilchen zur ganzen den beiden Theilchen zugehörigen lebendigen Kraft stehe.

Die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft ist nun in der Note Art. 4 als Summe zweier Theile dargestellt worden, wovon der erstere Theil, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\frac{dr^2}{dt^2}$, die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen genannt wurde. Der andere Theil war derjenige, welcher beiden Theilchen zukam in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume.

Geht man nun bei der Feststellung des Begriffs der Energie zweier Theilchen davon aus, dass das Princip der Erhaltung der Energie zweier Theilchen im Wesen der beiden Theilchen begründet sein soll, und zwar im Wesen der beiden Theilchen als abgesondertes System betrachtet, so leuchtet ein, dass zu diesem Zwecke der Begriff der Energie zweier Theilchen (ganz unabhängig von den Beziehungen in welche diese Theilchen zu allen andern Körpern im Raume stehen mögen) nur von den im Systeme beider Theilchen als solchem dargebotenen Verhältnissen abhängig gemacht werden dürfe.

Wendet man diesen Grundsatz nun auf die Bewegungsenergie zweier Theilchen an, wie es soeben in Beziehung auf die Potentialenergie geschehen ist; so sieht man, dass die Bewegungsenergie von dem ersten Theile der ganzen den beiden Theilchen angehörigen lebendigen Kraft, nämlich von der relativen lebendigen Kraft der beiden Theilchen abhängig gemacht werden dürfe, aber nicht von dem zweiten Theile der ganzen lebendigen Kraft, welche nämlich den beiden Theilchen nur in Folge ihrer Drehung umeinander im Raume und in Folge der Bewegung ihres Schwerpunkts im Raume zukommt, weil dieser Theil von Verhältnissen abhängt, welche von den Theilchen selbst unmittelbar nicht dargeboten sind. Denn die beiden Theilchen für sich allein betrachtet bieten in räumlicher Beziehung unmittelbar nichts dar als ihren Abstand, woraus keine Kenntniss von Drehung oder Fortbewegung des Schwerpunkts im Raume zu entnehmen ist.

Es soll daher in Folgendem unter Bewegungsenergie zweier Theilchen nicht die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft, sondern nur die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen verstanden werden.

Hiernach würde nun aber, wie man leicht ersieht, das System zweier elektrischen Theilchen e, e' während es von Aussen die Bewegungsenergie $= a$ mitgetheilt erhielte, wirklich eine Aenderung seiner Potentialenergie $= - a$ erleiden, so dass die ganze Energie des Systems beider Theilchen immer denselben Werth behielte, sowohl wenn die beiden Theilchen ein abgesondertes System, als auch wenn sie kein abgesondertes System bilden. Denn setzt man die von Aussen mitgetheilte Bewegungsenergie

$$a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} vv\ ,$$

während die vor dieser Mittheilung vorhandene Bewegungsenergie der Theilchen

$$= \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} \cdot u_0 u_0$$

war, so ist die nach dieser Mittheilung vorhandene Bewegungsenergie

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'} uu = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(u_0 u_0 + vv)\ ;$$

folglich ist die Potentialenergie vor jener Mittheilung

$$-\frac{r}{\varrho}V_0 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - u_0 u_0),$$

die Potentialenergie nach jener Mittheilung dagegen

$$-\frac{r}{\varrho}V = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - uu) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}(cc - u_0 u_0) - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}vv,$$

also ist die in Folge jener mitgetheilten Bewegungsenergie $= + a$ eingetretene Aenderung der Potentialenergie

$$= -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}vv = -a.$$

7.

Anwendbarkeit auf andere Körper.

Unterscheidet man zwischen Potential und Potentialenergie zweier elektrischen Theilchen auf die im vorigen Artikel angegebene Weise, wonach nämlich

> das Potential diejenige Arbeit ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden Theilchen aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung r mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden;
>
> die Potentialenergie dagegen die negativ genommene Arbeit ist, welche in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen verrichtet wird während die beiden Theilchen aus der grösseren Entfernung $r = \infty$ in die kleinere $r = \varrho$, welche durch die Theilchen e, e', ihre Massen ε, ε' und durch die Constante c gegeben ist, mit der vorhandenen relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ versetzt werden;

so kann letztere, nämlich die Potentialenergie in der angegebenen Bedeutung, in zwei Theile zerlegt werden, wovon der eine dem Potential entgegengesetzt gleich, folglich diejenige Grösse ist, welche früher allein als Potentialenergie bezeichnet worden, und welche von jetzt an, nur als Theil der Potentialenergie betrachtet, die freie Potentialenergie heissen möge. Der übrig

bleibende Rest ist der zweite Theil, welcher die latente Potentialenergie heissen möge.

Es lässt sich alsdann das Princip der Erhaltung der Energie erstens im früheren weiteren Sinne folgendermassen aussprechen:

> für ein abgesondertes System zweier Theilchen ist die Summe der Bewegungsenergie und der freien Potentialenergie immer gleich.

Denn, solange keine Bewegungsenergie von Aussen mitgetheilt noch nach Aussen abgegeben wird, wird jede Aenderung der freien Potentialenergie durch eine entgegengesetzt gleiche Aenderung der Bewegungsenergie ersetzt.

Es lässt sich aber alsdann auch zweitens das Princip der Erhaltung der Energie im engeren Sinne (wenn hiebei Potentialenergie und Bewegungsenergie in der eben festgesetzten Bedeutung genommen werden) folgendermassen aussprechen:

> die relative Bewegungsenergie zweier Theilchen und die ihnen bei dieser Bewegungsenergie zukommende ganze Potentialenergie bilden zusammen eine stets gleiche Summe, das System möge abgesondert sein oder nicht.

Hieran lassen sich nun folgende Bemerkungen knüpfen:

1) einem Theilchen für sich allein betrachtet kommt blosse Bewegungsenergie zu;

2) zweien Theilchen kommt zunächst ebenfalls Bewegungsenergie zu, welche die Summe von denen ist, die ihnen einzeln betrachtet zukommen;

3) diese Summe besteht aus einem Theile A, der theils ihrem Schwerpunkte zugeschrieben werden kann, theils der Drehung der beiden Theilchen im Raume um einander, und aus einem Theile B, welcher beiden Theilchen für sich allein betrachtet relativ gegen einander zukommt. Dieser letztere Theil B heisst die relative Bewegungsenergie oder die des Systems beider Theilchen.

4) In dem Systeme beider Theilchen ist aber ausser seiner Bewegungsenergie noch Etwas vorhanden, was beiden Theilchen einzeln nicht zukommt, nämlich eine grössere oder geringere Arbeits-

fähigkeit, in Folge der Wechselwirkung beider Theilchen auf einander. Das Maass dieser Arbeitsfähigkeit wird mit dem Namen Potentialenergie des Systems oder relative Potentialenergie der beiden Theilchen bezeichnet, und zwar dient zu diesem Maasse der Arbeitsfähigkeit diejenige Arbeit, welche verrichtet wird, in Folge der Wechselwirkung der beiden Theilchen, während ihrer Versetzung aus der kleineren Entfernung $r = \varrho$ in die grössere $r = \infty$, wo ϱ durch die Theilchen e, e' selbst, durch ihre Massen ε, ε' und durch die Constante c bestimmt ist.

5) Das auf die oben angegebene Weise näher bestimmte Princip der Erhaltung der Energie findet nun aber auf zwei Theilchen nur dann Anwendung, wenn das Potential der beiden Theilchen von gleicher Form ist, wie das zweier elektrischen Theilchen, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Das Potential zweier ponderabelen Theilchen m, m' ist dagegen

$$V = \frac{mm'}{r},$$

was (abgesehen vom Vorzeichen) unter jener Form nur subsumirt werden kann, wenn der Werth der Constanten c für ponderabele Theilchen unendlich gross ist; doch leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit genügen wird, der Constanten c nur einen sehr grossen Werth zuzuschreiben, statt eines unendlich grossen Werthes, um in keinen nachweisbaren Widerspruch mit der Erfahrung zu gerathen. Und bei dem ausserordentlich grossen Werthe, der auch für elektrische Theilchen der Constanten c zugeschrieben werden muss, scheint es für ponderabele Körper, zur Vermeidung aller nachweisbaren Widersprüche, gar nicht nöthig einen andern Werth anzunehmen, sondern es dürfte gestattet sein, für zwei ponderabele Theilchen m, m' das Potential

$$V = \frac{mm'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

zu setzen, und darin der Constanten c denselben Werth wie im Potential elektrischer Theilchen beizulegen.

Sollten aber auch künftige feinere Beobachtungsresultate ergeben, dass eine solche Gleichsetzung des Werths der Constanten c für

ponderabele Theilchen nicht gestattet sei; so würde immer übrig bleiben, für ponderabele Theilchen der Constanten *c* einen noch grösseren Werth beizulegen, der leicht so gross genommen werden kann, dass jeder nachweisbare Widerspruch mit der Erfahrung vollkommen verschwindet.

Ueber die Bewegungen zweier elektrischen Theilchen durch Wechselwirkung.

8.

Durch das elektrische Grundgesetz wird die Wirkung bestimmt, welche irgend ein Theilchen auf ein anderes unter beliebigen Verhältnissen ausübt. Als nächstliegende und einfachste Anwendung, welche dieses Gesetz finden kann, scheint sich die Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter wechselseitigem Einflusse darzubieten; es hat aber ein grösseres praktisches Interesse gehabt, zunächst die Vertheilungsgesetze ruhender Elektricität in Conductoren, und die Gesetze der von strömender Elektricität in einem geschlossenen Leiter, durch die in einem andern Leiter strömende Elektricität, auf diesen letzteren Leiter ausgeübten Kräfte, sowie die Gesetze der von geschlossenen Strömen (oder von Magneten) auf die Elektricität in geschlossenen Leitern ausgeübten (elektromotorischen) Kräfte zu entwickeln, weil die Resultate dieser Entwickelungen directe Prüfungen und Bestätigungen durch die Erfahrung gestatteten. Fehlt nun auch dieses wichtige praktische Interesse der Entwickelung der Bewegungsgesetze zweier Theilchen unter blossem wechselseitigen Einflusse; so dürften doch manche Resultate derselben in andern Beziehungen Aufmerksamkeit verdienen.

Das Interesse an diesen Resultaten betrifft nämlich vorzugsweise die Molecularbewegungen zweier Theilchen, welche von aller directen experimentellen Forschung ausgeschlossen sind, und für welche daher der Anwendung des aufgestellten Gesetzes, insofern

es als Erfahrungsgesetz betrachtet wird, keine Berechtigung zugeschrieben werden kann. Die Entwickelung der Molecularbewegungen zweier Theilchen nach dem aufgestellten Gesetze darf daher nur als ein Versuch betrachtet werden, für die Theorie der Molecularbewegungen, an der es noch gänzlich fehlt, einen Leitfaden zu gewinnen, der für sich allein freilich nicht genügt, sondern noch einer wesentlichen Ergänzung bedarf. Denn ohne die Kenntniss und genaue Berücksichtigung der ohne Zweifel bei den Molecularbewegungen zur Mitwirkung kommenden, auf Molecularentfernungen beschränkten Molecularkräfte kann den sich ergebenden Resultaten keine genaue quantitative, sondern nur innerhalb gewisser Schranken eine Art qualitativer Geltung zugeschrieben werden, welche nur für die erste Recognoscirung des Gebietes Bedeutung habe.

9.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen in Richtung der sie verbindenden Geraden.

Für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e' hat man nach den Grundgesetzen Art. 4, wenn

$$\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}, \quad x = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}, \quad a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc$$

gesetzt wird, und wenn daselbst die Vorzeichen von U und V negativ genommen werden, um die Potentiale damit zu bezeichnen,

$$V : U = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc} : r$$

$$-U + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot cc\,;$$

folglich

$$V = \frac{2}{r}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}\,.\,U = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right).$$

Findet keine Drehungsbewegung der beiden Theilchen um einander im Raume statt; so ist $\frac{1}{\varepsilon}\frac{dV}{dr}$ die Beschleunigung des Theilchens e in Richtung von r, und $\frac{1}{\varepsilon'}\frac{dV}{dr}$ ist die Be-

schleunigung des Theilchens e' in entgegengesetzter Richtung. Man erhält hiernach die relative Beschleunigung beider Theilchen

$$\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr},$$

und hieraus durch Integration von $r = r_0$ bis $r = r$, wenn der Werth von r, in dem Augenblicke wo $\frac{dr}{dt} = u = 0$ ist, mit r_0 bezeichnet wird, da $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ gesetzt worden,

$$\frac{dr^2}{dt^2} = uu = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0} \cdot cc .$$

$\frac{\varrho}{r_0}$ hat stets einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth; denn $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ hat einen gegebenen endlichen, wenn auch sehr kleinen Werth, welcher positiv oder negativ ist, jenachdem ee' positiv oder negativ ist, und $r_0 = \frac{r}{1 + \frac{uu}{cc} \cdot \frac{r - \varrho}{\varrho}}$ hat ebenfalls einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Werth, weil die anfänglichen Werthe von r und uu, aus denen r_0 bestimmt werden soll, positive und messbare Grössen sein müssen, welche durch Beobachtung bestimmt gedacht werden.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ positiv, indem Zähler und Nenner positiv sind, so sind alle Bewegungen auf die Entfernungen ausserhalb der Strecke ϱr_0 beschränkt und zerfallen in Fernbewegungen und Molecularbewegungen, die von einander durch die Strecke ϱr_0 geschieden sind.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ aber positiv, indem Zähler und Nenner negativ sind; so erstrecken sich die Bewegungen über alle möglichen Entfernungen, weil die Strecke ϱr_0 ausserhalb der möglichen Entfernungen liegt.

Ist $\frac{\varrho}{r_0}$ negativ, wo die Strecke ϱr_0 theils ausserhalb, theils innerhalb der möglichen Entfernungen liegt; so sind alle Bewegungen auf den innerhalb möglicher Entfernungen liegenden Theil der Strecke ϱr_0 beschränkt, und sind, wenn ϱ positiv und r_0 negativ ist, Molecularbewegungen.

Es ergiebt sich hiernach, wenn ϱ und r_0 positiv sind, erstens, dass kein Uebergang von Fernbewegungen zu Molecularbe-

wegungen stattfindet; zweitens, dass uu immer kleiner bleibt als cc, wenn es anfangs kleiner war; drittens, dass, wenn $uu < cc$, r und r_0 (beide zugleich) entweder grösser oder kleiner als ϱ sind.

Hält man sich blos an die Erfahrung, so können einige dieser relativen Bewegungen der beiden Theilchen von der Betrachtung ganz ausgeschlossen werden; denn es leuchtet ein, dass in der Wirklichkeit unendlich grosse relative Geschwindigkeiten gar nicht vorkommen, im Gegentheil ist $\frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ fast immer als ein sehr kleiner Bruch zu betrachten.

Diese aus der Natur entnommene Beschränkung ist auch stillschweigend zum Grunde gelegt, wenn $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ als Potential angenommen wird, welches $= 0$ sein soll für einen unendlich grossen Werth von r. Denn wäre $\frac{dr^2}{dt^2}$ unendlich gross, so könnte $\frac{ee'}{r}\left(\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} - 1\right)$ auch für einen unendlich grossen Werth von r einen von Null verschiedenen Werth haben.

Ist aber der Werth von $\frac{dr^2}{dt^2}$ niemals unendlich gross, so muss es einen endlichen Werth geben, den $\frac{dr^2}{dt^2}$ niemals überschreitet. Als ein solcher Werth mag cc angenommen werden.

Diese Beschränkung der relativen Geschwindigkeiten vorausgesetzt, ist r_0 immer positiv, und es giebt für jeden Werth von r_0 nur eine einzige stetig zusammenhängende Reihe zusammengehöriger Werthe von r und $\frac{dr^2}{dt^2}$, und zwar erstrecken sich

wenn ϱ positiv und $r_0 > \varrho$ ist,

die zusammengehörigen Werthe von r und $\frac{dr^2}{dt^2}$ von $r = r_0$ bis $r = \infty$ und von $\frac{dr^2}{dt^2} = 0$ bis $\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{\varrho}{r_0}$. Die betreffenden Bewegungen sind Fernbewegungen.

Ist ϱ positiv und $r_0 < \varrho$, oder ist ϱ negativ;

so erstrecken sich die zusammengehörigen Werthe von $r = r_0$ bis $r = 0$ und von $\frac{dr^2}{dt^2} = 0$ bis $\frac{dr^2}{dt^2} = cc$. Die betreffenden Bewegungen sind im erstern Falle, wenn ϱ positiv und $r_0 < \varrho$ ist, und desgleichen im zweiten Falle, wenn ϱ negativ und $r_0 < \varrho$ ist, Molecularbewegungen; wenn aber im zweiten Falle $r_0 > \varrho$ ist, sind die be-

treffenden Bewegungen theils Fernbewegungen, theils Molecularbewegungen.

Unter der angegebenen Beschränkung der Bewegungen erhält man also für zwei blos unter wechselseitigem Einfluss sich bewegende Theilchen e, e', wenn keine Drehungsbewegung der Theilchen um einander im Raume statt findet, folgende Bewegungsgleichung, nämlich wenn $\frac{dr}{dt} = u$ gesetzt wird,

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0},$$

wo ϱ einen durch die Theilchen e, e', ihre Massen ε, ε' und durch die Constante cc gegebenen Werth hat, und r_0 eine, nach dieser Gleichung selbst, aus dem positiv und von ϱ verschiedenen, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von r, und aus dem positiv und kleiner als cc, sonst beliebig anzunehmenden, Anfangswerth von uu zu bestimmende Constante bezeichnet.

10.

Zwei Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen.

Für zwei gleichartige Theilchen hat ϱ einen positiven Werth. Da nun ferner für jeden Werth von r die relative Geschwindigkeit u zwei entgegengesetzt gleiche Werthe annehmen kann; so kann, obiger Gleichung $\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho} \cdot \frac{\varrho}{r_0}$ gemäss,

entweder r zuerst abnehmen von $r = \infty$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u zu von $u = -c\sqrt{\frac{\varrho}{r_0}}$ bis $u = 0$; sodann wird
r wieder zunehmen von $r = r_0$ bis $r = \infty$, und dabei nimmt u zu von $u = 0$ bis $u = +c\sqrt{\frac{\varrho}{r_0}}$;

oder es kann r zuerst abnehmen von $r = r_0$ bis $r = 0$, und dabei nimmt u ab von $u = 0$ bis $u = -c$; sodann wird
r wieder zunehmen von $r = 0$ bis $r = r_0$, und dabei nimmt u ab von $u = +c$ bis $u = 0$.

Man sieht leicht, dass die erstere Bewegung keine wiederkehrende ist; denn nachdem die Entfernung r von beliebiger Grösse

bis r_0 abgenommen hat, wächst sie wieder und zwar bis ins Unendliche, d. h. sie nimmt niemals wieder ab. Die letztere Bewegung ist dagegen eine wiederkehrende, indem die Entfernung r abwechselnd von r_0 bis 0 abnimmt und abwechselnd von 0 bis r_0 wieder zunimmt.

Im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, scheint zwar im Werthe der Geschwindigkeit u ein Sprung einzutreten von $-c$ zu $+c$; in der That findet aber kein Sprung statt, weil $-c$ bei verschwindendem r dieselbe Geschwindigkeit bezeichnet, wie $+c$ bei dem von Null an wachsenden r.

Diese beiden Bewegungen sind ferner von einander dadurch unterschieden, dass kein Uebergang von der einen zur andern statt findet; denn ein solcher Uebergang würde nach obiger Gleichung für die Strecke ϱr_0 oder $r_0\varrho$ nur durch imaginäre Werthe von u vermittelt werden.

Auf diese Trennung der beiden Bewegungszustände lässt sich nun die Unterscheidung zweier Aggregatzustände eines Systems von zwei gleichartigen Theilchen begründen, nämlich eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in Fernbewegung befinden können, und eines Aggregatzustandes, bei welchem die beiden Theilchen sich nur in Molecularbewegung befinden können. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustande zu dem andern giebt es nicht, solange beide Theilchen sich nur unter wechselseitigem Einflusse bewegen.

Zu bemerken ist nur noch der Umstand, dass hiebei vorausgesetzt worden, dass die beiden Theilchen, im Raume betrachtet, keine andere Bewegung haben, als nach der Richtung r; jedoch wird in den folgenden Artikeln auch der entgegengesetzte Fall betrachtet werden.

11.

Bewegungen zweier elektrischen Theilchen, welche im Raume, in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade, ungleiche Geschwindigkeiten besitzen.

Bezeichnet α den Unterschied der Geschwindigkeiten, welche zwei elektrische Theilchen e und e', bei der Entfernung r von einander, im Raume in einer Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade r besitzen; so ergiebt sich $\frac{\alpha\alpha}{r}$ als der von α abhängige Theil der relativen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$.

Bringt man diesen Theil $\frac{\alpha\alpha}{r}$ von der ganzen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$ in Abrechnung, so giebt die Differenz $\left(\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r}\right)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung der beiden Theilchen, welcher von den Kräften herrührt, die sie auf einander ausüben. Nach Art. 9 war dieser letztere Theil $= \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr} .$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $udt = dr$, so erhält man

$$udu - \alpha\alpha\frac{dr}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr} dr ,$$

und hieraus folgt durch Integration, von dem Augenblicke an gerechnet, wo $u = 0$ ist, wenn der Werth von r in diesem Augenblicke mit r_0 bezeichnet wird,

$$\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)(V - V_0) = \frac{1}{2} uu - \int_{r_0}^{r} \frac{\alpha\alpha}{r} dr ,$$

wo $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$ und $V_0 = -\frac{ee'}{r_0}$ ist, wo aber, um die letzte Integration auszuführen, $\alpha\alpha$ als Function von r dargestellt werden muss.

Nun ist $r \,.\, \alpha dt$ das von der Verbindungslinie der beiden Theilchen, welche durch Abstossungs- oder Anziehungskräfte auf einander

wirken, bei der Bewegung des einen Theilchens um das andere in dem Zeitelement dt beschriebene Flächenelement, welches für gleiche Zeitelemente dt immer gleichen Werth behält, woraus $r\alpha dt = r_0\alpha_0 dt$ folgt. Setzt man also hiernach

$$\alpha\alpha = r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0 \cdot \frac{1}{rr}$$

im letzten Gliede der obigen Gleichung ein, und führt dann die Integration aus; so erhält man folgende Gleichung:

$$2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}\left(\frac{r - r_0}{rr_0} + \frac{1}{r} \cdot \frac{uu}{cc}\right) = \frac{uu}{cc} + \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} \cdot \frac{r_0 r_0 - rr}{rr},$$

woraus, wenn $2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc} = \varrho$ gesetzt wird, die Bewegungsgleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

erhalten wird. Wird dieser Werth von $\frac{uu}{cc}$ in die Gleichung

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$$

gesetzt, so erhält man

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) - 1\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0} \cdot \frac{r_0 - \varrho}{(r - \varrho)^2} - \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(1 - \left(3 - 2\frac{\varrho}{r}\right)\frac{r_0 r_0}{rr}\right)\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}.$$

12.

Nach dem vorigen Artikel ist für zwei Theilchen, die sich unter wechselseitigem Einflusse beliebig im Raume bewegen, eine Gleichung zwischen ihrer relativen Geschwindigkeit u und ihrer relativen Entfernung r gegeben, nämlich

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

worin ϱ eine für zwei gleichartige Theilchen positive, für zwei ungleichartige Theilchen negative Constante bezeichnet.

Es ergeben sich nun hieraus ganz ähnliche Folgerungen für die freien Bewegungen zweier Theilchen im Raume, welche in einer

Richtung senkrecht auf die sie verbindende Gerade ungleiche Geschwindigkeit besitzen, unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung, wie für die Art. 10 betrachteten Bewegungen zweier Theilchen in Richtung der geraden Linie r. Es ergiebt sich nämlich auch hier für zwei gleichartige Theilchen wieder die Unterscheidung derselben zwei Aggregatzustände, nämlich eines Aggregatzustandes, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen mit periodischer Wiederkehr derselben Lage gegen einander, und eines Aggregatzustandes, in welchem die beiden Theilchen Bewegungen machen, durch welche sie von einander immer weiter entfernt werden und niemals zu derselben Lage zurückkehren. Einen Uebergang von dem einen Aggregatzustand zu dem andern giebt es nicht, so lange als beide Theilchen sich nur unter dem Einflusse ihrer eigenen Wechselwirkung bewegen.

13.

Eine Drehung der beiden Theilchen um einander fordert das Vorhandensein einer gewissen Anziehungskraft, wenn die beiden Theilchen bei dieser Drehung in gleicher Entfernung von einander bleiben sollen, und diese durch die Drehung geforderte Anziehungskraft wächst bei unveränderter Entfernung quadratisch mit der Drehungsgeschwindigkeit. Hiernach sollte man erwarten, dass es für zwei gleichartige elektrische Theilchen in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ (wo sie einander anziehen) stets eine gewisse Drehungsgeschwindigkeit α_0 geben müsse, bei welcher die durch die Drehung geforderte Anziehungskraft der aus der Wechselwirkung der beiden Theilchen resultirenden Anziehungskraft gleich wäre, so dass die beiden um einander sich drehenden Theilchen bei dieser Drehungsgeschwindigkeit in gleicher Entfernung r_0 von einander blieben. Dies ist aber nicht der Fall, weil die aus der Wechselwirkung beider Theilchen resultirende Anziehungskraft nicht blos von der Entfernung r_0, sondern auch von der Drehungsgeschwindigkeit α_0 abhängt, und mit letzterer in solcher Weise wächst, dass sie stets grösser bleibt als die durch die Drehungsgeschwindigkeit geforderte Anziehungskraft, wonach also mit jeder solchen Drehung immer eine wechselseitige Annäherung der beiden Theilchen verbunden ist.

Es ergiebt sich nämlich leicht, dass bei zwei gleichartigen Theilchen e und e', wo ϱ einen positiven Werth hat, wenn $r = r_0$ und folglich $u = 0$ ist, es keinen Werth von α_0 giebt, für welchen $\frac{du}{dt} = 0$ wäre, was der Fall sein müsste, wenn beide Theilchen in unveränderter Entfernung r_0 bleiben sollten. Denn es ergiebt sich für $r = r_0$ aus der Gleichung am Schlusse von Art. 11

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0-\varrho)}\left(1 + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

und hieraus ferner, weil $\frac{du}{dt} - \frac{\alpha\alpha}{r} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr} = \frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr}$ war,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{cc}{r_0-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

wonach $\frac{du}{dt}$ nur dann $= 0$ sein kann, wenn

$$\alpha_0\alpha_0 = -\frac{1}{2}\frac{\varrho}{r_0}cc$$

wäre, was aber für einen positiven Werth von ϱ, d. i. wenn e und e' gleichartig sind, nicht möglich ist.

Ferner ergiebt sich, dass bei zwei gleichartigen Theilchen, wenn $r = r_0$ ist, $\frac{du}{dt}$ entweder positiv oder negativ sei, jenachdem $r_0 > \varrho$ oder $r_0 < \varrho$ ist. Die beiden Theilchen entfernen sich also stets von einander, wenn $r = r_0 > \varrho$, und sie nähern sich stets einander, wenn $r = r_0 < \varrho$ ist, welchen Werth auch α_0 haben möge.

14.

Ueber die Schwingungsdauer eines elektrischen Atomen-Paares.

Zwei gleichartige elektrische Theilchen, in einer Entfernung $r_0 < \varrho$ von einander (wo ihre relative Geschwindigkeit $= 0$ ist), bleiben nicht in dieser Entfernung, sondern nähern sich einander von $r = r_0$ bis $r = 0$ mit einer Geschwindigkeit, welche von $u = 0$ bis $u = \sqrt{\left(cc + \frac{r_0 r_0 \alpha_0\alpha_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{r}\right)}$ wächst, d. i. ins Unendliche, wenn die Drehungsgeschwindigkeit α_0 im Augenblicke, wo $r = r_0$, von Null verschieden war. Es ergiebt sich daraus, dass der Zeitraum Θ, in welchem beide Theilchen von $r = r_0$ bis $r = 0$ sich nähern, einen

endlichen Werth hat. Dass im Augenblicke, wo $r = 0$ wird, der Werth der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen

$$\sqrt{\left(cc + \frac{r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0}{\varrho} \cdot \frac{1}{r}\right)} = \pm \infty$$

wird, hat hier nur die Bedeutung, dass diese relative Geschwindigkeit von nun an als eine Entfernungsgeschwindigkeit $= + \infty$ zu setzen ist, während sie bis dahin als Näherungsgeschwindigkeit $= - \infty$ geworden war. Dies vorausgesetzt ergiebt sich leicht, dass die beiden Theilchen in einem zweiten gleich grossen Zeitraume Θ sich von $r = 0$ bis $r = r_0$ wieder von einander entfernen werden. Der Zeitraum 2Θ, in welchem die beiden Theilchen sich von der Entfernung $r = r_0$ bis $r = 0$ einander mit zunehmender Geschwindigkeit nähern und darauf von $r = 0$ bis $r = r_0$ mit abnehmender Geschwindigkeit sich von einander wieder entfernen, kann die Schwingungsdauer des von den beiden elektrischen Theilchen gebildeten Atomen-Paares genannt werden.

Es bleibt hienach noch die Aufgabe, die Schwingungsdauer 2Θ eines solchen Atomen-Paares zu bestimmen.

Diese Schwingungsdauer lässt sich aus der Gleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r_0 + r}{r} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_0}{cc}\right)$$

leicht ableiten, wenn man annimmt, dass r_0 darin nicht grösser als ϱ sei.

Betrachtet man nämlich zuerst den Grenzfall, wo $r_0 = \varrho$ ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$uu = cc + \alpha_0 \alpha_0 + \varrho \alpha_0 \alpha_0 \cdot \frac{1}{r},$$

und hieraus, $u = \frac{dr}{dt}$ gesetzt,

$$dt = -\, dr \sqrt{\frac{r}{\varrho \alpha_0 \alpha_0 + (cc + \alpha_0 \alpha_0) r}}.$$

Durch Integration wird hieraus erhalten

$$\Theta = -\int_{\varrho}^{0} dr \sqrt{\frac{r}{\varrho \alpha_0 \alpha_0 + (cc + \alpha_0 \alpha_0) r}}.$$

Hiernach findet man

$$\Theta = \frac{\varrho}{cc+\alpha_0\alpha_0}\sqrt{(cc+2\alpha_0\alpha_0)} - \frac{\varrho\alpha_0\alpha_0}{(cc+\alpha_0\alpha_0)^{\frac{3}{2}}}\log\left(\sqrt{\left(1+\frac{cc}{\alpha_0\alpha_0}\right)}+\sqrt{\left(2+\frac{cc}{\alpha_0\alpha_0}\right)}\right)$$

oder für kleine Werthe von $\frac{\alpha_0}{c}$

$$\Theta = \frac{\varrho}{c}\left(1 - \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\log\frac{2c}{\alpha_0}\right).$$

Beschränkt man sich sodann auf die Betrachtung kleiner Schwingungen, d. i. solcher, wo $\frac{r_0}{\varrho}$ sehr klein ist, so ergiebt sich aus obiger Gleichung, wenn r_0 und r gegen ϱ darin als verschwindend angenommen werden,

$$uu = \frac{r_0 r_0 \alpha_0\alpha_0}{\varrho}\cdot\frac{1}{r} + cc - \left(\frac{cc}{r_0} + \frac{\alpha_0\alpha_0}{\varrho}\right)r,$$

und hieraus, $u = \frac{dr}{dt}$ gesetzt,

$$cdt = -dr\sqrt{\frac{r}{\frac{r_0 r_0\alpha_0\alpha_0}{\varrho cc} + r - \left(\frac{1}{r_0}+\frac{\alpha_0\alpha_0}{\varrho cc}\right)rr}},$$

was zu einem elliptischen Integrale führt. Für verschwindende Werthe von $\frac{\alpha_0}{c}$ erhält man

$$cdt = -dr\sqrt{\frac{1}{1-\frac{r}{r_0}}},$$

woraus durch Integration folgt

$$\Theta = -\frac{1}{c}\int_{r_0}^{0}\frac{dr}{\sqrt{\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}} = \frac{2r_0}{c}.$$

Wenn, wie vorausgesetzt worden, $r < \varrho$ ist, kann r_0 die Schwingungsamplitude genannt werden, und es ergiebt sich für kleine Werthe von $\frac{\alpha_0}{c}$, dass bei kleinen Schwingungsamplituden die Schwingungsdauer 2Θ eines elektrischen Atomen-Paares der Schwingungsamplitude r_0 proportional ist. Der Faktor aber, womit r_0 zu multipliciren ist, um 2Θ zu erhalten, welcher für kleine Amplituden

constant $= \frac{1}{c}$ ist, nimmt bei grösseren Amplituden ab und wird $= \frac{2}{c}$ für die Amplitude $r = \varrho$.

Setzt man $c = 439450 . 10^6 \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$, so ergiebt sich aus letzterer Bestimmung, dass der Werth von ϱ etwa zwischen $\frac{1}{4000}$ und $\frac{1}{8000}$ Millimeter liegen müsste, wenn diese Schwingungen den Lichtschwingungen an Schnelligkeit gleich sein sollten.

Die Verschiedenheit der elektrischen Theilchen e, e' und ihrer Massen ε, ε' hat bei kleinen Werthen von $\frac{\alpha_0}{c}$ und bei kleinen Amplituden auf die Schwingungen gar keinen Einfluss, bei grösseren Amplituden aber nur insofern, als der Werth von ϱ davon abhängt.

15.

Anwendbarkeit auf chemische Atomengruppen.

Die Unterscheidung zweier oder mehrerer Aggregatzustände der Körper, jenachdem sie aus einfachen Atomen, oder aus Atomenpaaren, oder aus Gruppen von noch mehr als zwei Atomen bestehen, hat in der Chemie grosse Bedeutung erlangt. Es findet bald der eine, bald der andere Aggregatzustand statt, und bei vielen chemischen Processen findet ein Uebergang von dem einen zum andern statt, aber die bei solchen Uebergängen eintretenden Zwischenzustände können nicht beharren, und jene Aggregatzustände stehen daher als beharrliche Zustände von einander ganz isolirt da.

Nun leuchtet ein, dass die Beharrlichkeit einiger Atomenzustände, die als besondere Aggregatzustände unterschieden werden, sowie der Mangel der Beharrlichkeit aller andern Atomenzustände, ihren Grund nur in den Gesetzen der Wechselwirkung der Atome haben könne, d. h. in der Verschiedenheit der Kräfte, welche die Atome auf einander ausüben nach Verschiedenheit der Verhältnisse, unter denen sie sich gegen einander befinden. Der Grund der Beharrlichkeit einiger Atomenzustände und des Mangels dieser Beharrlichkeit bei andern ist in solchen Gesetzen der Wechselwirkung der Atome bisher keineswegs nachgewiesen worden, und es dürfte auch schwerlich gelingen, diesen Grund in solchen Gesetzen

der Wechselwirkung aufzufinden, wie man für ponderabele Atome aufzustellen und anzunehmen bisher versucht hat.

Es liegt daher die Frage nahe, ob der Grund von der Beharrlichkeit gewisser Atomenzustände nicht vielleicht in solchen Gesetzen der Wechselwirkung zu finden sei, wie hier für die elektrischen Theilchen aufgestellt und angenommen worden sind. Es dürften daher auch in dieser Beziehung die in den vorhergehenden Artikeln entwickelten Bewegungen zweier elektrischen Theilchen unter Einfluss der ihnen zugeschriebenen Wechselwirkung von Interesse sein, weil dadurch wirklich ein Grund, worauf die Existenz solcher beharrlicher Aggregatzustände beruhen könne, nachgewiesen worden ist. Und es dürfte hiebei insbesondere zu beachten sein, dass dieselben Kräfte, welche den von einfachen und den von Atomenpaaren gebildeten Aggregatzustand der Elektricität bedingen, möglicherweise auch zwei ebensolche Aggregatzustände ponderabeler Körper bedingen können. Denn bei der allgemeinen Verbreitung der Elektricität darf angenommen werden, dass an jedem ponderabelen Atome ein elektrisches Atom haftet. Haften aber elektrische Atome fest an ponderabelen, so wird in den Verhältnissen der elektrischen Atome nichts geändert als die Massen, welche von den auf die elektrischen Atome wirkenden Kräften zu bewegen sind. Diese Massen sind aber in obiger Entwickelung unbestimmt gelassen und blos mit ε und ε' bezeichnet worden, während die elektrischen Theilchen selbst, denen die Massen ε und ε' angehören, unabhängig von der Kenntniss der Werthe ε und ε', durch die messbaren Grössen e und e' bestimmt worden sind. Nimmt man nun die Werthe von ε und ε' so gross, dass darin die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderabelen Atome mit eingeschlossen sind; so finden alle zunächst blos für elektrische Atome gefundenen Bestimmungen auch auf die mit elektrischen verbundenen ponderabelen Atome Anwendung.

16.

Ueber Aggregatzustand und Schwingung zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen.

Für zwei ungleichartige elektrische Theilchen gelten dieselben Gleichungen, wie für zwei gleichartige, nämlich die Art. 11 gefundenen

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) - 1\right)$$

$$\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{(r - \varrho)^2}\left(\frac{r_0 - \varrho}{r_0} - \left(1 - \frac{3r - 2\varrho}{r^3} \cdot r_0 r_0\right)\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) ,$$

worin $\varrho = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ ist; nur hat ϱ bei ungleichartigen Theilchen einen negativen Werth, weil das Product ee' negativ ist. Hiezu kommt noch die Gleichung $\alpha r = \alpha_0 r_0$ (weil nämlich nur solche Bewegungen betrachtet werden, welche zwei elektrische Theilchen unter blossem Einfluss ihrer eigenen Wechselwirkung machen), woraus endlich noch die Gleichung folgt

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\varrho cc}{ee'} \cdot \frac{dV}{dr} + \frac{r_0 r_0 \alpha_0\alpha_0}{r^3} .$$

Hieraus ergiebt sich ebenso wie bei zwei gleichartigen elektrischen Theilchen, dass,

$$\text{für } r = r_0,\ \frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r_0(r_0 - \varrho)}\left(1 + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\frac{cc}{r_0 - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + 2\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right) ,$$

und dass, wenn zugleich $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$ (was jetzt einen reellen Werth hat, weil $-\varrho = -2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{ee'}{cc}$ für ungleichartige Theilchen positiv ist), $\frac{du}{dt} = 0$ wird, wonach also beide Theilchen, wenn $r = r_0$ und $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$ ist, bei ihrer Drehung um einander in stets gleicher Entfernung r_0 bleiben, ein Fall, der bei zwei gleichartigen Theilchen gar nicht vorkommen konnte.

Es ergiebt sich aber ferner aus der Gleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r}\,\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}\right),$$

oder, wenn der constante Werth $-\frac{r_0 r_0 \alpha_0 \alpha_0}{\varrho cc} = n$ gesetzt wird, aus folgender Gleichung

$$-\frac{r-\varrho}{\varrho}\cdot\frac{uu}{cc} = \left(\frac{r}{r_0} - 1\right)\cdot\left(n\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r}\right) - 1\right),$$

dass ausser dem Werthe $r = r_0$, für welchen $u = 0$ gegeben ist, im Allgemeinen noch ein anderer Werth von $r = \frac{nr_0}{r_0 - n}$ vorhanden ist, für welchen ebenfalls $u = 0$ ist.

Diese beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, sind aber, nach dem Werthe von n, bald mehr, bald weniger von einander verschieden, und fallen für $n = \frac{r_0}{2}$, d. i. für $\alpha_0 = \sqrt{-\frac{\varrho cc}{2r_0}}$, ganz zusammen, und nur dann, wenn die beiden Werthe von r, für welche $u = 0$ ist, so zusammenfallen, tritt der vorher erwähnte Fall ein, dass zugleich $u = 0$ und $\frac{du}{dt} = 0$ sind, folglich beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben.

In allen übrigen Fällen, wenn z. B. für $r = 2n - x$ (wo $x < n$ sei) die Geschwindigkeit $u = 0$ ist, giebt es noch einen zweiten Werth von $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, für den ebenfalls die Geschwindigkeit $u = 0$ ist. $\frac{du}{dt}$ hat alsdann für $r = 2n - x$ einen positiven Werth, nimmt aber ab und wird $= 0$ zwischen $r = 2n - x$ und $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, so dass, für $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, $\frac{du}{dt}$ einen negativen Werth hat. Man ersieht hieraus, dass Abstossung der beiden Theilchen statt findet von $r = 2n - x$ bis zu demjenigen Werthe von r, für welchen $\frac{du}{dt} = 0$ ist, und Anziehung von da an bis zu $r = 2n + \frac{nx}{n-x}$, wonach beide Theilchen immer in schwingender Bewegung gegen einander innerhalb der angegebenen Grenzen bleiben müssen.

17.

Ueber Ampèresche Molecularströme.

Der eben beschriebene moleculare Aggregatzustand zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen, bei welchem nämlich die Entfernung der beiden Theilchen abwechselnd zunimmt und wieder abnimmt, zwischen genau bestimmten Grenzen, und die Bahn, in welcher das eine Theilchen um das andere sich bewegt, an diesen beiden Grenzen in eine Kreisbahn übergeht, verdient besonders in solchen Fällen nähere Beachtung, wo das eine Theilchen als ruhend und blos das andere Theilchen als in Kreisbewegung um ersteres befindlich betrachtet werden darf.

Das Verhältniss beider Theilchen in Beziehung auf Theilnahme an der Bewegung hängt von dem Verhältniss ihrer Massen ε und ε' ab, wobei nach Art. 15 in den Werthen von ε und ε' die Massen der an den elektrischen Atomen haftenden ponderabelen Atome mit eingeschlossen werden müssen. Es sei e das positiv elektrische Theilchen; das negative sei demselben entgegengesetzt gleich und werde daher mit $-e$ (statt mit e') bezeichnet. Nur an diesem letztern hafte ein ponderabeles Atom, wodurch seine Masse so vergrössert werde, dass die Masse des positiven Theilchens dagegen als verschwindend betrachtet werden dürfe. Das Theilchen $-e$ wird dann als ruhend, und blos das Theilchen $+e$ als in Bewegung um das Theilchen $-e$ herum befindlich betrachtet werden können.

Es stellen alsdann die beiden ungleichartigen, in dem beschriebenen molecularen Aggregatzustande befindlichen Theilchen einen Ampèreschen Molecularstrom dar; denn es lässt sich zeigen, dass sie den Annahmen ganz entsprechen, welche Ampère von den Molecularströmen gemacht hat.

Um dies zu zeigen, werde der Ausdruck der Kraft entwickelt, welchen das bewegte Theilchen e auf irgend ein gegebenes Stromelement ausübt. Man bezeichne mit ds' die Länge des gegebenen Stromelements, ferner mit $+e'ds'$ die positive und mit $-e'ds'$ die negative Elektricität, die es enthält; endlich mit u' die Geschwindigkeit des positiven Theilchens $+e'ds'$ und mit $-u'$ die Geschwindigkeit des negativen Theilchens $-e'ds'$. Sodann bezeichne

r den Abstand des Stromelements vom Theilchen e, u die Geschwindigkeit des Theilchens e; x, y, z die Coordinaten des Theilchens e; x', y', z' die Coordinaten des Stromelements; Θ und Θ' die Winkel der Richtungen von u und u' mit r; ε den Winkel der Richtung von u mit der Richtung von u'.

Man transformire sodann den allgemeinen Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' beim Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

auf folgende Weise (siehe Beer, Einleitung in die Elektrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Elektrodynamik S. 251). Man differentiire nämlich die Gleichung

$$rr = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

in Beziehung auf die Zeit t; so erhält man

$$r\frac{dr}{dt} = (x-x')\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right) + (y-y')\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right) + (z-z')\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right) ,$$

oder auch

$$r\frac{dr}{dt} = r(u\cos\Theta - u'\cos\Theta') .$$

Durch nochmalige Differentiirung erhält man

$$\frac{dr^2}{dt^2} + r\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2$$

$$+ (x-x')\left(\frac{ddx}{dt^2}-\frac{ddx'}{dt^2}\right) + (y-y')\left(\frac{ddy}{dt^2}-\frac{ddy'}{dt^2}\right) + (z-z')\left(\frac{ddz}{dt^2}-\frac{ddz'}{dt^2}\right)$$

worin

$$\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2 = u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon .$$

Bezeichnet man nun die Beschleunigung des einen Theilchens, deren Componenten $\frac{ddx}{dt^2}$, $\frac{ddy}{dt^2}$, $\frac{ddz}{dt^2}$ sind, mit N, und mit ν den Winkel ihrer Richtung mit r, und auf gleiche Weise die Beschleunigung des andern Theilchens, deren Componenten $\frac{ddx'}{dt^2}$, $\frac{ddy'}{dt^2}$, $\frac{ddz'}{dt^2}$ sind, mit N', und mit ν' den Winkel ihrer Richtung mit r, so ergiebt sich

$$\frac{x-x'}{r}\left(\frac{ddx}{dt^2}-\frac{ddx'}{dt^2}\right) + \frac{y-y'}{r}\left(\frac{ddy}{dt^2}-\frac{ddy'}{dt^2}\right) + \frac{z-z'}{r}\left(\frac{ddz}{dt^2}-\frac{ddz'}{dt^2}\right) = N\cos\nu - N'\cos\nu' .$$

Durch Substitution dieser Werthe erhält man

$$2\frac{dr^2}{dt^2} + 2r\frac{ddr}{dt^2} = 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) + 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu')$$

$$3\frac{dr^2}{dt^2} = 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2 .$$

Die letztere Gleichung von der ersteren subtrahirt, giebt

$$-\frac{dr^2}{dt^2} + 2r\frac{ddr}{dt^2} = 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2$$
$$+ 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') ,$$

woraus der allgemeine Ausdruck der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen e und e' im Abstande r, nämlich

$$\frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc}\frac{ddr}{dt^2}\right)$$

transformirt sich ergiebt, nämlich

$$= \frac{ee'}{ccrr}(cc + 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2$$
$$+ 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') .$$

Setzt man nun hierin für das Theilchen e' die positive Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $+ e'ds'$, so erhält man die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{ccrr}(cc + 2(u^2 + u'^2 - 2uu'\cos\varepsilon) - 3(u\cos\Theta - u'\cos\Theta')^2$$
$$+ 2r(N\cos\nu - N'\cos\nu') ;$$

setzt man aber für das Theilchen e' die negative Elektricität im gegebenen Stromelemente, nämlich $- e'ds'$, so erhält man, weil alsdann $\varepsilon + \pi$, $\Theta' + \pi$ und $\nu' + \pi$ an die Stelle von ε, Θ' und ν' tritt, die Abstossungskraft

$$\frac{ee'ds'}{ccrr}(- cc - 2(u^2 + u'^2 + 2uu'\cos\varepsilon) + 3(u\cos\Theta + u'\cos\Theta')^2$$
$$- 2r(N\cos\nu + N'\cos\nu') ;$$

folglich zusammen, die Abstossungskraft des bewegten Theilchens e auf das ganze Stromelement,

$$\frac{4ee'ds'}{ccrr}(3uu'\cos\Theta\cos\Theta' - 2uu'\cos\varepsilon - rN'\cos\nu') .$$

Die Abstossungskraft des ruhenden Theilchens $-e$ auf das ganze Stromelement dagegen, wo $u = 0$ zu setzen, ist

$$= + \frac{4ee'ds'}{ccrr} \cdot rN' \cos \nu' \; ,$$

wenn r hierin den Abstand des ruhenden Theilchens $-e$ von dem gegebenen Stromelemente bezeichnet. Der Unterschied dieses letzteren Werthes von r von dem früheren (nämlich von dem Abstande des in Bewegung um $-e$ herum befindlichen Theilchens $+e$ von dem gegebenen Stromelemente) darf aber als verschwindend kleiner Bruchtheil von r betrachtet werden, und es ergiebt sich alsdann die Abstossungskraft des bewegten Theilchens $+e$ und des ruhenden $-e$ zusammen auf das Stromelement

$$= \frac{4ee'ds'}{ccrr} (3 \cos \Theta \cos \Theta' - 2 \cos \varepsilon) \cdot uu' \; .$$

Wollte man an die Stelle des bewegten elektrischen Theilchens $+e$ ein zweites Stromelement setzen, dessen positive, mit der Geschwindigkeit $+\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $+eds$, und dessen negative, mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{2}u$ bewegte, Elektricität mit $-eds$ bezeichnet werde; so erhält man die Abstossungskraft dieser beiden Stromelemente auf einander

$$= \frac{4eds \cdot e'ds'}{ccrr} (3 \cos \Theta \cos \Theta' - 2 \cos \varepsilon') \cdot uu' \; ,$$

d. i die nämliche Abstossungskraft wie vorher, wenn das vorher mit $+e$ bezeichnete (mit der Geschwindigkeit u bewegte) elektrische Theilchen der im zweiten Stromelemente enthaltenen mit $+eds$ bezeichneten (mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}u$ bewegten) positiven Elektricität gleich gesetzt wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass die Kreisbewegung des elektrischen Theilchens $+e$ um das ruhende Theilchen $-e$ einen kreisförmigen elektrischen Doppelstrom vertritt, wenn die in letzterem enthaltene positive Elektricität $= +e$ ist und sich mit der halben Geschwindigkeit in ihrer Kreisbahn bewegt, wie jenes elektrische Theilchen $+e$, und wenn die in demselben Strome enthaltene negative Elektricität $= -e$ ist und sich mit derselben Geschwindigkeit wie die positive in entgegengesetzter Richtung bewegt.

Man ersieht hieraus, dass ein elektrisches Theilchen $+e$, wenn

es in Kreisbewegung um das elektrische Theilchen — e sich befindet, auf alle galvanischen Ströme dieselben Wirkungen ausübt, welche Ampère von seinen Molecularströmen angenommen hat.

Die von Ampère angenommenen Molecularströme unterscheiden sich aber von allen andern galvanischen Strömen wesentlich dadurch, dass sie, nach Ampères Annahme, ohne elektromotorische Kraft beharren, während alle andern galvanischen Ströme, dem Ohmschen Gesetze gemäss, der elektromotorischen Kraft proportional sind, also mit der elektromotorischen Kraft zugleich verschwinden. Es leuchtet nun aber ein, dass obiges elektrisches Theilchen + e seine Kreisbewegung um das elektrische Theilchen — e, ohne elektromotorische Kraft, von selbst immer fortsetzt, und also auch in dieser Beziehung der Ampèreschen Annahme vom Molecularstrome ganz entspricht.

Man erhält also auf diese Weise eine einfache Construction der von Ampère, ohne Beweis von ihrer Möglichkeit, angenommenen Molecularströme, begründet auf die Gesetze des molecularen Aggregatzustandes zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen, wie sie im vorigen Artikel gefunden worden.

18.

Bewegungen zweier ungleichartigen elektrischen Theilchen im Raume, unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft.

Bezeichnet $\pi + v$ den Winkel, welchen die Richtung der elektrischen Scheidungskraft mit r bildet, und bezeichnet a die Grösse der von der Scheidungskraft abhängigen relativen Beschleunigung beider Theilchen; so sind $-a \cos v$ und $a \sin v$ die Componenten von a, von denen erstere den von der Scheidungskraft abhängigen Theil der relativen Beschleunigung $\frac{du}{dt}$, letztere den von der Scheidungskraft abhängigen Theil von $\frac{d\alpha}{dt}$ ausdrückt, wenn α den Unterschied der Geschwindigkeiten bezeichnet, mit denen die beiden Theilchen in einer gegen r senkrechten Richtung sich bewegen. — Vorausgesetzt wird, dass die Richtung der Scheidungskraft in der Ebene liegt, in welcher die beiden Theilchen sich um einander drehen. —

Bringt man nun die erstere Componente, nämlich $-a\cos v$, als den von der Scheidungskraft abhängigen Theil von $\frac{du}{dt}$, und ferner $\frac{\alpha\alpha}{r}$, als den von der Geschwindigkeit α abhängigen Theil von $\frac{du}{dt}$, in Abrechnung von dem ganzen Werthe der Beschleunigung $\frac{du}{dt}$; so ergiebt die Differenz $\left(\frac{du}{dt}+a\cos v-\frac{\alpha\alpha}{r}\right)$ denjenigen Theil der relativen Beschleunigung, der von der Kraft herrührt, welche die beiden Theilchen e und e' auf einander ausüben, nämlich $\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}=\frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'}\cdot\frac{dV}{dr}$, wonach folgende Gleichung erhalten wird:

$$\frac{du}{dt}+a\cos v-\frac{\alpha\alpha}{r}=\frac{\varrho}{2}\frac{cc}{ee'}\cdot\frac{dV}{dr}\ .$$

Bringt man die letztere Componente, nämlich $a\sin v$, als den von der Scheidungskraft abhängigen Theil der Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$, von dem ganzen Werthe $\frac{d\alpha}{dt}$ in Abrechnung, so giebt die Differenz $\left(\frac{d\alpha}{dt}-a\sin v\right)$ denjenigen Theil von der ganzen Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$, der von der vorhandenen Bewegung unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Kräfte herrührt. Unter blosser Einwirkung der von beiden Theilchen auf einander ausgeübten Anziehungs- oder Abstossungskräfte würde aber das in einem gegebenen Zeitelemente dt beschriebene Flächenelement $\alpha r dt$ einen constanten Werth haben oder es würde $\alpha\frac{dr}{dt}+r\frac{d\alpha}{dt}=0$ sein; folglich der hieraus sich ergebende Theil der Beschleunigung $\frac{d\alpha}{dt}$

$$=-\frac{\alpha}{r}\frac{dr}{dt}\ .$$

Durch Gleichsetzung dieses Theiles mit obiger Differenz erhält man die Gleichung

$$\frac{d\alpha}{dt}-a\sin v=-\frac{\alpha}{r}\frac{dr}{dt}\ .$$

Hiezu kommt endlich noch, wie von selbst einleuchtet, die dritte Gleichung, nämlich

$$dv=\frac{\alpha dt}{r}\ .$$

Man hat hiernach für die 4 veränderlichen Grössen r, u, α, v folgende 3 Gleichungen:

$$a\cos v - \frac{\alpha\alpha}{r} = \frac{\varrho cc}{2ee'}\cdot\frac{dV}{dr} - \frac{du}{dt} \tag{1}$$

$$a\sin v - \frac{\alpha dr}{rdt} = \frac{d\alpha}{dt} \tag{2}$$

$$dv = \frac{\alpha dt}{r} \tag{3}$$

Multiplicirt man Gleichung (1) mit $dr = udt$, und Gleichung (2) mit $rdv = \alpha dt$, so erhält man

$$a\cos v\,.\,dr - \frac{\alpha\alpha dr}{r} = \frac{\varrho cc}{2ee'}\cdot\frac{dV}{dr}dr - udu \tag{4}$$

$$ar\sin v\,.\,dv - \frac{\alpha\alpha dr}{r} = \alpha d\alpha\ . \tag{5}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen giebt

$$a\,.\,d(r\cos v) = \frac{\varrho cc}{2ee'}\cdot\frac{dV}{dr}dr - \alpha d\alpha - udu\ . \tag{6}$$

Ferner erhält man aus (2) und (3)

$$-\,2ar^3.\,d(\cos v) = d(\alpha^2 r^2)\ . \tag{7}$$

Durch Integration der Differentialgleichung (6) erhält man, nachdem man mit 2 multiplicirt und $V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right)$ gesetzt hat,

$$2ar\cos v = \frac{\varrho cc}{r}\left(\frac{uu}{cc} - 1\right) - \alpha\alpha - uu + \text{Const.} \tag{8}$$

und hieraus, weil $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$ und $\cos v = -1$ für $u = 0$ ist,

$$-\,2ar_0 = -\frac{\varrho cc}{r_0} - \alpha_0\alpha_0 + \text{Const.} \tag{9}$$

Die Differenz von (8) und (9) giebt dann

$$2ar\cos v + 2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)uu + \varrho cc\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) - \alpha\alpha + \alpha_0\alpha_0\ . \tag{10}$$

Durch Integration der Differentialgleichung (7) erhält man, nachdem man mit r^3 dividirt hat,

$$-\,2a\cos v = \frac{\alpha\alpha}{r} + 3\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr}$$

oder mit r multiplicirt

$$-\,2ar\cos v = \alpha\alpha + 3r\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr}\ , \tag{11}$$

wonach die Summe von (10 und (11)

$$2ar_0 = \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)uu + \varrho cc\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \alpha_0\alpha_0 + 3r\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr}\ ;$$

und also

$$uu = \frac{1}{r-\varrho}\left(\varrho cc\left(\frac{r}{r_0} - 1\right) + r\alpha_0\alpha_0 + 3rr\int\frac{\alpha\alpha dr}{rr} - 2ar_0 r\right)\ . \quad (12)$$

Aus Gleichung (3) ergiebt sich ferner, weil $dr = udt$ ist,

$$dv = \frac{\alpha}{u}\frac{dr}{r}\ , \quad (13)$$

und da nach Gleichung (7)

$$d(\cos v) = -\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3}$$

und nach Gleichung (11)

$$\cos v = -\frac{1}{2a}\left(\frac{\alpha\alpha}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)\ ;$$

so ergiebt sich durch Substitution dieser Werthe in die identische Gleichung

$$dv = -\frac{d(\cos v)}{\sqrt{(1 - \cos v^2)}}\ ,$$

nach Gleichung (13)

$$\frac{\alpha}{u}\frac{dr}{r} = \frac{\frac{d(\alpha^2 r^2)}{2ar^3}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{4a^2}\left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2\right)}}$$

und hieraus und aus (12)

$$uu = \left(\frac{\alpha r^2 dr}{d(\alpha^2 r^2)}\right)^2 \cdot \left(4a^2 - \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{r-\varrho}\left(\frac{r-r_0}{r_0}\varrho c^2 + r(\alpha_0{}^2 - 2ar_0) + \varrho r^2\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right) \quad (14)$$

oder folgende Gleichung für die zwei Veränderlichen r und α:

$$4a^2 = \left(\frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right)^2 + \frac{4}{r-\varrho}\left(\frac{d(\alpha r)}{dr}\right)^2 \cdot \left(\frac{r-r_0}{r_0} \cdot \frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0{}^2 - 2ar_0}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\right) {}^{*)} \quad (15)$$

---

*) Verschwindet die Scheidungskraft a, so soll nach Art. 11 αr einen constanten Werth annehmen. Für einen constanten Werth von αr und für $a = 0$ reducirt sich aber Gleichung (15) auf

Beschränkt man sich nun auf kleine Werthe von a, für welche αr zwar nicht, wie für $a = 0$ nach Art. 11, constant ist, aber doch nur wenig von einem constanten Werthe $\alpha_0 r_0 = n$ abweicht, so kann

$$\alpha r = n\,(1 + \varepsilon) \tag{16}$$

gesetzt werden, wo ε stets einen sehr kleinen Werth hat. Es folgt dann hieraus

$$\frac{\alpha^2}{r} = (1 + 2\varepsilon)\frac{n^2}{r^3} \tag{17}$$

$$\frac{d(\alpha r)}{dr} = n\frac{d\varepsilon}{dr}\,. \tag{18}$$

Ferner folgt aus (11) und (17)

$$\int\frac{d\varepsilon}{r^3} = -\frac{a}{n^2}\cos v$$

oder

$$d\varepsilon = \frac{a}{n^2}r^3\sin v\,dv\,, \tag{19}$$

aus (18) und (19)

$$\frac{d(\alpha r)}{dr} = \frac{a}{n}r^3\sin v\,.\,\frac{dv}{dr} \tag{20}$$

und aus (17) und (19)

$$\frac{\alpha^2}{r} = \frac{n^2}{r^3} + \frac{2a}{r^3}\int r^3\sin v\,dv\,. \tag{21}$$

Substituirt man nun die Werthe von $\frac{d(\alpha r)}{dr}$ und $\frac{\alpha^2}{r}$ aus (20) und (21) in folgender aus (11) und (15) sich ergebenden Gleichung, nämlich

$$a^2\sin v^2 = \frac{1}{r-\varrho}\cdot\left(\frac{d(\alpha r)}{dr}\right)^2\cdot\left(\frac{r-r_0}{r_0}\cdot\frac{\varrho c^2}{r^2} + \frac{\alpha_0^2-2\alpha r_0}{r} - \frac{\alpha^2}{r} - 2a\cos v\right)\,, \tag{22}$$

so erhält man, wenn für n wieder sein Werth $\alpha_0 r_0$ gesetzt wird, folgende Gleichung zwischen r und v, nämlich

---

$$0 = \frac{\alpha^2}{r} + 3\int\frac{\alpha^2 dr}{r^2}\,,$$

was mit dem constanten Werthe $\alpha^2 r^2$ dividirt die identische Gleichung

$$0 = \frac{1}{r^3} + 3\int\frac{dr}{r^4}$$

giebt, in Uebereinstimmung mit Art. 11.

$$\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^4 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2}\right) - \frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r + \frac{3}{r}\int r^2 \cos v\, dr\right).^{*)} \quad (23)$$

Durch Differentiation dieser Gleichung, nachdem sie mit $r(r-\varrho)$ multiplicirt worden, erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2}\right) = \frac{\varrho r}{r_0} + (r+r_0)\frac{\alpha_0^2}{c^2} + (r-r_0)\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)$$
$$- \frac{2a}{c^2}(2r_0 r + 3r^2 \cos v) \ .$$

Setzt man hierin, um einen speciellen Fall zu betrachten,

$$\varrho = -\frac{2r_0}{cc}(\alpha_0^2 + ar_0) \ ,$$

d. i. der Fall, in welchem für $a = 0$ nach Art. 16 beide Theilchen bei ihrer Drehung um einander in gleicher Entfernung bleiben, so erhält man

$$\frac{d}{dr}\left((r-\varrho)\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{r^3 c^2} \cdot \frac{dr^2}{dv^2}\right) = -\frac{2(r-r_0)}{cc}(\alpha_0^2 + ar_0) - \frac{6ar}{cc}(r_0 + r \cos v) \ ,$$

dessen Werth $= 0$ ist, e r s t e n s, wenn $u = 0$ und folglich $r = r_0$, $\alpha = \alpha_0$ und $\cos v = -1$ ist; z w e i t e n s, wenn $r_0 - r = \frac{3ar(r_0 + r\cos v)}{\alpha_0^2 + ar_0}$ ist, ein Fall, welcher für kleine Werthe von a eintritt, wenn $\cos v = +1$, und alsdann näherungsweise $r = r_0 - 6\frac{ar_0^2}{\alpha_0^2}$ wird.

Es ergiebt sich hieraus, dass, so wie o h n e S c h e i d u n g s k r a f t nach Art. 16 von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche $\varrho = -2r_0\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc}$ war, das eine um das andere in einer Kreisbahn sich bewegen konnte, so auch m i t S c h e i d u n g s k r a f t $(=a)$ von zwei ungleichartigen elektrischen Theilchen, für welche

---

*) Aus obiger Gleichung erhält man, da für $\frac{dr}{dv}$ auch $\frac{r}{\alpha}u$ gesetzt werden kann,

$$\frac{\alpha_0^2 r_0^2}{\alpha^2 r^2} \cdot \frac{uu}{cc} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2}\right) - \frac{2a}{(r-\varrho)c^2}\left(r_0 r + \frac{3}{r}\int r^2 \cos v\, dr\right) \ ,$$

was, wenn die Scheidungskraft a verschwindet und also nach Art. 11 $\alpha r = \alpha_0 r_0$ wird, in die Gleichung

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r+r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0^2}{c^2}\right)$$

übergeht, d. i. dieselbe Gleichung, welche für diesen Fall Art. 11 schon gefunden worden ist.

$\varrho = -2r_0\left(\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} + ar_0\right)$ ist, das eine um das andere in einer geschlossenen Bahn sich bewegen könne, die jedoch keine Kreisbahn ist. Der Abstand der beiden Theilchen von einander ist nämlich verschieden, jenachdem das bewegte Theilchen von dem Centraltheilchen aus gerechnet in der Richtung der Scheidungskraft vorwärts oder rückwärts liegt, nämlich in letzterem Falle $= r_0$, im ersteren $= r_0 - 6\frac{r_0r_0}{\alpha_0\alpha_0}a$.

Man kann eine solche excentrische Lage des einen Theilchens im Flächenraume der um dieses Theilchen vom andern beschriebenen Bahn (unter Einwirkung einer Scheidungskraft) mit einer Scheidung ruhender elektrischer Fluida unter Einwirkung einer gleichen Scheidungskraft vergleichen, wobei jedoch der merkwürdige Unterschied hervortritt, dass jene Scheidung im umgekehrten Sinne statt findet wie diese.

Es geht daraus hervor, dass in allen Conductoren, welche unter Einwirkung von elektrischen Scheidungskräften auf bekannte Weise geladen werden, die Elektricität nicht blos im Aggregatzustande von Ampèreschen Molecularströmen enthalten sein kann, weil sonst die von der Scheidungskraft hervorgebrachte Scheidung im entgegengesetzten Sinne, als es wirklich der Fall ist, stattfinden müsste. Wäre auch alle Elektricität in einem solchen Conductor, ehe die Scheidungskraft zu wirken begann, im Aggregatzustande von Ampèreschen Molecularströmen vorhanden gewesen; so müssten doch unter diesen Molecularströmen solche gewesen sein, welche unter dem Einfluss der Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten (indem die beiden Theilchen fortführen sich in geschlossener Bahn um einander zu drehen), sondern aufgelöst würden, indem die beiden Theilchen sich immer weiter von einander entfernten, bis sie zu den Grenzen des Conductors gelangten. Unter dem Einfluss der Scheidungskraft würden die positiven und negativen Theilchen der aufgelösten Molecularströme nur bei einer gewissen Vertheilung an der Oberfläche des Conductors in Ruhe verharren können; beim Aufhören der Scheidungskraft würden sie aber wieder in Bewegung gerathen, so lange, bis sie sich paarweise wieder zu Ampèreschen Molecularströmen vereinigt hätten.

19.

Elektrische Ströme in Conductoren.

Wäre in Conductoren alle Elektricität, ehe eine Scheidungskraft zu wirken beginnt, im Aggregatzustande Ampère scher Molecularströme enthalten, die aber unter dem Einfluss einer Scheidungskraft nicht fortbestehen könnten, sondern aufgelöst würden, indem die beiden um einander sich drehenden ungleichartigen elektrischen Theilchen sich von einander immer weiter entfernten, bis endlich ihre Bahnen asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich näherten; so würden, bevor die sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen zu den Grenzen des Conductors gelangten, Begegnungen stattfinden zwischen den von verschiedenen Molecularströmen kommenden ungleichartigen elektrischen Theilchen, die dann mit einander neue Molecularströme bildeten. Diese neu gebildeten Molecularströme würden sodann auch wieder aufgelöst werden und die Bahnen der sich immer weiter von einander entfernenden Theilchen würden wieder asymptotisch der Richtung der Scheidungskraft sich nähern u. s. f.

Hierdurch entstünde eine elektrische Strömung im Conductor in der Richtung der Scheidungskraft. Hätte der Conductor die Gestalt eines gleichförmigen Ringes und hätte die Scheidungskraft in jedem einzelnen Längenelemente des Ringes bei gleicher Grösse die Richtung des Elements; so würde im Ringe ein constanter Kreisstrom gebildet werden, und es würden die im vorigen Artikel entwickelten Bewegungsgesetze elektrischer Theilchen unter Einfluss einer elektrischen Scheidungskraft die Grundlage der Theorie dieser constanten elektrischen Ströme in geschlossenen Conductoren bilden.

Hiebei leuchtet ein, dass während dieser Strömung von jedem Theilchen, indem es unter Einwirkung der Scheidungskraft in Richtung der Scheidungskraft fortrückt, Arbeit verrichtet wird. Und da alle andern Kräfte, die auf ein solches Theilchen im Conductor wirken, summarisch einander das Gleichgewicht halten; so tritt jene Arbeit als äquivalente Zunahme an lebendiger Kraft des Theilchens hervor, woraus folgt, dass die lebendige Kraft aller im Conductor enthaltenen Ampèreschen Molecularströme, während der

Strom durch den Conductor geht, wächst, nämlich das Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Theilchen in den Ampèreschen Molecularströmen sich um einander drehen, proportional der Scheidungskraft (elektromotorischen Kraft) und proportional dem in der Richtung der Scheidungskraft zurückgelegten Wege (der Stromintensität). Wird das Verhältniss der elektromotorischen Kraft zur Stromintensität mit dem Namen Widerstand bezeichnet, so kann dafür gesetzt werden, die lebendige Kraft aller im Conductor enthaltenen Molecularströme wachse, während der Strom durch den Conductor geht, proportional dem Widerstande und proportional dem Quadrate der Stromintensität.

Dieses Wachsthum der Bewegungsenergie der in einem Conductor enthaltenen elektrischen Theilchen, während ein Strom durch den Conductor geht, ergiebt sich also als eine nothwendige Folge von der Einwirkung der elektromotorischen Kraft auf die Theilchen, während diese Theilchen in Folge des Stroms in der Richtung dieser Kraft fortrücken.

Diese theoretische Folgerung wird nun durch die Erfahrung zwar nicht auf directem, aber doch auf indirectem Wege bestätigt, nämlich dadurch, dass ein Wachsthum der Wärmeenergie im Conductor, während ein Strom durch den Conductor geht, beobachtet wird. Und dieses beobachtete Wachsthum der Wärmeenergie im Conductor ist jenem berechneten Wachsthum der Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen in den Ampèreschen Molecularströmen des Conductors gleich.

Nun ist die Wärmeenergie eines Körpers eine Bewegungsenergie, welche von Bewegungen im Innern des Körpers herrührt, die sich der directen Beobachtung entziehen. Ebenso ist die den elektrischen Theilchen der Ampèreschen Molecularströme in einem Conductor angehörige Bewegungsenergie eine Bewegungsenergie, welche von Bewegungen im Innern des Conductors herrührt, die sich der directen Beobachtung entziehen.

Trotz dieser Uebereinstimmung wäre es möglich, dass jene Wärmeenergie eines Körpers und diese Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen der in demselben Körper enthaltenen Ampèreschen Molecularströme ihrem Wesen nach ganz verschieden wären. Denn es wäre möglich, dass jene Wärmeenergie eine Bewegungs-

energie wäre, welche von Bewegungen ganz anderer Theilchen als elektrischen herrührte, und die Bewegungen dieser andern Theilchen könnten ganz anderer Art sein wie die in den Ampèreschen Strömen.

Zur Erklärung der Identität des oben bestimmten Wachsthums der Energie in den Ampèreschen Molecularströmen mit dem aus der Beobachtung gefundenen Wachsthum der Wärmeenergie würde dann nach dem Principe der Erhaltung der Energie schlechterdings nothwendig sein, dass eine Uebertragung der Bewegungsenergie von den elektrischen Theilchen in den Ampèreschen Strömen auf die andern Theilchen, deren Bewegung das Wesen der Wärmeenergie mache, statt fände. Und zwar müsste alle durch den Strom in den elektrischen Theilchen der Ampèreschen Ströme erzeugte Bewegungsenergie auf diese andern Theilchen in jedem Augenblicke total übertragen werden.

Abgesehen davon, dass von einer solchen totalen Uebertragung Rechenschaft zu geben nicht möglich ist, leuchtet von selbst ein, dass eine jede auch nur partielle Uebertragung von Bewegungsenergie Ampèrescher Molecularströme auf andere Theilchen in Widerspruch stehen würde mit der allen Ampèreschen Strömen ihrem Wesen nach zukommenden Beharrlichkeit. Fände zwischen elektrischen Theilchen in Molecularströmen eine solche Uebertragung von Bewegungsenergie auf andere Theilchen wirklich statt, so würde daraus einfach blos folgen, dass die von jenen Theilchen gebildeten Molecularströme keine Ampèreschen Molecularströme wären, weil ihnen keine Beharrlichkeit zukäme, worin das Wesen der Ampèreschen Molecularströme besteht.

Es ergiebt sich hieraus also die Folgerung, dass, wenn in den Conductoren alle elektrischen Theilchen im Aggregatzustande Ampèrescher Molecularströme sich befinden, das beobachtete Wachsthum der Wärmeenergie eines Conductors, während ein Strom durch ihn hindurchgeht, unmittelbar von dem Wachsthume der Bewegungsenergie der elektrischen Theilchen, welche die Ampèreschen Ströme bilden, herrührt, d. h. dass die dem Conductor durch den Strom ertheilte Wärmeenergie eine Bewegungsenergie ist, welche von Bewegungen im Innern des Conductors herrührt, und zwar von Bewegungen, die in einer Verstärkung der von den

elektrischen Theilchen im Conductor gebildeten Ampèreschen Molecularströme besteht.

Man sehe über diese Identität von Wärmeenergie und Bewegungsenergie Ampèrescher Molecularströme, was »Ueber die Umsetzung der Stromarbeit in Wärme« im 10. Bande der Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen (1862) im 33. Artikel der Abhandlung »Zur Galvanometrie« gesagt worden ist.

20.

Ueber Thermomagnetismus.

An die Voraussetzung der vorhergehenden Artikel, dass die Elektricität in Conductoren im Aggregatzustande Ampèrescher Molecularströme sich befinde, und an die daraus folgende Identität der Wärmeenergie des Conductors mit der Bewegungsenergie der Ampèreschen Ströme im Conductor, knüpft sich leicht noch die Bemerkung an, dass Temperaturgleichheit zweier Conductoren hiernach zwar auf gewissen Verhältnissen in Stärke und Beschaffenheit der Ampèreschen Ströme in beiden Conductoren beruhen müsse; dass aber bei diesen zur Temperaturgleichheit erforderlichen Verhältnissen in den Strömen beider Conductoren noch folgende Verschiedenheit statt finden könne. Es kann nämlich in den Ampèreschen Strömen des einen Conductors grössere Masse von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit, in denen des andern Conductors kleinere Masse von Elektricität mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen.

Denkt man sich nun einen Ring aus zwei solchen verschiedenartigen Conductoren gebildet, durch welchen ein constanter Strom geht, so dass durch alle Querschnitte des Rings in gleicher Zeit gleich viel Elektricität strömt; so leuchtet ein, dass auch durch die beiden Querschnitte, welche die erste Schicht des zweiten Conductors begrenzen, gleich viel Elektricität gehen müsse. Die durch den ersten Querschnitt gehende Elektricität kommt aber aus dem ersten Conductor, wo in den Molecularströmen grössere Masse von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit sich bewegt. Wegen dieser geringeren Geschwindigkeit kommt also dieser in die

erste Schicht des zweiten Conductors eindringenden Elektricität eine geringere lebendige Kraft zu. — Die durch den zweiten Querschnitt gehende Elektricität kommt aus der betrachteten ersten Schicht des zweiten Conductors selbst, wo in den Ampèreschen Strömen kleinere Masse von Elektricität sich mit grösserer Geschwindigkeit bewegt, und es kommt ihr also wegen dieser grösseren Geschwindigkeit eine grössere lebendige Kraft zu. Es ergiebt sich hieraus, dass in Folge des Stroms diese erste Schicht des zweiten Conductors mehr lebendige Kraft an die folgende Schicht des zweiten Conductors abgiebt als sie von der letzten Schicht des ersten Conductors empfängt, dass also eine Abnahme an Bewegungsenergie in den Ampèreschen Strömen dieser Schicht statt findet, d. h. eine Abnahme der Wärmeenergie oder Temperatur.

Das Umgekehrte findet man, wenn man die beiden Querschnitte betrachtet, welche die erste Schicht des ersten Conductors begrenzen. Die durch den ersten Querschnitt in diese Schicht eintretende Elektricität kommt aus dem Ende des zweiten Conductors mit grösserer Geschwindigkeit; die durch den zweiten Querschnitt aus dieser Schicht austretende Elektricität verlässt diese Schicht mit geringerer Geschwindigkeit, woraus sich ergiebt, dass in Folge des Stroms die erste Schicht des ersten Conductors an die folgende Schicht desselben Conductors weniger lebendige Kraft abgiebt als sie von der letzten Schicht des zweiten Conductors empfängt, wonach also eine Zunahme an Bewegungsenergie in den Ampèreschen Strömen dieser Schicht statt findet, d. h. eine Zunahme der Wärmeenergie oder Temperatur.

Man sieht, dass hiedurch eine Grundlage für die Lehre vom Thermomagnetismus, insbesondere für den Peltierschen Fundamentalversuch, dargeboten wird, deren weitere Verfolgung hier jedoch zu weit führen würde.

Es genüge, hier nur noch eine ähnliche Bemerkung in Beziehung auf den Seebeckschen Fundamentalversuch des Thermomagnetismus beizufügen. In einem Körper, der in allen seinen Theilchen gleiche Temperatur besitzt, wird der Wärme ein mobiles Gleichgewicht zugeschrieben, oder man spricht, nach Fourier, von einer wechselseitigen Strahlung der Körpertheilchen, vermöge deren jedes

Theilchen an die umgebenden Theilchen ebensoviel Wärme verliert, als es von ihnen empfängt. Besteht nun die Wärme in Ampèreschen Molecularströmen, die sich aber auflösen, indem das positive und negative Theilchen sich von einander entfernen, bis sie andern Theilchen begegnen, mit denen sie neue Molecularströme bilden; so würde die Temperaturgleichheit darin bestehen, dass die lebendige Kraft der aus einem Körpertheile austretenden elektrischen Theilchen gleich der lebendigen Kraft der in diesen Körpertheil eintretenden elektrischen Theilchen wäre.

Betrachtet man nun die Berührungsfläche zweier Conductoren, welche sich blos dadurch unterscheiden, dass in den Ampèreschen Strömen des einen grössere Massen von Elektricität mit geringerer Geschwindigkeit, in denen des andern kleinere Massen mit grösserer Geschwindigkeit sich bewegen; so würde bei gleicher Temperatur der beiden Conductoren zwar die lebendige Kraft der aus dem ersten Conductor in den zweiten übergehenden elektrischen Theilchen gleich sein der lebendigen Kraft der aus dem zweiten Conductor in den ersten übergehenden Theilchen; aber die Masse der elektrischen Theilchen, welche aus dem ersten Conductor in den zweiten übergeht, würde grösser sein als die Masse der elektrischen Theilchen, welche aus dem zweiten Conductor in den ersten übergeht, woraus sich (wenn es immer positive Elektricität ist, welche übergeht, während die negative Elektricität im Conductor, an dessen Theilchen sie haftet, zurückbleibt) eine Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Contactfläche ergäbe, d. h. es ergäbe sich das Vorhandensein einer elektromotorischen Kraft an dieser Contactfläche; denn die elektromotorische Kraft einer Contactfläche ist eine Kraft, von welcher eine Differenz der elektrischen Ladung zu beiden Seiten der Contactfläche hervorgebracht wird.

Sind nun die beiden Conductoren so beschaffen, dass jene Differenz der Ladung zu beiden Seiten ihrer Contactfläche nicht immer die nämliche ist, sondern nach Verschiedenheit der Temperatur grösser oder kleiner, so ergiebt sich daraus die Stromerregung in einem aus diesen beiden Conductoren gebildeten Ringe, wenn an den beiden Contactflächen der Conductoren verschiedene Temperaturen statt finden.

21.

Helmholtz, über den Widerspruch zwischen dem Gesetze der elektrischen Kraft und dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Helmholtz hat in der Abhandlung: »Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper« im Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 72, Seite 7 und 8 aus dem Gesetze der elektrischen Kraft die Bewegungsgleichung zweier elektrischen Theilchen, für Bewegungen in Richtung der Entfernung r beider Theilchen, abgeleitet, nämlich

$$\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}=\frac{C-\frac{ee'}{r}}{\frac{1}{2}mcc-\frac{ee'}{r}},$$

oder, $C=\frac{ee'}{r_0}$ und $\frac{2ee'}{mcc}=\varrho$ gesetzt, die Gleichung

$$\frac{1}{cc}\frac{dr^2}{dt^2}=\frac{r-r_0}{r-\varrho}\cdot\frac{\varrho}{r_0}$$

d. i. dieselbe Gleichung, welche Art. 9 gefunden worden ist.

Ist $\frac{ee'}{r}>\frac{1}{2}mcc>C$, d. i. $\frac{\varrho}{r}>1>\frac{\varrho}{r_0}$, so ist $\frac{dr^2}{dt^2}$ positiv und grösser als cc, also $\frac{dr}{dt}$ reell. Ist letzteres selbst positiv, so wird r wachsen, bis $\frac{ee'}{r}=\frac{1}{2}mcc$, d. i. $r=\varrho$, dann wird $\frac{dr}{dt}$ unendlich gross.

Dasselbe wird geschehen, wenn im Anfange $C>\frac{1}{2}mcc>\frac{ee'}{r}$, d. i. $\frac{\varrho}{r_0}>1>\frac{\varrho}{r}$, und $\frac{dr}{dt}$ negativ ist.

Diese Folgerungen stehen nach Helmholtz in Widerspruch mit dem Gesetze der Erhaltung der Kraft.

Es ist dabei nun erstens zu bemerken, dass hier zwei elektrische Theilchen angenommen werden, die sich zwar mit endlicher Geschwindigkeit zu bewegen beginnen, die aber grösser ist als die Geschwindigkeit c, d. i. grösser als $439450.10^6\ \frac{\text{Millimeter}}{\text{Secunde}}$. Der Fall, dass zwei Körper mit solcher Geschwindigkeit sich gegen einander bewegen, ist nirgends in der Natur nachzuweisen; bei allen praktischen Anwendungen des Gesetzes pflegt man vielmehr $\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ immer als einen sehr kleinen Bruch anzunehmen, was Beachtung verdient.

Denn nach Helmholtz, a. a. O. Seite 7, widerspricht ein Gesetz dem Gesetze von der Erhaltung der Kraft, wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen und also eine unendlich grosse Arbeit leisten können.

Es scheint hierin der Satz ausgesprochen zu sein, dass nach dem Gesetz der Erhaltung der Kraft zwei Theilchen überhaupt niemals unendliche lebendige Kraft besitzen können.

Denn man würde offenbar obigen Ausspruch auch umkehren und sagen können:

Ein Gesetz widerspricht dem Gesetze der Erhaltung der Kraft, wenn zwei Theilchen, die sich demselben gemäss bewegen und mit unendlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander endliche lebendige Kraft erreichen und also einen unendlich grossen Verlust an Arbeit, die sie leisten können, erleiden.

Die beiden Theilchen müssten also immer unendliche Geschwindigkeit behalten, denn haben sie dieselbe in keiner noch so grossen endlichen Entfernung verloren, so werden sie dieselbe, nach der Natur der Potentiale, auch darüber hinaus niemals verlieren. Körper aber, die sich immer mit unendlicher Geschwindigkeit gegen einander bewegen, sind vom Bereich unserer Forschungen ausgeschlossen.

Besitzen aber zwei Theilchen immer nur endliche lebendige Kraft; so muss es einen endlichen Grenzwerth der lebendigen Kraft geben, den sie niemals überschreiten. Es ist dann möglich, dass dieser Grenzwerth für zwei elektrische Theilchen e und $e' = \frac{ee'}{\varrho}$ ist, d. h. dass das Quadrat der Geschwindigkeit, mit der sich beide Theilchen gegeneinander bewegen, nicht grösser als cc sein könne.

Der von Helmholtz gerügte Widerspruch würde hiernach nicht in dem Gesetze liegen, sondern in seiner Annahme, wonach die beiden Theilchen mit einer Geschwindigkeit begönnen, deren Quadrat $\frac{dr^2}{dt^2} > cc$ wäre.

Wird eine solche Grenzbestimmung der lebendigen Kräfte im Gesetze der Erhaltung der Kraft nach Helmholtz mit aufgenommen; so kann sie in dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung Art. 4 ebensogut mit aufgenommen werden, indem man

die dort mit U bezeichnete Arbeit, ebenso wie die mit x bezeichnete lebendige Kraft (im Gesetze $U + x = \frac{ee'}{\varrho}$), beide als ihrer Natur nach positive Grössen betrachtet.

Zweitens ist zu bemerken, dass jene beiden elektrischen Theilchen zwar in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen; diese endliche Entfernung ist aber $\varrho = \frac{2ee'}{cc}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right)$, eine nach unsern Maassen unangebbar kleine Entfernung, aus gleichen Gründen, aus denen die elektrischen Massen ε und ε' selbst nach unsern Maassen unangebbar sind. Diese Entfernung ist daher Art. 9 als eine Molecularentfernung bezeichnet worden.

Die Theorie der Molecularbewegungen bedarf jedenfalls einer besonderen Entwickelung, an der es überall noch fehlt; solange aber als eine solche Theorie von den mechanischen Untersuchungen noch ausgeschlossen bleibt, haben alle Zweifel an physischer Zulässigkeit, die sich auf das Bereich der Molecularbewegungen beziehen, keine Berechtigung.

Drittens möge bemerkt werden, dass derselbe Einwand, dass nämlich zwei Theilchen, die mit endlicher Geschwindigkeit beginnen, in endlicher Entfernung von einander unendliche lebendige Kraft erreichen, auch das Gravitationsgesetz trifft, wenn man die Massen ponderabeler Theilchen in Punkten concentrirt annimmt. Beseitigt man aber diesen Einwand beim Gravitationsgesetze dadurch, dass man die Massen auch der kleinsten Theilchen als einen Raum erfüllend sich vorstellt; so wird man dasselbe auch bei elektrischen Theilchen thun müssen, wo sich dann auch ergiebt, dass nur ein verschwindend kleiner Theil eines solchen Theilchens in einem bestimmten Augenblicke zur Entfernung ϱ gelangt; ein anderer verschwindend kleiner Theil, der schon im Augenblicke vorher zur Entfernung ϱ gelangt war, würde die unendlich grosse Näherungsgeschwindigkeit mit unendlich grosser Entfernungsgeschwindigkeit vertauscht haben. Sind aber diese verschwindenden Theile kleinster Theilchen fest an einander gekettet, so dürfte von solchen unendlichen Geschwindigkeiten gar keine Rede sein.

Auch Weltkörper können ihre Bewegung unter physisch zulässigen Verhältnissen beginnen und können, indem sie sich nach dem Gravitationsgesetze weiter bewegen, in physisch unzulässige Ver-

hältnisse gerathen, die nur durch Mitwirkung der auf Molecularentfernungen beschränkten Molecularkräfte beseitigt werden. Ein Absehen von dieser Mitwirkung ist streng genommen nur temporär gestattet, solange nämlich die Verhältnisse so beschaffen sind, dass ihr Einfluss entweder Null ist oder als verschwindend klein betrachtet werden darf. Ebensowenig aber wie daraus ein Einwand gegen das Gravitationsgesetz entnommen wird, dürfte aus den physisch unzulässigen Verhältnissen, zu denen das Grundgesetz der elektrischen Wirkung nach Helmholtz führt, ein Einwand gegen dieses Gesetz sich ergeben, wenn man beachtet, dass diese unzulässigen Verhältnisse nur an gewisse Molecularentfernungen gebunden sind.

INHALT.

...CHUNG

...ICHTSTRAHLS

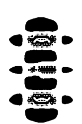
...E ANZAHL

...HEN OBERFLÄCHEN.

...NSEN

...SCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

...matisch-physischen Classe der Königl.
...der Wissenschaften



Vom Verfasser übergeben den 22. Juli 1871.
Der Abdruck vollendet den 27. September 1871.

UNTERSUCHUNG

DES

WEGES EINES LICHTSTRAHLS

DURCH

EINE BELIEBIGE ANZAHL

VON

BRECHENDEN SPHÄRISCHEN OBERFLÄCHEN.

VON

P. A. HANSEN

MITGLIEDE DER KÖNIGL. SÄCHS. GES. DER WISSENSCHAFTEN.

Die Dioptrik hat im Laufe der Zeit, gleichwie andere mathematische Theorien, an Vollkommenheit gewonnen, indem Unbestimmtheiten, die sie sonst besass, und die zu Ungenauigkeiten in deren Resultaten Anlass gaben, daraus entfernt worden sind. Den Weg zu diesen Verbesserungen hat Möbius in einer von ihm im Jahre 1830 veröffentlichten Abhandlung angebahnt,*) in welcher er mehrere neue Relationen bekannt machte, und unter andern das Vorhandensein von vier Punkten von besonderer Wichtigkeit nachwies, die sich in jedem Linsensystem befinden. Zur vollständigen Verwerthung seiner Entdeckungen hatte er sich freilich den Weg dadurch abgeschnitten, dass er unterlassen hatte, die Dicken der Linsen mit in Betracht zu ziehen, und es war Gauss vorbehalten, diese Theorie zu ergänzen und ihre Wichtigkeit zu erkennen.**)

Im § 2 dieser Abhandlung habe ich diese Theorie in der Gestalt entwickelt, die mir für ein leichtes Verständniss derselben am Angemessensten schien, und habe noch einen Zusatz zugefügt, welcher bei Gauss nicht vorkommt, und in der Benutzung der Vereinigungsweiten besteht, durch deren Zuziehung sich eine Anzahl neuer Relationen ableiten lassen. Als einen besonderen Umstand, welcher hervortritt, lässt sich anführen, dass mit geringer Ausnahme alle dioptrischen Relationen dieselbe äussere Form annehmen, die sie in der früheren Dioptrik hatten, nur tritt die Eigenschaft ein, dass sie alle bestimmt sind, und in der Voraussetzung kleiner Einfalls- und Brechungswinkel, strenge statt finden, während sie früher mit einer Unbestimmtheit behaftet erschienen, die in der Uebergehung

*) Möbius, Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Systems von Linsengläsern. In Crelle's Journal f. r. u. a. Math. Band V.

**) Gauss, Dioptrische Untersuchungen. Göttingen 1841.

der Dicken der Linsen ihren Grund hatte. Diese Uebergehung liess nemlich den einen Endpunkt einer Anzahl von Linien, deren Betrachtung nicht entbehrt werden kann, unbestimmt, und Versuche, die von einigen Schriftstellern gemacht worden waren, um diese unbestimmten Endpunkte zu definiren, müssen als fehl geschlagen betrachtet werden.

Möbius hatte ausser den beiden Haupt- und den beiden Brennpunkten eines Linsensystems auf noch zwei Punkte aufmerksam gemacht, die man später die Knotenpunkte genannt hat, und die die Eigenschaft besitzen, dass in denselben Bild und Gegenstand zwar gleiche Grösse, aber entgegengesetzte Lage haben. Gauss hat diese beiden Punkte, die in der That geringere Wichtigkeit besitzen als jene, nicht in Betracht gezogen; auch hier sind sie nicht berücksichtigt worden.

Die Theorie, von welcher das Vorstehende handelt, setzt voraus, dass die Einfalls- und Brechungswinkel nicht grösser seien, als dass man ihre Sinusse den Bögen gleich setzen könne, und findet unter diesem Vorbehalt eine ausgedehnte Anwendung; es treten jedoch auch Fälle ein, in welchen man mit dieser Annahme nicht ausreicht, sondern den Weg, den der Lichtstrahl nach verschiedenen erlittenen Brechungen oder Zurückwerfungen beschreibt, strenge verfolgen muss. Im § 1 habe ich diese Aufgabe, mit Rücksicht auf den allgemeinsten Fall, welcher eintreten kann, strenge gelöst, und zwei verschiedene Verfahrungsarten zu diesem Zwecke entwickelt. Geht man von dem allgemeinsten Falle zu dem speciellen über, in welchem der Lichtstrahl und die die Mittelpunkte der brechenden Oberflächen verbindende grade Linie in einer und derselben Ebene liegen, so gehen beide eben genannten Verfahrungsarten in eine und dieselbe Verfahrungsart über, die sehr einfach ist.

Der § 3 enthält numerische Beispiele, zur Anwendung des Vorhergehenden.

Ich habe allenthalben nur von Brechungen geredet, es ist aber an sich klar, dass alle Gleichungen ihre Gültigkeit behalten, wenn Zurückwerfungen statt Brechungen vorkommen. Man braucht in solchen Fällen nur die betreffenden Brechungsverhältnisse $n^{\pi} : n^{\pi-1}$ in $n^{\pi} : -n^{\pi}$ zu verwandeln. Ich habe ferner in dieser Abhandlung immer nur einen bestimmten Lichtstrahl für sich betrachtet, und auf

die gemeinschaftliche Betrachtung mehrerer, durch welche der Chromatismus und die Abweichung wegen Kugelgestalt möglichst gehoben werden können, hier keine Rücksicht genommen. Ich gedenke meine Ausarbeitungen, die sich darauf beziehen, in einer späteren Abhandlung nieder zu legen und zu veröffentlichen.

---

§ 1.

Entwickelung strenger Ausdrücke zur Berechnung der Lage eines Lichtstrahls nach einer beliebigen Anzahl von Brechungen durch sphärische Oberflächen.

1.

Denken wir uns eine beliebige Anzahl sphärischer, brechender Oberflächen, deren Mittelpunkte alle auf Einer graden Linie liegen, die zur Abscissenachse angenommen werden soll. Nennen wir die Abscissen der Durchschnittspunkte der genannten Oberflächen mit der Abscissenachse der Reihe nach q, q', q'', etc. und die Abscissen der Mittelpunkte dieser Oberflächen p, p', p'', etc.; alle Abscissen sollen von einem beliebigen, gemeinschaftlichen Anfangspunkte an gezählt werden. Durch diese Bestimmungen ist die Lage der brechenden Oberflächen, so wie der Umstand, ob sie ihre convexe oder ihre concave Seite dem einfallenden Lichtstrahl darbieten, unzweideutig gegeben. Denn nehmen wir an, dass die Abscissen überhaupt in derselben Richtung wachsen sollen, in welcher der Lichtstrahl fortschreitend gedacht wird, so entspringt die Regel, dass wenn von irgend zwei beliebigen, einander zugehörigen $p^{(m)}$ und $q^{(m)}$

$$p^{(m)} > q^{(m)}$$

die betreffende brechende Oberfläche ihre convexe und wenn

$$p^{(m)} < q^{(m)}$$

dieselbe ihre concave Seite dem einfallenden Strahl darbietet.

2.

In der Regel handelt es sich in der Anwendung der hier gestellten Aufgabe nicht um einzelne brechende Oberflächen oder Mittel,

sondern je zwei dieser Oberflächen begrenzen verschiedene, aus gleichen oder verschiedenen durchsichtigen Mitteln bestehende, Körper von linsenartiger Gestalt. In diesen Fällen sind statt der im vorigen Artikel eingeführten Abscissen gemeiniglich die Halbmesser der einzelnen brechenden Oberflächen, so wie die Dicken der Linsen in ihrer Achse, und die in letzterer gezählten Entfernungen der Linsen von einander gegeben. Es wird daher nothwendig zu zeigen, wie aus diesen Daten jene des vorigen Artikels erhalten werden.

Bezeichnet man der Reihe nach die Halbmesser der brechenden Oberflächen mit r, r', r'', etc., so folgt aus den Erklärungen des vorigen Artikels, dass ohne irgend welche Ausnahme

$$r = p - q$$
$$r' = p' - q'$$
$$r'' = p'' - q''$$
etc.

sind, und bezeichnen wir, wieder der Reihe nach, die Dicken und Entfernungen der Linsen von einander mit d, d', d'', etc., so dass d die Dicke der ersten Linse, d' die Entfernung der zweiten Oberfläche der ersten Linse von der ersten Oberfläche der zweiten Linse, d'' die Dicke dieser u. s. w. bedeuten, so giebt der vor. Art.

$$d = q' - q$$
$$d' = q'' - q'$$
$$d'' = q''' - q''$$
etc.

Aus diesen beiden Systemen von Gleichungen bekommt man leicht

q beliebig	$p = r + q$
$q' = d + q$	$p' = r' + d + q$
$q'' = d' + d + q$	$p'' = r'' + d' + d + q$
$q''' = d'' + d' + d + q$	$p''' = r''' + d'' + d' + d + q$
etc.	etc.

oder

$q' = d + q$	$p' = r' + q'$
$q'' = d' + q'$	$p'' = r'' + q''$
$q''' = d'' + q''$	$p''' = r''' + q'''$
etc.	etc.

durch welche, wenn die r und die d gegeben sind, für jeden beliebig angenommenen Werth von q, alle p und q berechnet werden können. Zu bemerken ist hiebei, dass zwar in jedem Falle alle d positiv angenommen werden müssen, zufolge des vor. Art. aber die r nur in den Fällen, in welchen ihre Lage im System der Oberflächen so beschaffen ist, dass sie dem einfallenden Lichtstrahl ihre convexe Seite zukehren, positiv werden; bieten sie dagegen ihre concave Seite dem einfallenden Lichtstrahl dar, so werden sie negativ. Es kann sich also ereignen, dass in den folgenden Entwickelungen eine an sich convexe Oberfläche einen negativen, und eine concave einen positiven Halbmesser bekommt.

3.

Da die im Art. 1 eingeführten Bezeichnungen an Bestimmtheit und Deutlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen, und ausserdem den zu entwickelnden Gleichungen eine Gleichförmigkeit verleihen, die auf andere Art nicht zu erreichen ist, so sollen sie im Folgenden beibehalten werden.

Bezeichnen wir nun die Abscissen überhaupt mit x, und die dazu gehörigen rechtwinklichen Ordinaten mit y und z. Denken wir uns irgend einen Lichtstrahl, dessen Lage vor der ersten Brechung bis auf die Bedingung willkührlich ist, dass er die erste brechende Oberfläche schneiden muss. Ziehen wir zur graden Linie, die dieser Lichtstrahl vor der ersten Brechung beschreibt, eine Parallele, die die Abscissenachse in irgend einem Punkte schneidet, und nennen α den Winkel, den diese beiden Linien mit einander machen. Legen wir eine Ebene durch diese Linien, und bezeichnen mit β den Winkel, den diese Ebene mit der Ebene der xy macht. Führen wir ferner den Punkt ein, in welchem der Lichtsrahl die erste brechende Oberfläche schneidet, und nennen dessen Coordinaten a, b, c, dann sind die Gleichungen des Lichtstrahls vor der ersten Brechung

$$y = (a - x) \operatorname{tg} \alpha \cos \beta + b$$
$$z = (a - x) \operatorname{tg} \alpha \sin \beta + c$$

Bezeichnen wir ferner die analogen Winkel, die derselbe Lichtstrahl nach der ersten Brechung mit der Abscissenachse und der Ebene der xy macht, mit α' und β', so sind die Gleichungen desselben

nach der ersten Brechung

$$y = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha' \cos\beta' + b$$
$$z = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha' \sin\beta' + c$$

da der gebrochene Strahl auch durch den Punkt (a, b, c) geht.

Die Winkel α und α' können immer positiv und $< 90^0$ angenommen werden, während β und β' sich durch den ganzen Umkreis erstrecken können. In den Anwendungen, die vorkommen können, werden überdiess α und α' nie sehr gross sein.

4.

Der Punkt, in welchem der einfallende Lichtstrahl die brechende Oberfläche schneidet, kann auf andere Weise bestimmt werden, als im vor. Art. geschehen ist. Man kann statt der rechtwinklichen Ordinaten b und c die kürzeste Entfernung desselben von der Abscissenachse, und den Winkel, den diese mit der xy Ebene macht, anwenden; da diese Bestimmung in vielen Fällen die geeigneteste zu sein scheint, so soll sie hier eingeführt werden. Sei die kürzeste Entfernung k, und der Winkel zwischen k und der xy Ebene ψ, so werden

$$b = k\cos\psi\ ,\ c = k\sin\psi$$

die Gleichungen des einfallenden Lichtstrahls werden

$$(1)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} y = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha \cos\beta + k\cos\psi \\ z = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha \sin\beta + k\sin\psi \end{cases}$$

und die des gebrochenen

$$(2)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} y = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha' \cos\beta' + k\cos\psi \\ z = (a - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha' \sin\beta' + k\sin\psi \end{cases}$$

Da der Einfallspunkt (a, b, c) oder (a, k, ψ) auf einer bestimmten Oberfläche liegt, so ist dessen Abscisse a von den Ordinaten desselben nicht unabhängig. Zieht man eine grade Linie von diesem Punkt an den Mittelpunkt der brechenden Oberfläche, und nennt den Winkel zwischen dieser und der Abscissenachse θ, so wird

$$(3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \sin\theta = \frac{k}{p - q}$$

und hieraus folgt sogleich

$$(4)\ \ldots\ a = p - (p - q)\cos\theta = q + 2\,(p - q)\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$

Da k immer positiv angenommen werden kann, so kann sich der Winkel θ zwischen den Grenzen -90^0 und $+90^0$ bewegen, während ψ den ganzen Umkreis durchlaufen kann. Es soll ψ jedenfalls in derselben Richtung gezählt werden, wie β und β'.

5.

Es werden k und ψ immer, und in vielen Fällen auch α und β unmittelbar gegebene Grössen sein, sollte jedoch statt der letzt genannten ein zweiter Punkt gegeben sein, durch welchen der einfallende Lichtstrahl gehen muss, so kann man jene daraus leicht berechnen. Seien die rechtwinklichen Coordinaten dieses zweiten Punkts $a_,$, $b_,$, $c_,$, so sind die Gleichungen des Lichtstrahls auch

$$y = (a_, - x) \operatorname{tg}\alpha \cos\beta + b_,$$
$$z = (a_, - x) \operatorname{tg}\alpha' \sin\beta + c_,$$

aus deren Verbindung mit den (1) man ohne Mühe

$$\operatorname{tg}\alpha \sin\beta = \frac{c_, - k\sin\psi}{a - a_,}$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cos\beta = \frac{b_, - k\cos\psi}{a - a_,}$$

bekommt, aus welchen α und β berechnet werden können.

6.

Legen wir durch den Mittelpunkt der brechenden Oberfläche eine auf die Abscissenachse senkrecht stehende Ebene, und verlängern den einfallenden Lichtstrahl bis er diese Ebene schneidet. Die Abscisse dieses Durchschnittspunkts ist offenbar $x = p$, und nennen wir die Entfernung des Durchschnittspunkts von der Abscissenachse ϱ, so wie den Winkel zwischen ϱ und der xy Ebene R, so werden die Ordinaten dieses Durchschnittspunkts $y = \varrho \cos R$, $z = \varrho \sin R$. Die Gleichungen (1) gehen durch die Substitution dieser Werthe von x, y, z über in

$$\varrho \cos R = k \cos\psi + (a - p) \operatorname{tg}\alpha \cos\beta$$
$$\varrho \sin R = k \sin\psi + (a - p) \operatorname{tg}\alpha \sin\beta$$

oder nach der Elimination von a durch die (4) in

$$\varrho \cos R = k \cos\psi - (p - q) \cos\theta \operatorname{tg}\alpha \cos\beta$$
$$\varrho \sin R = k \sin\psi - (p - q) \cos\theta \operatorname{tg}\alpha \sin\beta$$

die auch leicht auf die folgende Form gebracht werden können,

$$(5)\ldots\quad \begin{cases} \varrho \sin(R-\beta) = k \sin(\psi-\beta) \\ \varrho \cos(R-\beta) = k \cos(\psi-\beta) - (p-q) \cos\theta \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

und zur Berechnung von ϱ und R dienen, die nicht als unmittelbar gegeben betrachtet werden können.

Dieselbe Construction lässt sich mit dem gebrochenen Lichtstrahl ausführen. Bezeichnet man die Entfernung des Durchschnittspunkts dieses Lichtstrahls mit derselben senkrechten Ebene von der Abscissenachse durch σ, und den Winkel, den σ mit der xy Ebene macht, durch S, so sind die Coordinaten dieses Durchschnittspunkts $x = p$, $y = \sigma \cos S$, $z = \sigma \sin S$, wodurch ähnliche Gleichungen wie die vorstehenden entstehen. Aber legt man eine Ebene durch den Einfallspunkt, den zuerst betrachteten Durchschnittspunkt, und den Mittelpunkt der brechenden Oberfläche, so liegt der durch den Einfallspunkt gezogene Halbmesser, die Normale am Einfallspunkt, auch in dieser Ebene. Da nun, zufolge des ersten Fundamentalsatzes der Dioptrik diese Normale, der einfallende und der gebrochene Lichtstrahl in einer und derselben Ebene liegen, so liegt auch der gebrochene Lichtstrahl in der eben betrachteten Ebene, und ϱ und σ sind Abschnitte einer und derselben graden Linie. Es wird demzufolge

$$S = R$$

und die Gleichungen (2) des gebrochenen Lichtstrahls geben

$$\begin{aligned} \sigma \cos R &= k \cos\psi + (a-p) \operatorname{tg}\alpha' \cos\beta' \\ \sigma \sin R &= k \sin\psi + (a-p) \operatorname{tg}\alpha' \sin\beta' \end{aligned}$$

die man eben so wie oben in

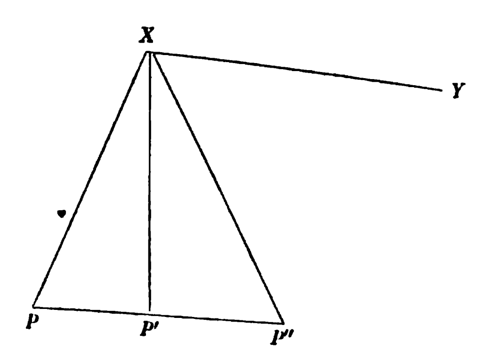
$$(6)\ldots\quad \begin{cases} \sigma \sin(R-\beta') = k \sin(\psi-\beta') \\ \sigma \cos(R-\beta') = k \cos(\psi-\beta') + (a-p) \operatorname{tg}\alpha' \end{cases}$$

umformen kann.

7.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt des verlängerten einfallenden Lichtstrahls mit der durch den Mittelpunkt p gelegten senkrechten Ebene mit Q, führen die Ebene der xy parallel mit sich selbst fort, bis sie durch Q geht, und beschreiben um Q als Mittel-

punkt eine Kugeloberfläche von unbestimmtem Halbmesser, so entsteht auf dieser letzteren die folgende Figur:



in welcher X der Durchschnittspunkt der Abscissenachse, P der der Verlängerung der graden Linie, von welcher ϱ und σ Abschnitte sind, und P'' der des einfallenden Lichtstrahls mit dieser Kugeloberfläche sind. Es ist ferner in dieser Figur der Bogen XY ein Theil des grössten Kreises, in welchem die xy Ebene die Kugeloberfläche schneidet, und es soll die Richtung von X nach Y die nach dem positiven y bezeichnen. Es werden demzufolge die Bögen grössten Kreises

$$XP = 90^0$$
$$XP'' = \alpha$$
$$PP'' = \eta$$

wenn unter η der Winkel verstanden wird, den der einfallende Lichtstrahl mit der Verlängerung der Linie ϱ macht. Endlich sind die sphärischen Winkel

$$YXP'' = \beta$$
$$YXP = R$$

In dem sphärischen Dreieck XPP'' finden nun, wenn man den Winkel an P mit P bezeichnet, die folgenden Relationen statt,

$$\left.\begin{aligned} \sin\eta \sin P &= \sin\alpha \sin(R-\beta) \\ \sin\eta \cos P &= \cos\alpha \\ \cos\eta &= \sin\alpha \cos(R-\beta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

welche sowohl P wie η durch ihre Tangenten, also auf möglichst sichere Art geben. In den Anwendungen kann man aber die Kenntniss des Winkels P entbehren, da immer η sich nicht weit von dem Werthe 90^0 entfernen wird. Man wird daher in allen vorkommenden

Fällen den Winkel η durch

$$(8) \quad \cos\eta = \sin\alpha\cos(R-\beta)$$

sicher und unzweideutig berechnen können, da die Bedingung hinzukommt, dass η immer im ersten Halbkreise liegen muss.

8.

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt des gebrochenen Lichtstrahls mit der oft genannten senkrechten Ebene durch Q', führen die xy Ebene parallel mit sich selbst fort, bis sie den Punkt Q' schneidet, und beschreiben um Q' als Mittelpunkt eine Kugeloberfläche von unbestimmtem Halbmesser, so bekommen wir auf dieser eine ähnliche Figur wie im vor. Art. Wir können sogar diese Figur dadurch, dass wir den Bogen grössten Kreises XP' in derselben ziehen, auf den gegenwärtigen Fall ausdehnen, wenn wir unter dem Punkt P' den Durchschnittspunkt des gebrochenen Strahls mit unserer Kugeloberfläche verstehen. Da nun die übrigen Theile dieser Figur dieselbe Bedeutung beibehalten, die sie vorher hatten, so werden

$$XP' = \alpha'$$
$$PP' = \varkappa$$

wenn $\varkappa$ den Winkel bezeichnet, den der gebrochene Strahl mit der Verlängerung der Linie σ macht. Ferner wird der sphärische Winkel

$$YXP' = \beta'$$

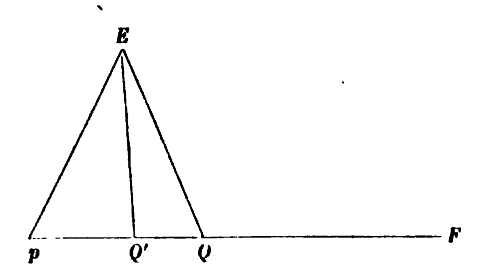
und das Dreieck XPP' giebt die Relationen

$$(9) \quad \begin{cases}\sin\varkappa\sin P = \sin\alpha'\sin(R-\beta') \\ \sin\varkappa\cos P = \cos\alpha' \\ \cos\varkappa = \sin\alpha'\cos(R-\beta')\end{cases}$$

die den (7) ähnlich sind.

9.

Wenden wir uns jetzt zu der Ebene, in welcher der Einfallspunkt, der Mittelpunkt p der brechenden Oberfläche, und die Punkte Q und Q' liegen, die, wenn der Einfallspunkt mit E bezeichnet wird, folgende Verbindung mit einander besitzen.



In dieser Figur sind vor Allem die graden Linien und ebenen Winkel

$$pQ = \varrho$$
$$EQF = \eta$$
$$pQ' = \sigma$$
$$EQ'F = \varkappa$$

und da Ep der Halbmesser, oder die Normale der brechenden Oberfläche am Einfallspunkt E ist, so sind die Winkel pEQ der Einfalls-, und pEQ' der Brechungswinkel. Seien

$$pEQ = \lambda$$
$$pEQ' = \mu$$

Da $pE = p - q$ ist, so giebt die Figur erstens

$$\sin\lambda = \frac{\varrho}{p-q}\sin\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

und wenn das Brechungsverhältniss der beiden Mittel, welche die erste brechende Oberfläche von einander absondert, durch $n' : n$ ausgedrückt wird, so giebt das zweite Fundamentalgesetz der Dioptrik

$$\sin\mu = \frac{n}{n'}\sin\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Die Figur giebt ferner

$$\varkappa = \eta + \mu - \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$
$$\sigma = (p - q)\frac{\sin\mu}{\sin\varkappa} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Wenden wir uns jetzt zu den Gleichungen (7) und (9). Die Division der ersten durch die zweiten giebt

$$\operatorname{tg}\alpha\sin(R-\beta) = \operatorname{tg}\alpha'\sin(R-\beta')$$

und die zweite (7) giebt

$$\frac{1}{\cos P} = \frac{\sin\eta}{\cos\alpha}$$

während aus der Division der dritten (9) durch die zweite

$$\frac{\operatorname{cotg} \varkappa}{\cos P} = \operatorname{tg} \alpha' \cos (R - \beta')$$

folgt. Wir bekommen hieraus zur Berechnung von α' und β' sofort die Gleichungen

$$(14) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha' \sin (\beta' - R) = \operatorname{tg} \alpha \sin (\beta - R) \\ \operatorname{tg} \alpha' \cos (\beta' - R) = \frac{\sin \eta}{\cos \alpha} \operatorname{cotg} \varkappa \end{cases}$$

womit die Aufgabe für Eine brechende Oberfläche gelöst ist, da nunmehr die Gleichungen (2) des ein Mal gebrochenen Strahls völlig bekannt sind. Man kann bemerken, dass in dieser Auflösung die Gleichung (13), oder die Kenntniss der Linie σ gar nicht verlangt wird, es wird aber die Kenntniss derselben nützlich, wenn mehr als Eine brechende Oberfläche vorhanden ist, wie man gleich sehen wird.

10.

Gehen wir zu einer zweiten brechenden Oberfläche über, welche zwei Mittel von einander absondert, in welchen das Brechungsverhältniss, dem Vorhergehenden analog, durch $n'' : n'$ ausgedrückt werden soll. Legen wir wieder durch den Mittelpunkt dieser zweiten Oberfläche eine Ebene, die senkrecht zur Abscissenachse steht, und verlängern den durch die erste Oberfläche gebrochenen Lichtstrahl, welcher jetzt der einfallende ist, so weit, dass er diese senkrechte Ebene schneidet. Die Coordinaten dieses Durchschnittspunkts sind nun offenbar

$$x = p', \quad y = \varrho' \cos R', \quad z = \varrho' \sin R'$$

wenn man ϱ' und R' in Bezug auf die jetzt eingeführte, zweite senkrechte Ebene dieselbe Bedeutung beilegt, die ϱ und R in Bezug auf die erste haben. Die Gleichungen (2) des ein Mal gebrochenen Lichtstrahls geben hiemit sogleich

$$\begin{aligned} \varrho' \cos R' &= k \cos \psi + (a - p') \operatorname{tg} \alpha' \cos \beta' \\ \varrho' \sin R' &= k \sin \psi + (a - p') \operatorname{tg} \alpha' \sin \beta' \end{aligned}$$

die man ohne Mühe in die folgenden umformen kann,

$$\begin{aligned} \varrho' \sin (\beta' - R') &= k \sin (\beta' - \psi) \\ \varrho' \cos (\beta' - R') &= k \cos (\beta' - \psi) + (a - p') \operatorname{tg} \alpha' \end{aligned}$$

die schon ϱ' und R' geben. Vergleicht man sie aber mit den (6)

und subtrahirt, so geben sie

$$\left.\begin{aligned} \varrho' \sin(\beta' - R') &= \sigma \sin(\beta' - R) \\ \varrho' \cos(\beta' - R') &= \sigma \cos(\beta' - R) + (p - p') \operatorname{tg} \alpha' \end{aligned}\right\} \quad . . \quad (15)$$

die auch ϱ' und R' geben, und jedenfalls angewandt werden müssen, wenn mehr als zwei brechende Oberflächen vorhanden sind.

Es sind hierauf die für die erste Brechung erhaltenen Gleichungen (8), (10) bis (14) wiederholt anzuwenden, in welchen zur Unterscheidung alle Grössen mit einem Striche, oder einem Striche mehr, versehen werden sollen. Nemlich

$$\begin{aligned} \cos\eta' &= \sin\alpha' \cos(\beta' - R') \\ \sin\lambda' &= \frac{\varrho'}{p' - q'} \sin\eta' \\ \sin\mu' &= \frac{n'}{n''} \sin\lambda' \\ \varkappa' &= \eta' + \mu' - \lambda' \\ \sigma' &= (p' - q') \frac{\sin\mu'}{\sin\varkappa'} \\ \operatorname{tg}\alpha'' \sin(\beta'' - R') &= \operatorname{tg}\alpha' \sin(\beta' - R') \\ \operatorname{tg}\alpha'' \cos(\beta'' - R') &= \frac{\sin\eta'}{\cos\alpha'} \operatorname{cotg}\varkappa' \end{aligned}$$

womit die Aufgabe für zwei Brechungen gelöst ist, da in den Gleichungen des zwei Mal gebrochenen Lichtstrahls, welche sich jetzt unter der Form

$$\begin{aligned} y &= \sigma' \cos R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta'' \\ z &= \sigma' \sin R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta'' \end{aligned}$$

darstellen, Alles bekannt ist. Die Entwickelungen brauchen auch nicht weiter fortgesetzt zu werden, da die bis jetzt entwickelten Gleichungen auf jede beliebige Anzahl von brechenden Oberflächen ausgedehnt werden können.

11.

Die eben gelöste Aufgabe kann in der Anwendung einen Zusatz erfordern, welcher darin besteht, den Punkt zu bestimmen, in welchem der ein Mal gebrochene Lichtstrahl die zweite brechende Oberfläche schneidet. Durch Hülfe dieses Punkts, welcher zwar in der vorstehenden Auflösung enthalten ist, aber nicht ausdrücklich darin vorkommt, lassen sich, namentlich in den Fällen, wo mehr als zwei brechende Oberflächen vorkommen, und in der Anwendung der Auflösung auf ein Linsensystem, die Ausdehnungen bestimmen, die

den brechenden Oberflächen, oder den Linsen gegeben werden müssen, damit der gegebene einfallende Lichtstrahl durch sie hindurch gehen könne.

Die strenge Bestimmung dieses Punkts kann auf verschiedene Arten ausgeführt werden. Man kann den Durchschnittspunkt, entweder des ein Mal, oder des zwei Mal gebrochenen Strahls mit der zweiten brechenden Oberfläche bestimmen, und da der ein Mal gebrochene Strahl zwei ausdrücklich bekannte Punkte darbietet, so kann die Bestimmung des Durchschnittspunkts auf zwei verschiedene Arten ausgeführt werden. Endlich kann man auch den Durchschnittspunkt des ein Mal gebrochenen Strahls mit dem zwei Mal gebrochenen bestimmen. Da alle diese Durchschnittspunkte identisch sind, so müssen alle diese Auflösungen auf identische Resultate führen.

Die erst genannten Auflösungen führen auf quadratische Gleichungen zur Bestimmung der Abscisse des Durchschnittspunkts, während die letztgenannte auf eine linearische Gleichung führt. Man könnte aus diesem Grunde diese Auflösung als die einfachste und angemessenste bezeichnen, wenn nicht in den Anwendungen der störende Umstand einträte, dass die beiden gebrochenen Strahlen einen sehr spitzen Winkel mit einander machten. Dieser Umstand verursacht, dass bei der Anwendung dieser Auflösung die Nenner der Gleichungen sehr klein werden, und ungeachtet der geometrischen Strenge wenig genaue Resultate geben können. Die anderen Auflösungen sind von diesem Uebelstande frei.

12.

Es sollen jetzt beide im vorigen Artikel angeführten Arten der Auflösung unserer Nebenaufgabe entwickelt werden, und zu dem Ende führe ich zuerst die allgemeinen Gleichungen an, die wir im Vorhergehenden für beide gebrochene Strahlen erhalten haben. Für den ein Mal gebrochenen Strahl bekommen wir, wenn wir ihn auf die erste senkrechte Ebene beziehen und demzufolge p, $\sigma \cos R$, $\sigma \sin R$ statt a, $k \cos \psi$, $k \sin \psi$ in die Gleichungen (2) setzen

$$y = \sigma \cos R + (p - x) \operatorname{tg} \alpha' \cos \beta'$$
$$z = \sigma \sin R + (p - x) \operatorname{tg} \alpha' \sin \beta'$$

und wenn wir denselben auf die zweite senkrechte Ebene beziehen,

$$y = \varrho' \cos R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha' \cos\beta'$$
$$z = \varrho' \sin R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha' \cos\beta'$$

Für den zwei Mal gebrochenen Strahl haben wir im Art. 10 schon

$$y = \sigma' \cos R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta''$$
$$z = \sigma' \sin R' + (p' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta''$$

erhalten. Bezeichnen wir nun die Abscisse des gesuchten Durchschnittspunkts mit a', und die rechtwinklichen Ordinaten desselben mit $k' \cos\psi'$ und $k' \sin\psi'$, und substituiren diese statt x, y, z in die vorstehenden Gleichungen, so werden diese nach einer leichten Umformung

$$\left.\begin{aligned}
k' \sin(\psi' - R) &= (p - a') \operatorname{tg}\alpha' \sin(\beta' - R) \\
k' \cos(\psi' - R) &= (p - a') \operatorname{tg}\alpha' \cos(\beta' - R) + \sigma \\
k' \sin(\psi' - R') &= (p' - a') \operatorname{tg}\alpha' \sin(\beta' - R') \\
k' \cos(\psi' - R') &= (p' - a') \operatorname{tg}\alpha' \cos(\beta' - R') + \varrho' \\
k' \sin(\psi' - R') &= (p' - a') \operatorname{tg}\alpha'' \sin(\beta'' - R') \\
k' \cos(\psi' - R') &= (p' - a') \operatorname{tg}\alpha'' \cos(\beta'' - R') + \sigma'
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

Nehmen wir zuerst die letzt genannte Auflösung vor, und benutzen dazu die vier letzt angeführten der vorstehenden Gleichungen. Da die Anzahl dieser Gleichungen um Eins grösser ist als die der Unbekannten, so bekommt man aus denselben Eine Gleichung, die keine der letzteren enthält, und bekanntlich die Bedingung ausdrückt, dass die beiden graden Linien, deren Durchschnittspunkt man sucht, sich in der That schneiden. Setzen wir nun die rechten Seiten der dritten und fünften, so wie die der vierten und sechsten der Gleichungen (16) einander gleich, so erhalten wir

$$\operatorname{tg}\alpha'' \sin(\beta'' - R') - \operatorname{tg}\alpha' \sin(\beta' - R') = 0$$
$$(p' - a') \{\operatorname{tg}\alpha'' \cos(\beta'' - R') - \operatorname{tg}\alpha' \cos(\beta' - R')\} = \varrho' - \sigma'$$

von welchen die erste die erwähnte Bedingungsgleichung ist, die mit einer der Gleichungen des Art. 10 übereinstimmt. Multiplicirt man die erste der vorstehenden Gleichungen mit $(p' - a') \sin(\frac{1}{2}(\beta'' + \beta') - R')$, die zweite mit $\cos(\frac{1}{2}(\beta'' + \beta') - R')$, und addirt die Producte, so giebt eine leichte Reduction

$$a' = p' - (\varrho' - \sigma') \frac{\cos(\frac{1}{2}(\beta'' + \beta') - R') \cos\alpha'' \cos\alpha'}{\cos\frac{1}{2}(\beta'' - \beta') \sin(\alpha'' - \alpha')}$$

die zur Bestimmung von a' dient, aber den sehr kleinen Divisor

$\sin(\alpha''-\alpha')$ enthält. Alle Umformungen, die man mit dieser Gleichung vornehmen möchte, würden diesen Uebelstand nicht beseitigen können. Die Elimination von a' aus dem dritten Paar der Gleichungen (16) giebt nun

$$k'\sin(\psi'-R') = (\varrho'-\sigma')\,\frac{\cos(\frac{1}{2}(\beta''+\beta')-R')\cos\alpha''\sin\alpha'}{\cos\frac{1}{2}(\beta''-\beta')\sin(\alpha''-\alpha')}\sin(\beta''-R')$$

$$k'\cos(\psi'-R') = (\varrho'-\sigma')\,\frac{\cos(\frac{1}{2}(\beta''+\beta')-R')\cos\alpha''\sin\alpha'}{\cos\frac{1}{2}\beta''-\beta')\sin(\alpha''-\alpha')}\cos(\beta''-R') + \sigma'$$

und ähnliche Gleichungen bekommt man durch die Anwendung der anderen (16). Wegen des kleinen Divisors ist diese Auflösung nur in den Fällen anwendbar, in welchen man nicht die grösste Genauigkeit in die Bestimmung von k' zu legen braucht.

Um eine der anderen Gattung von Auflösungen zu erhalten, haben wir für die Gleichung der zweiten brechenden Oberfläche

$$(p'-q')^2 = (p'-x)^2 + y^2 + z^2$$

oder wenn für x, y, z die oben eingeführten Coordinaten des Durchschnittspunkts gesetzt werden

$$(p'-q')^2 = (p'-a')^2 + k'^2$$

Erheben wir nun die beiden letzten (16) ins Quadrat und addiren, so ergiebt sich

$$k'^2 = (p'-a')^2\,\mathrm{tg}^2\alpha'' + 2\,(p'-a')\,\sigma'\,\mathrm{tg}\,\alpha''\cos(\beta''-R') + \sigma'^2$$

und eliminirt man hiemit k'^2 aus der vorhergehenden Gleichung, so ergiebt sich zur Bestimmung von $p'-a'$ die quadratische Gleichung

$$0 = (p'-a')^2 + 2\,(p'-a')\,\sigma'\sin\alpha''\cos\alpha''\cos(\beta''-R')$$
$$- [(p'-q')^2 - \sigma'^2]\cos^2\alpha''$$

deren Auflösung, wenn

$$\mathrm{tg}\,w = \frac{\sqrt{(p'-q'+\sigma')\,(p'-q'-\sigma')}}{\sigma'\sin\alpha''\cos(\beta''-R')}$$

gesetzt wird,

$$a' = p' - 2\,\frac{\sin^2\frac{1}{2}w}{\sin w}\sqrt{(p'-q'+\sigma')\,(p'-q'-\sigma')}$$

$$= p' + 2\,\frac{\cos^2\frac{1}{2}w}{\sin w}\sqrt{(p'-q'+\sigma')\,(p'-q'-\sigma')}$$

ist. Der erste dieser beiden Werthe für a' ist anzuwenden, wenn $p'-q'$ positiv, der zweite, wenn $p'-q'$ negativ ist. Hat man hieraus a' erhalten, so giebt ein beliebiges Paar der Gleichungen (16) k' und ψ'. Die andern noch möglichen Auflösungen brauchen nicht

durchgeführt zu werden, da sie durch Vertauschung der betreffenden Buchstaben aus der vorstehenden folgen.

Die Gleichungen des zwei Mal gebrochenen Strahls nehmen hierauf die folgende Form an

$$y = k' \cos\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta''$$
$$z = k' \sin\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta''$$

Zu bemerken ist, dass man in den gewöhnlichen Fällen q' statt a' in die (16) setzen, und damit die entsprechenden Werthe von k' und ψ' berechnen könnte, die von jenen sehr wenig verschieden sein würden. Man würde hierauf strenge für den zwei Mal gebrochenen Lichtstrahl die Gleichungen

$$y = k' \cos\psi' + (q' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta''$$
$$z = k' \sin\psi' + (q' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta''$$

erhalten.

13.

Die oben entwickelte Auflösung der Hauptaufgabe wird unbestimmt, wenn eine der beiden brechenden Oberflächen, oder beide, Ebenen sind; es sind daher die Abänderungen, welche die Auflösung in diesen Fällen erfordert, zu entwickeln.

Sei die erste brechende Oberfläche eine Ebene, dann wird nicht nur p, sondern es werden auch ϱ und σ unendlich gross, ferner wird $\theta = 0$. Der Quotient $\frac{k}{p-q}$ wird jetzt $= 0$, aber der Quotient $\frac{\varrho}{p-q}$ behält einen endlichen Werth, den ich V nennen will. Die Gleichungen (5) geben hiemit

$$V = \frac{\varrho}{p-q} = \operatorname{tg}\alpha \quad , \quad R = \beta + 180^0$$

Die Gleichung (8) und die folgenden geben hierauf

$$\eta = 90^0 + \alpha \quad , \quad \lambda = \alpha \quad , \quad \varkappa = 90^0 + \alpha' \quad , \quad \mu = \alpha'$$

und folglich wird sogleich

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} \sin\alpha$$

die (14) endlich geben $R = \beta' + 180^0$, woraus

$$\beta' = \beta$$

folgt, und die Lage des ein Mal gebrochenen Lichtstrahls völlig bekannt ist, da dieser jeden Falls durch den Punkt (k, ψ) geht.

Die Gleichungen (15) können jetzt nicht angewandt werden, aber die denselben vorangehenden, die wir jetzt, da $a = q$ wird, wie folgt schreiben können,

$$\varrho' \sin(\beta - R') = k \sin(\beta - \psi)$$
$$\varrho' \cos(\beta - R') = k \cos(\beta - \psi) + (q - p') \operatorname{tg} \alpha'$$

geben ϱ' und R', worauf die Lage des zwei Mal gebrochenen Lichtstrahls eben so wie oben erhalten wird.

Wenn statt der ersten brechenden Oberfläche die zweite eine Ebene ist, wodurch p', ϱ', σ' unendlich gross werden, so wird die erste Brechung nach den obigen allgemeinen Gleichungen durchgeführt, bis dass man durch die Gleichungen (14) α' und β' erhalten hat. In den (15) darf jetzt, ohne die Strenge zu verletzen — $(p' - q')$ statt $(p - p')$ gesetzt werden, und es wird der Quotient $\frac{\sigma}{p' - q'} = 0$, während $\frac{\varrho'}{p' - q'}$ eine endliche Grösse bleibt, die mit V' bezeichnet werden soll. Die (15) geben hierauf

$$V' = \operatorname{tg} \alpha' \quad , \quad R' = 180^0 + \beta'$$

und die ferneren Gleichungen für die zweite Brechung erleiden dieselben Abkürzungen wie oben die der ersten Brechung. Es werden also

$$\sin \alpha'' = \frac{n'}{n''} \sin \alpha'$$
$$\beta'' = \beta'$$

womit schon α'' und β'' bekannt sind.

Die im Art. 10 erhaltenen Gleichungen des zwei Mal gebrochenen Lichtstrahls werden gegenwärtig auch unbestimmt und können nicht angewandt werden, aber da die Gleichungen des ein Mal gebrochenen Strahls immer noch wie im Art. 12

$$y = \sigma \cos R + (p - x) \operatorname{tg} \alpha' \cos \beta'$$
$$z = \sigma \sin R + (p - x) \operatorname{tg} \alpha' \sin \beta'$$

und die Coordinaten des Punktes, in welchem dieser jetzt die zweite brechende Oberfläche, die Ebene, schneidet,

$$x = q' \quad , \quad y = k' \cos \psi' \quad , \quad z = k' \sin \psi'$$

sind, so erhalten wir durch Substitution dieser Coordinaten aus den vorstehenden Gleichungen

$$k' \sin(\psi' - \beta') = \sigma \sin(R - \beta')$$
$$k' \cos(\psi' - \beta') = \sigma \cos(R - \beta') + (p - q') \operatorname{tg} \alpha'$$

welche k' und ψ', sowie die Gleichungen

$$y = k' \cos\psi' + (q' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta''$$
$$z = k' \sin\psi' + (q' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta''$$

des zweimal gebrochenen Strahls geben.

Wenn beide brechende Oberflächen Ebenen sind, so ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Vorhergehenden

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} \sin\alpha$$
$$\sin\alpha'' = \frac{n'}{n''} \sin\alpha'$$
$$\beta'' = \beta' = \beta$$

und da die Coordinaten des Punkts, in welchem der ein Mal gebrochene Lichtstrahl die zweite Oberfläche schneidet, dieselben sind wie vorher, ferner $a = q$ ist, so geben die Gleichungen (1) des einfallenden Lichtstrahls

$$k' \sin(\psi' - \beta) = k \sin(\psi - \beta)$$
$$k' \cos(\psi' - \beta) = k \cos(\psi - \beta) + (q - q') \operatorname{tg}\alpha$$

und mit den hieraus folgenden Werthen von k' und ψ' werden die Gleichungen des zwei Mal gebrochenen Lichtstrahls dieselben wie im vorhergehenden Falle.

Denken wir uns unter den zwei brechenden Ebenen und dem Mittel, welches sie einschliessen, einen durchsichtigen Körper, z. B. ein Planglas mit parallelen Oberflächen, welches auf allen Seiten von einem und demselben Mittel, z. B. der atmosphärischen Luft, umgeben ist, so wird $n'' = n$, und die Gleichungen

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} \sin\alpha$$
$$\sin\alpha'' = \frac{n'}{n} \sin\alpha'$$

geben $\alpha'' = \alpha$; der ausfahrende Lichtstrahl wird also dem einfallenden parallel, wie sich von selbst versteht.

14.

Es brauchen, wenn der Lichtstrahl einer grösseren Anzahl von Brechungen unterworfen ist, keine weiteren Gleichungen entwickelt

zu werden, da die vorhergehenden, auf zwei Brechungen ausgedehnten, sich durch ihre Wiederholung auf jede beliebige Anzahl von brechenden Oberflächen anwenden lassen. Um dieses möglichst deutlich zu machen, wollen wir die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen ausdrücklich auf eine unbestimmte Anzahl Brechungen ausdehnen.

Seien m Brechungen, und demgemäss $m+1$ verschiedene Mittel vorhanden, denen der Reihe nach vom ersten zum letzten die Brechungsverhältnisse

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n'} : \frac{1}{n''} : \frac{1}{n'''} \text{ etc. bis: } \frac{1}{n^{m-1}} : \frac{1}{n^m}$$

zukommen. Es soll hiebei sogleich bemerkt werden, dass wenn das erste und das letzte Mittel identisch, z. B. die Luft sind,

$$n = n^m$$

wird, sowie, dass wenn die Anzahl der Brechungen eine grade ist, und die jedes Paar derselben umgebenden Mittel dieselben sind, wie bei einem Linsensystem der Fall ist,

$$n = n'' = n''' \text{ etc. } = n^m$$

werden. Vor Allem müssen nicht nur alle n, sondern auch die Abscissen

$$p, p', p'', p''', \text{ etc. } p^{m-1}$$

der Mittelpunkte der brechenden Oberflächen, sowie die Abscissen

$$q, q', q'', q''', \text{ etc. } q^{m-1}$$

der Punkte, in welchen diese Oberflächen die Abscissenachse schneiden, gegeben sein, und ausserdem muss man die Coefficienten der Gleichungen

$$y = k \cos\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha \cos\beta$$
$$z = k \sin\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha \sin\beta$$

des auf der ersten brechenden Oberfläche einfallenden Lichtstrahls, oder k, ψ, α, β kennen. Sollten α und β nicht unmittelbar gegeben sein, so bietet der Art. 5 Mittel dar, um sie zu erhalten. Die Berechnung der Lage des Lichtstrahls nach der m^{ten} Brechung wird nun durch die folgenden Gleichungen geführt.

1ste Brechung.

$$\sin\theta = \frac{k}{p-q}$$
$$\varrho \sin(R-\beta) = k\sin(\psi-\beta)$$
$$\varrho\cos(R-\beta) = k\cos(\psi-\beta) - (p-q)\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\alpha$$
$$\cos\eta = \sin\alpha\cos(R-\beta)\;,\quad \sin\lambda = \frac{\varrho}{p-q}\sin\eta$$
$$\sin\mu = \frac{n}{n'}\sin\lambda\;,\qquad \varkappa = \eta+\mu-\lambda$$
$$\sigma = (p-q)\frac{\sin\mu}{\sin\varkappa}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha'\sin(\beta'-R) = \mathrm{tg}\,\alpha\sin(\beta-R)$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha'\cos(\beta'-R) = \frac{\sin\eta}{\cos\alpha}\,\mathrm{cotg}\,\varkappa$$

2te Brechung.

$$\varrho'\sin(R'-\beta') = \sigma\sin(R-\beta')$$
$$\varrho'\cos(R'-\beta') = \sigma\cos(R-\beta') + (p-p')\,\mathrm{tg}\,\alpha'$$
$$\cos\eta' = \sin\alpha'\cos(\beta'-R')\;,\quad \sin\lambda' = \frac{\varrho'}{p'-q'}\sin\eta'$$
$$\sin\mu' = \frac{n'}{n''}\sin\lambda'\;,\qquad \varkappa' = \eta+\mu'-\lambda'$$
$$\sigma' = (p'-q')\frac{\sin\mu'}{\sin\varkappa'}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha''\sin(\beta''-R') = \mathrm{tg}\,\alpha'\sin(\beta'-R')$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha''\cos(\beta''-R') = \frac{\sin\eta'}{\cos\alpha'}\,\mathrm{cotg}\,\varkappa'$$

3te Brechung.

$$\varrho''\sin(R''-\beta'') = \sigma'\sin(R'-\beta'')$$
$$\varrho''\cos(R''-\beta'') = \sigma'\cos(R'-\beta'') + (p'-p')\,\mathrm{tg}\,\alpha''$$
$$\cos\eta'' = \sin\alpha''\cos(\beta''-K'')\;,\quad \sin\lambda'' = \frac{\varrho''}{p''-q''}\sin\eta''$$
$$\sin\mu'' = \frac{n''}{n'''}\sin\lambda''\;,\qquad \varkappa'' = \eta''+\mu''-\lambda''$$
$$\sigma'' = (p''-q'')\frac{\sin\mu''}{\sin\varkappa''}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha'''\sin(\beta'''-R'') = \mathrm{tg}\,\alpha''\sin(\beta''-K'')$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha'''\cos(\beta'''-R'') = \frac{\sin\eta''}{\cos\alpha''}\,\mathrm{cotg}\,\varkappa''$$

u. s. w. bis für die

m^te Brechung

$$\varrho^{m-1}\sin(R^{m-1}-\beta^{m-1}) = \sigma^{m-2}\sin(R^{m-2}-\beta^{m-1})$$
$$\varrho^{m-1}\cos(R^{m-1}-\beta^{m-1}) = \sigma^{m-2}\cos(R^{m-2}-\beta^{m-1}) + (p^{m-2}-p^{m-1})\,\mathrm{tg}\,\alpha^{m-1}$$
$$\cos\eta^{m-1} = \sin\alpha^{m-1}\cos(\beta^{m-1}-R^{m-1}),\quad \sin\lambda^{m-1} = \frac{\varrho^{m-1}}{p^{m-1}-q^{m-1}}\sin\eta^{m-1}$$
$$\sin\mu^{m-1} = \frac{n^{m-1}}{n^m}\sin\lambda^{m-1},\quad \varkappa^{m-1} = \eta^{m-1}+\mu^{m-1}-\lambda^{m-1}$$
$$\sigma^{m-1} = (p^{m-1}-q^{m-1})\frac{\sin\mu^{m-1}}{\sin\varkappa^{m-1}}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha^m\sin(\beta^m-R^{m-1}) = \mathrm{tg}\,\alpha^{m-1}\sin(\beta^{m-1}-R^{m-1})$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha^m\cos(\beta^m-R^{m-1}) = \frac{\sin\eta^{m-1}}{\cos\alpha^{m-1}}\,\mathrm{cotg}\,\varkappa^{m-1}$$

worauf die Gleichungen des m Mal gebrochenen Lichtstrahls

$$y = \sigma^{m-1}\cos R^{m-1} + (p^{m-1}-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha^m\cos\beta^m$$
$$z = \sigma^{m-1}\sin R^{m-1} + (p^{m-1}-x)\,\mathrm{tg}\,\alpha^m\sin\beta^m$$

werden, durch welche man jeden beliebigen Punkt dieses Lichtstrahls berechnen kann.

Will man ausserdem für alle brechenden Oberflächen, oder für einige derselben, die Ausdehnung kennen lernen, (die Oeffnungen der Linsen,) die ihnen gegeben werden muss, um den gegebenen Lichtstrahl durchlassen zu können, so kann dieses durch die im Art. 12 entwickelten Gleichungen geschehen, die ohne Weiteres auf jede beliebige dieser Oberflächen anwendbar sind, wenn man die darin vorkommenden Grössen mit den betreffenden Indices versieht.

15.

Als Ausnahmefälle zu den im vor. Art. zusammengestellten Gleichungen müssen diejenigen betrachtet werden, in welchen irgend eine, oder irgend zwei unmittelbar aufeinander folgende brechende Oberflächen Ebenen sind, und es ist in diesen Fällen den Entwickelungen des Art. 13 gemäss zu verfahren.

Sei die h^{te} brechende Oberfläche eine Ebene, also p^{h-1}, ϱ^{h-1}, σ^{h-1} unendlich gross, dann ist die Rechnung nach den allgemeinen Formeln fortzusetzen, bis man α^{h-1} und β^{h-1} erhalten hat, worauf zufolge des Art. 13

$$\beta^h = \beta^{h-1}$$

$$\sin\alpha^h = \frac{n^{h-1}}{n^h}\sin\alpha^{h-1}$$

$$k^{h-1}\sin(\psi^{h-1}-\beta^{h-1}) = \sigma^{h-2}\sin(R^{h-2}-\beta^{h-2})$$

$$k^{h-1}\cos(\psi^{h-1}-\beta^{h-1}) = \sigma^{h-2}\cos(R^{h-2}-\beta^{h-1}) + (p^{h-2}-q^{h-1}]\operatorname{tg}\alpha^{h-1}$$

werden. Bezieht man die Gleichungen dieses Lichtstrahls, die auch im Art. 13 gegeben sind, auf die zur $(h+1)^{\text{ten}}$ Oberfläche gehörige senkrechte Ebene, so bekommt man

$$\varrho^h\sin(R^h-\beta^h) = k^{h-1}\sin(\psi^{h-1}-\beta^h)$$

$$\varrho^h\cos(R^h-\beta^h) = k^{h-1}\cos(\psi^{h-1}-\beta^h) + (q^{h-1}-p^h)\operatorname{tg}\alpha^h$$

Wegen $\beta^h = \beta^{h-1}$ können wir aus diesen und den vorstehenden Gleichungen k^{h-1} leicht eliminiren, und erhalten dadurch sogleich

$$\varrho^h\sin(R^h-\beta^h) = \sigma^{h-2}\sin(R^{h-2}-\beta^h)$$

$$\varrho^h\cos(R^h-\beta^h) = \sigma^{h-2}\cos(R^{h-2}-\beta^h) + (p^{h-2}-q^{h-1})\operatorname{tg}\alpha^{h-1} + (q^{h-1}-p^h)\operatorname{tg}\alpha^h$$

welche ϱ^h und R^h geben, worauf die allgemeinen Gleichungen wieder anzuwenden sind.

16.

Zum oben abgehandelten Falle treten wieder zwei Ausnahmefälle hinzu, und zwar die, in welchen die h^{te} Oberfläche, die zur Ebene wird, entweder die erste oder die letzte aller vorhandenen brechenden Oberflächen ist. In Bezug auf den ersten dieser beiden Fälle braucht nichts weiteres angeführt zu werden, als dass er schon im Art. 13 abgehandelt worden ist, und in Bezug auf den letzteren Fall könnte ebenfalls auf den Art. 13 verwiesen werden, wenn es nicht deutlicher wäre, die Gleichungen ausdrücklich hinzuschreiben. Nachdem man die allgemeinen Gleichungen so weit benutzt hat, dass aus denselben α^{m-1} und β^{m-1} erlangt worden sind, werden

$$\beta^m = \beta^{m-1}$$

$$\sin\alpha^m = \frac{n^{m-1}}{n^m}\sin\alpha^{m-1}$$

$$k^{m-1}\sin(\psi^{m-1}-\beta^{m-1}) = \sigma^{m-2}\sin(R^{m-2}-\beta^{m-1})$$

$$k^{m-1}\cos(\psi^{m-1}-\beta^{m-1}) = \sigma^{m-2}\cos(R^{m-2}-\beta^{m-1}) + (p^{m-2}-q^{m-1})\operatorname{tg}\alpha^{m-1}$$

welche k^{m-1} und ψ^{m-1} geben. Die Gleichungen des nach erlittenen *m* Brechungen ausfahrenden Strahls nehmen hierauf die Form an,

$$y = k^{m-1}\cos\psi^{m-1} + (q^{m-1} - x)\operatorname{tg}\alpha^m\cos\beta^m$$
$$z = k^{m-1}\sin\psi^{m-1} + (q^{m-1} - x)\operatorname{tg}\alpha^m\sin\beta^m \quad .$$

17.

Wenn beides, die h^{te} und die $(h+1)^{te}$ brechende Oberfläche Ebenen sind, so setzen sich die eben erhaltenen Gleichungen um eine Stufe fort, es werden nemlich, wenn man wieder durch die allgemeinen Gleichungen α^{h-1} und β^{h-1} erhalten hat,

$$\beta^{h+1} = \beta^h = \beta^{h-1}$$
$$\sin\alpha^h = \frac{n^{h-1}}{n^h}\sin\alpha^{h-1}$$
$$\sin\alpha^{h+1} = \frac{n^h}{n^{h+1}}\sin\alpha^h$$

Die obigen Gleichungen für k^{h-1} und ψ^{h-1} finden wieder statt, aber die zweite Ebene fügt ihnen

$$k^h\sin(\psi^h - \beta^{h-1}) = k^{h-1}\sin(\psi^{h-1} - \beta^{h-1})$$
$$k^h\cos(\psi^h - \beta^{h-1}) = k^{h-1}\cos(\psi^{h-1} - \beta^{h-1}) + (q^{h-1} - q^h)\operatorname{tg}\alpha^h$$

hinzu, und die obigen Gleichungen für ϱ^h und k^h gehen über in

$$\varrho^{h+1}\sin(R^{h+1} - \beta^{h-1}) = k^h\sin(\psi^h - \beta^{h-1})$$
$$\varrho^{h+1}\cos(R^{h+1} - \beta^{h-1}) = k^h\cos(\psi^h - \beta^{h-1}) + (q^h - p^{h+1})\operatorname{tg}\alpha^{h+1}$$

Die Elimination von k^{h-1} und k^h aus diesen Gleichungen giebt

$$\varrho^{h+1}\sin(R^{h+1} - \beta^{h-1}) = \sigma^{h-2}\sin(R^{h-2} - \beta^{h-1})$$
$$\varrho^{h+1}\cos(R^{h+1} - \beta^{h-1}) = \sigma^{h-2}\cos(R^{h-2} - \beta^{h-1}) + (p^{h-2} - q^{h-1})\operatorname{tg}\alpha^{h-1}$$
$$+ (q^{h-1} - q^h)\operatorname{tg}\alpha^h + (q^h - p^{h+1})\operatorname{tg}\alpha^{h+1}$$

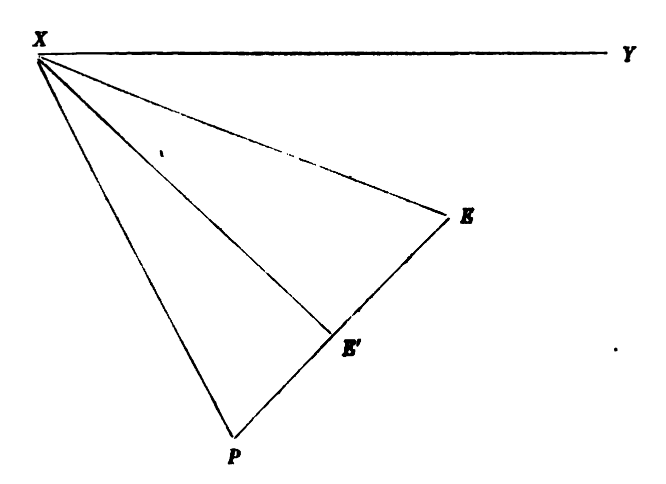
welche ϱ^{h+1} und R^{h+1} geben, worauf man wieder an die allgemeinen Gleichungen anknüpfen kann.

18.

Ausser dem im Vorstehenden entwickelten Verfahren habe ich ein anderes gefunden, welches in der Anwendung keine grössere, sondern eher noch eine etwas geringere Arbeit erfordert. Dieses soll jetzt entwickelt werden.

Um den ersten Einfallspunkt *E* des auffallenden Lichtstrahls als Mittelpunkt beschreibe man eine Kugeloberfläche von unbestimmtem

Halbmesser. Zur Abscissenachse und der Achse der y ziehe man Parallelen, die durch den Punkt E gehen, und bezeichne ihre Durchschnittspunkte mit dieser Kugeloberfläche mit X und Y, dann wird in der folgenden Figur



die Linie XY den grössten Kreis bezeichnen, in welchem die xy Ebene die Kugeloberfläche schneidet. Bezeichnet ferner in dieser Figur P den Punkt, in welchem der, nöthigen Falls verlängerte, an den Einfallspunkt gezogene Halbmesser $p-q$ der ersten brechenden Oberfläche die Kugeloberfläche schneidet, so werden der Bogen grössten Kreises XP, und der sphärische Winkel YXP

$$XP = \theta$$
$$YXP = \psi$$

sein. Bezeichnet ferner E den Punkt, in welchem der, nöthigen Falls rückwärts verlängerte, einfallende Lichtstrahl die Kugeloberfläche schneidet, so sind der Bogen grössten Kreises, und der sphärische Winkel

$$XE = \alpha$$
$$YXE = \beta$$

Lässt man den Punkt E' in Bezug auf den gebrochenen Lichtstrahl dasselbe bedeuten, wie E für den einfallenden, so sind

$$XE' = \alpha'$$
$$YXE' = \beta'$$

und setzt man

$$PE_{,} = \lambda$$
$$PE' = \mu$$

so sind λ der Einfalls- und μ der Brechungswinkel. Dem oben angeführten ersten Fundamentalsatze der Dioptrik zufolge liegen die Punkte P, E', E auf einem und demselben grössten Kreise.

19.

Sei ausserdem in der Figur des vor. Art. der sphärische Winkel

$$XEP = \chi$$

dann giebt das sphärische Dreieck XEP

$$(17) \ldots \begin{cases} \sin\lambda \sin\chi = \sin\theta \sin(\psi - \beta) \\ \sin\lambda \cos\chi = \sin\alpha \cos\theta - \cos\alpha \sin\theta \cos(\psi - \beta) \\ \cos\lambda = \cos\alpha \cos\theta + \sin\alpha \sin\theta \cos(\psi - \beta) \end{cases}$$

durch welche λ und χ gegeben werden, nachdem θ durch die Gleichung (3) erhalten worden ist. Wählt man für die Brechungsverhältnisse wieder dieselbe Bezeichnung wie oben, so wird wieder

$$(18) \ldots\ldots\ldots\ldots \sin\mu = \frac{n}{n'} \sin\lambda$$

Wenden wir uns hierauf zum sphärischen Dreiecke XEE', so erhalten wir

$$(19) \begin{cases} \sin\alpha' \sin(\beta' - \beta) = \sin(\lambda - \mu) \sin\chi \\ \sin\alpha' \cos(\beta' - \beta) = \sin\alpha \cos(\lambda - \mu) - \cos\alpha \sin(\lambda - \mu) \cos\chi \\ \cos\alpha = \cos\alpha \cos(\lambda - \mu) + \sin\alpha \sin(\lambda - \mu) \cos\chi \end{cases}$$

durch welche α' und β' erhalten werden, und die Berechnung der ersten Brechung vollständig ausgeführt ist. Denn da gleichwie im Vorhergehenden die Gleichungen des einfallenden Lichtstrahls

$$y = k \cos\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha \cos\beta$$
$$z = k \sin\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha \sin\beta$$

und die des gebrochenen

$$(20) \ldots\ldots \begin{cases} y = k \cos\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha' \cos\beta' \\ z = k \sin\psi + (a - x) \operatorname{tg}\alpha' \sin\beta' \end{cases}$$

sind, so sind durch die Gleichungen (17), (18), (19) in Verbindung mit den (3) und (4) die (20) vollständig bekannt, wenn, wie jeden Falls vorausgesetzt werden muss, die ersteren im Voraus vollständig gegeben sind.

20.

Gehen wir zu einer zweiten brechenden Oberfläche über, so erhalten wir genau dieselben Gleichungen, die hier mit der Abänderung angeführt werden sollen, dass zur Unterscheidung alle Grössen mit einem Strich, oder einem Strich mehr als vorher, versehen werden. Die Gleichungen des einfallenden Lichtstrahls werden nun

$$\left.\begin{aligned} y &= k' \cos\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha' \cos\beta' \\ z &= k' \sin\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha' \sin\beta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

und die des gebrochenen

$$\begin{aligned} y &= k' \cos\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \cos\beta'' \\ z &= k' \sin\psi' + (a' - x) \operatorname{tg}\alpha'' \sin\beta'' \end{aligned}$$

Die Gleichungen (17), (18), (19) werden

$$\left.\begin{aligned} \sin\lambda' \sin\chi' &= \sin\theta' \sin(\psi' - \beta') \\ \sin\lambda' \cos\chi' &= \sin\alpha' \cos\theta' - \cos\alpha' \sin\theta' \cos(\psi' - \beta') \\ \cos\lambda' &= \cos\alpha' \cos\theta' + \sin\alpha' \sin\theta' \cos(\psi' - \beta') \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22)$$

$$\sin\mu' = \frac{n'}{n''} \sin\lambda' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha'' \sin(\beta'' - \beta') &= \sin(\lambda' - \mu') \sin\chi' \\ \sin\alpha'' \cos(\beta'' - \beta') &= \sin\alpha' \cos(\lambda' - \mu') - \cos\alpha' \sin(\lambda' - \mu') \cos\chi' \\ \cos\alpha'' &= \cos\alpha' \cos(\lambda' - \mu') + \sin\alpha' \sin(\lambda' - \mu') \cos\chi' \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

und k, a', θ' sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} k' &= (p' - q') \sin\theta' \\ a' &= p' - (p' - q') \cos\theta' \\ &= q' + 2(p' - q') \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

mit einander verbunden.

21.

Aus den eben aufgestellten Gleichungen kann aber die durch die zweite Oberfläche bewirkte Brechung des Lichtstrahls nicht vollständig berechnet werden, da sie zur Bestimmung der Bögen λ' und χ' keine Hülfsmittel darbieten. Letztere müssen durch die Bedingung erhalten werden, dass der auf der zweiten Oberfläche einfallende Lichtstrahl mit dem durch die erste Oberfläche gebrochenen identisch ist. Es müssen folglich die Gleichungen (20) mit den (21)

identisch gemacht werden. Da in beiden Systemen schon α' und β' identisch sind, so giebt die Subtraction sogleich

$$0 = k'\cos\psi' - k\cos\psi + (a'-a)\,\mathrm{tg}\,\alpha'\cos\beta'$$
$$0 = k'\sin\psi' - k\sin\psi + (a'-a)\,\mathrm{tg}\,\alpha'\sin\beta'$$

oder wenn man k', k, a', a durch die (3), (4), und die (25) eliminirt,

$$(p'-q')\{\cos\alpha'\sin\theta'\cos\psi' - \sin\alpha'\cos\theta'\cos\beta'\} =$$
$$(p-q)\{\cos\alpha'\sin\theta\cos\psi - \sin\alpha'\cos\theta\cos\beta'\} - (p'-p)\sin\alpha'\cos\beta';$$
$$(p'-q')\{\cos\alpha'\sin\theta'\sin\psi' - \sin\alpha'\cos\theta'\sin\beta'\} =$$
$$(p-q)\{\cos\alpha'\sin\theta'\sin\psi - \sin\alpha'\cos\theta\sin\beta'\} - (p'-p)\sin\alpha'\sin\beta'$$

Durch Multiplicationen mit $\cos\beta'$ und $\sin\beta'$, und Additionen und Subtractionen können diese in die folgenden verwandelt werden,

$$(26)\;\ldots\begin{cases}(p'-q')\sin\theta'\sin(\psi'-\beta') = (p-q)\sin\theta\sin(\psi-\beta');\\ (p'-q')\{\sin\alpha'\cos\theta' - \cos\alpha'\sin\theta'\cos(\psi'-\beta')\} =\\ (p-q)\{\sin\alpha'\cos\theta - \cos\alpha'\sin\theta\cos(\psi-\beta')\} + (p'-p)\sin\alpha'\end{cases}$$

die einfacher sind, als die vorhergehenden.

22.

In den eben erhaltenen Gleichungen (26) sind θ' und ψ' die einzigen Unbekannten, und können daraus bestimmt werden, aber man kann einen Schritt weiter gehen, θ' und ψ' durch λ' und χ' eliminiren, und sogleich diese ohne Beihülfe jener daraus erhalten. Diese Gleichungen nehmen überdies dadurch eine einfachere Form an, und werden zur Anwendung geeigneter. Die Gleichungen (22) geben unmittelbar

$$(27)\;\ldots\begin{cases}\sin\theta'\sin(\psi'-\beta') = \sin\lambda'\sin\chi'\\ \sin\alpha'\cos\theta' - \cos\alpha'\sin\theta'\cos(\psi'-\beta') = \sin\lambda'\cos\chi'\end{cases}$$

und setzt man in der Figur des Art. 18 den sphärischen Winkel

$$XE'P = \omega'$$

so giebt das Dreieck $XE'P$

$$(28)\;\ldots\begin{cases}\sin\theta\sin(\psi-\beta') = \sin\mu\sin\omega'\\ \sin\alpha'\cos\theta - \cos\alpha'\sin\theta\cos(\psi-\beta') = \sin\mu\cos\omega'\end{cases}$$

womit die Gleichungen (26) sogleich in

$$(29)\;\ldots\ldots\begin{cases}\sin\lambda'\sin\chi' = \frac{p-q}{p'-q'}\sin\mu\sin\omega'\\ \sin\lambda'\cos\chi' = \frac{p-q}{p'-q'}\sin\mu\cos\omega' + \frac{p'-p}{p'-q'}\sin\alpha'\end{cases}$$

übergehen. Zu bemerken ist hiebei, dass wenn durch diese Gleichungen $\sin\lambda' > 1$ gefunden werden sollte, dieses das Kennzeichen ist, dass der Lichtstrahl die zweite brechende Oberfläche gar nicht trifft.

Ein wesentlicher Umstand ist, dass jetzt ein Theil der vorhergehenden Entwickelungen auf eine andere Gestalt gebracht werden kann. Da im Dreieck XEE' jetzt alle drei unbekannten Stücke berechnet werden müssen, so kann man sich dazu der folgenden Gleichungen bedienen,

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha'\sin\omega' &= \sin\alpha\sin\chi\\
\sin\alpha'\cos\omega' &= -\sin(\lambda-\mu)\cos\alpha+\cos(\lambda-\mu)\sin\alpha\cos\chi\\
\sin\alpha'\sin(\beta'-\beta) &= \sin(\lambda-\mu)\sin\chi\\
\sin\alpha'\cos(\beta'-\beta) &= \sin\alpha\cos(\lambda-\mu)-\cos\alpha\sin(\lambda-\mu)\cos\chi\\
\cos\alpha' &= \cos\alpha\cos(\lambda-\mu)+\sin\alpha\sin(\lambda-\mu)\cos\chi
\end{aligned}\right\}\quad(30)$$

die in Verbindung mit den (23) und den (29) ein System von Gleichungen bilden, welches für sich fortgesetzt, und auf so viele brechende Oberflächen angewandt werden kann, als man will. Statt den (30) könnte man auch die Gaussischen trigonometrischen Gleichungen anwenden, aber ich habe mich durch Proberechnungen davon überzeugt, dass im gegenwärtigen Falle dadurch keine Abkürzung der Rechnung erlangt wird, wozu namentlich der Umstand beiträgt, dass bei der Anwendung der vorstehenden Gleichungen die Bögen ω', α', χ nicht in den Tafeln aufgesucht zu werden brauchen.

Wenn nur zwei Brechungen vorhanden sind, so sind noch θ' und ψ' aus den folgenden

$$\left.\begin{aligned}
\sin\theta'\sin(\psi'-\beta') &= \sin\lambda'\sin\chi'\\
\sin\theta'\cos(\psi'-\beta') &= \sin\alpha'\cos\lambda'-\cos\alpha'\sin\lambda'\cos\chi'\\
\cos\theta' &= \cos\alpha'\cos\lambda'+\sin\alpha'\sin\lambda'\cos\chi'
\end{aligned}\right\}\quad\ldots(31)$$

die durch Umkehrung aus den (22) entstehen, so wie α'' und β'' aus den (24) zu berechnen. Sind mehr als zwei Brechungen vorhanden, so brauchen diese Gleichungen nur am Schlusse der ganzen Rechnung angewandt zu werden.

23.

Die im Vorhergehenden erhaltenen Gleichungen können auf bekannte Art durch Einführung von Hülfsbögen zusammen gezogen werden. Statt der (17) erhält man, wenn

$$\begin{aligned}
\cos\eta \sin H &= \sin\theta \cos(\psi - \beta) \\
\cos\eta \cos H &= \cos\theta \\
\sin\eta \quad &= \sin\theta \sin(\psi - \beta)
\end{aligned}$$

gesetzt werden,

$$\begin{aligned}
\sin\lambda \sin\chi &= \sin\eta \\
\sin\lambda \cos\chi &= \cos\eta \sin(\alpha - H) \\
\cos\lambda \quad &= \cos\eta \cos(\alpha - H)
\end{aligned}$$

Die (30) gehen durch die Anwendung der Hülfsbögen p, q, r über in

$$\begin{aligned}
\cos p \sin q &= \sin\alpha \cos\chi\,, & \sin\alpha' \sin\omega' \quad &= \sin p \\
\cos p \cos q &= \cos\alpha \quad\,, & \sin\alpha' \cos\omega' \quad &= \cos p \sin(q + \mu - \lambda) \\
\cos p \sin r &= \cos\alpha \sin\chi\,, & \sin\alpha' \sin(\beta' - \beta + r) &= \sin p \cos(q + \mu - \lambda) \\
\cos p \cos r &= \qquad \cos\chi\,, & \sin\alpha' \cos(\beta' - \beta + r) &= \qquad \sin(q + \mu - \lambda) \\
\sin p \quad &= \sin\alpha \cos\chi\,, & \cos\alpha' \qquad &= \cos p \cos(q + \mu - \lambda)
\end{aligned}$$

und eben so können die (31) und die (24) umgeformt werden.

Endlich können die (29) in die folgenden verwandelt werden,

$$\begin{aligned}
\sin\lambda' \sin(\chi' - \tfrac{1}{2}\omega') &= (M - N) \sin\tfrac{1}{2}\omega' \\
\sin\lambda' \cos(\chi' - \tfrac{1}{2}\omega') &= (M + N) \cos\tfrac{1}{2}\omega'
\end{aligned}$$

wenn man

$$M = \frac{p - q}{p' - q'} \sin\mu\,, \quad N = \frac{p' - p}{p' - q'} \sin\alpha'$$

setzt, jedoch scheint mir diese Transformation der (29) hier von keinem wesentlichen Nutzen zu sein, da M und N immer durch ihre Logarithmen gegeben sind.

Da in der Anwendung die Bögen α, λ, μ, θ, etc. immer klein sind, so können die obigen Umformungen noch abgekürzt werden, welches bei der Zusammenstellung geschehen soll.

Die vorkommenden Bögen können auf zweierlei Weise ausgedrückt werden. Man kann eines Theils alle Dreiecksseiten als positive Bögen betrachten, die $< 90^0$ sind, wovon die Folge ist, dass die Winkel sich durch den ganzen Umkreis erstrecken können. Anderer Seits kann man aber auch die Bestimmung treffen, dass alle Winkel im ersten Halbkreise liegen, also sich nur von 0^0 bis 180^0 erstrecken sollen, nach dieser Annahme werden die Seiten auch negativ werden können, und sich innerhalb der Grenzen $\mp 90^0$ erstrecken. Die letzte Annahme soll in der Zusammenstellung beibehalten werden.

24.

Nehmen wir jetzt wieder, wie im Artikel 14, an, dass m brechende Oberflächen vorhanden seien, und stellen die Gleichungen zusammen, durch welche die Lage des ausfahrenden Strahls bestimmt wird. Vor Allem kann man die Logarithmen der folgenden Constanten berechnen,

$$A = \frac{p-q}{p'-q'}, \quad A' = \frac{p'-q'}{p''-q''}, \quad A'' = \frac{p''-q''}{p'''-q'''}, \text{ etc. bis}$$
$$A^{m-2} = \frac{p^{m-2}-q^{m-2}}{p^{m-1}-q^{m-1}};$$
$$B = \frac{p'-p}{p'-q'}, \quad B' = \frac{p''-p'}{p''-q''}, \quad B'' = \frac{p'''-p''}{p'''-q'''}, \text{ etc. bis}$$
$$B^{m-2} = \frac{p^{m-1}-p^{m-2}}{p^{m-1}-q^{m-1}}$$

die unter allen Umständen unverändert dieselben bleiben.

Für die erste Brechung rechne man nun

$$\sin\theta = \frac{k}{p-q}, \quad \operatorname{tg} h = \operatorname{tg}\theta\cos(\psi-\beta)$$
$$\sin\lambda\sin\chi = \sin\theta\sin(\psi-\beta)$$
$$\sin\lambda\cos\chi = \frac{\cos\theta}{\cos h}\sin(\alpha-h)$$

Die Bögen θ und χ brauchen nicht aufgeschlagen zu werden, sondern man kann immer unmittelbar von $\sin\theta$ zu $\cos\theta$, und hiemit zu $\operatorname{tg}\theta$ übergehen; eben so kann man unmittelbar von $\operatorname{tg}\chi$ zu $\cos\chi$ oder $\sin\chi$ übergehen. Der Winkel h wird innerhalb der Grenzen $\mp 90^0$ angenommen, und dem $\cos\chi$ dasselbe Vorzeichen gegeben, welches $\operatorname{tg}\chi$ hat. Das Zeichen von λ folgt hieraus von selbst. Nach diesem ist blos μ durch

$$\sin\mu = \frac{n}{n'}\sin\lambda$$

zu berechnen, worauf zur zweiten Brechung übergegangen wird. Für diese rechne man zuerst

$$\operatorname{tg} q = \operatorname{tg}\alpha\cos\chi, \quad \operatorname{tg} r = \cos\alpha\operatorname{tg}\chi, \quad \operatorname{tg}(\beta'-\beta+r) = \frac{\sin\alpha\sin\chi}{\operatorname{tg}(q+\mu-\lambda)}$$
$$\operatorname{tg}\omega' = \frac{\operatorname{tg}(\beta'-\beta+r)}{\cos(q+\mu-\lambda)}\cdot\frac{\cos q}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg}(q+\mu-\lambda)}{\cos\omega'}$$

Der Bogen q wird immer zwischen $\mp 90^0$, und r nebst $\beta'-\beta+r$ zwischen 0 und 180^0 angenommen. Die Bögen ω' und α' brauchen nicht aufgeschlagen zu werden, dem $\cos\omega'$ giebt man dasselbe

Zeichen, welches $\operatorname{tg}\omega'$ hat; $\cos\alpha'$ ist immer positiv. Hierauf rechne man

$$\sin\lambda' \sin\chi' = A \sin\mu \sin\omega'$$
$$\sin\lambda' \cos\chi' = A \sin\mu \cos\omega' + B \sin\alpha'$$

und

$$\sin\mu' = \frac{n'}{n''} \sin\lambda'$$

Der Bogen χ' braucht wieder nicht aufgeschlagen zu werden, sondern man kann unmittelbar von $\operatorname{tg}\chi'$ zu $\cos\chi'$ übergehen, welcher Cosinus wieder das Vorzeichen der Tangente bekommt.

Die folgenden Brechungen werden ebenso behandelt, also für die dritte Brechung,

$$\operatorname{tg}q' = \operatorname{tg}\alpha' \cos\chi', \quad \operatorname{tg}r' = \cos\alpha' \operatorname{tg}\chi', \quad \operatorname{tg}(\beta'' - \beta' + r') = \frac{\sin\alpha' \sin\chi'}{\operatorname{tg}(q' + \mu' - \lambda')}$$

$$\operatorname{tg}\omega'' = \frac{\operatorname{tg}(\beta'' - \beta' + r')}{\cos(q' + \mu' - \lambda')} \cdot \frac{\cos q'}{\cos\alpha'}, \quad \operatorname{tg}\alpha'' = \frac{\operatorname{tg}(q' + \mu' - \lambda')}{\cos\omega''}$$

$$\sin\lambda'' \sin\chi'' = A' \sin\mu' \sin\omega''$$
$$\sin\lambda'' \cos\chi'' = A' \sin\mu' \cos\omega'' + B' \sin\alpha''$$
$$\sin\mu'' = \frac{n''}{n'''} \sin\lambda''$$

wobei die obigen Bemerkungen wieder Geltung haben. Man führt so fort bis zur letzten, oder m^{ten} Brechung, welcher ausser den Hülfsbögen q^{m-2} und r^{m-2}, die Bögen oder Winkel β^{m-1}, ω^{m-1}, α^{m-1}, χ^{m-1}, λ^{m-1}, μ^{m-1} entsprechen.

Als Schlussrechnungen kommen nun

$$\operatorname{tg}H = \frac{\operatorname{tg}\alpha^{m-1}}{\cos\chi^{m-1}}, \quad \eta = \frac{\cos\alpha^{m-1}}{\cos H} \cos\chi^{m-1}$$

$$\sin\theta^{m-1} \sin(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) = \sin\lambda^{m-1} \sin\chi^{m-1}$$
$$\sin\theta^{m-1} \cos(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) = \eta \sin(H - \lambda^{m-1})$$
$$\sin\alpha^{m} \sin(\beta^{m} - \beta^{m-1}) = \sin(\lambda^{m-1} - \mu^{m-1}) \sin\chi^{m-1}$$
$$\sin\alpha^{m} \cos(\beta^{m} - \beta^{m-1}) = \eta \sin(H - \lambda^{m-1} + \mu^{m-1})$$

welche ψ^{m-1}, θ^{m-1}, β^{m}, α^{m} geben, und man

$$k^{m-1} = (p^{m-1} - q^{m-1}) \sin\theta^{m-1}$$
$$a^{m-1} = q^{m-1} + 2(p^{m-1} - q^{m-1}) \sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-1}$$

rechnen kann. Die Gleichungen des ausfahrenden Strahls, nemlich

$$y = k^{m-1} \cos\psi^{m-1} + (a^{m-1} - x) \operatorname{tg}\alpha^{m} \cos\beta^{m}$$
$$z = k^{m-1} \sin\psi^{m-1} + (a^{m-1} - x) \operatorname{tg}\alpha^{m} \sin\beta^{m}$$

sind hiemit vollständig gegeben, und man kann ausserdem für jede beliebige Zwischenbrechung, wenn man es für nöthig hält, leicht die Werthe der dazu gehörigen θ und k berechnen.

25.

Als Ausnahmefälle sind wieder diejenigen zu betrachten, in welchen eine, oder zwei auf einander folgende brechende Oberflächen Ebenen sind, und es müssen daher wieder die dahin gehörigen particulären Gleichungen angegeben werden. Da die Entwickelung derselben fast auf dieselbe Art geführt wird, wie bei dem vorhergehenden Verfahren, so kann ich mich begnügen, sie ohne Weiteres anzusetzen.

Sei die h^{te} brechende Oberfläche eine Ebene, dann werden $\lambda^{h-1} = \alpha^{h-1}$, $\mu^{h-1} = \alpha^h$, $\chi^{h-1} = 0$, $\omega^h = 0$

$$\beta^h = \beta^{h-1}$$

$$\sin\alpha^h = \frac{n^{h-1}}{n^h}\sin\alpha^{h-1}$$

$$\sin\lambda^h \sin\chi^h = \frac{p^{h-2}-q^{h-2}}{p^h-q^h}\sin\mu^{h-2}\sin\omega^{h-1}$$

$$\sin\lambda^h\cos\chi^h = \frac{p^{h-2}-q^{h-2}}{p^h-q^h}\cdot\frac{\cos\alpha^h}{\cos\alpha^{h-1}}\sin\mu^{h-2}\cos\omega^{h-1}$$
$$+\frac{q^{h-1}-p^{h-2}}{p^h-q^h}\cos\alpha^h\operatorname{tg}\alpha^{h-1}+\frac{p^h-q^{h-1}}{p^h-q^h}\sin\alpha^h$$

worauf die allgemeinen Gleichungen wieder mit

$$\sin\mu^h = \frac{n^h}{n^{h+1}}\sin\lambda^h$$

eintreten.

26.

Wenn die erste brechende Oberfläche eine Ebene ist, so werden $\theta = 0$, $a = q$, $\chi = 0$, $\lambda = \alpha$, $\mu = \alpha'$, $\omega' = \theta$

$$\beta' = \beta$$

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'}\sin\alpha$$

$$\sin\lambda'\sin\chi' = \frac{k}{p'-q'}\sin(\psi-\beta)$$

$$\sin\lambda'\cos\chi' = -\frac{k}{p'-q'}\cos\alpha'\cos(\psi-\beta)+\frac{p'-q}{p'-q'}\sin\alpha'$$

worauf die allgemeinen Gleichungen mit

$$\sin\mu' = \frac{n'}{n''}\sin\lambda'$$

eintreten.

27.

Wenn hingegen die letzte aller brechenden Oberflächen eine Ebene ist, so muss die Rechnung nach den allgemeinen Gleichungen fortgesetzt werden, bis man β^{m-1}, ω^{m-1}, α^{m-1} erhalten hat. Da nun $\lambda^{m-1} = \alpha^{m-1}$, $\mu^{m-1} = \alpha^{m}$ und

$$\beta^{m} = \beta^{m-1}$$

werden, so ergeben sich

$$\sin\alpha^{m} = \frac{n^{m-1}}{n^{m}} \sin\alpha^{m-1}$$

$$k^{m-1}\sin(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) = (p^{m-2} - q^{m-2}) \sin\mu^{m-2} \sin\omega^{m-1}$$

$$k^{m-1}\cos(\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) = -(p^{m-2} - q^{m-2}) \frac{\sin\mu^{m-2}}{\cos\alpha^{m-1}} \cos\omega^{m-1}$$
$$+ (p^{m-2} - q^{m-1}) \operatorname{tg}\alpha^{m-1}$$

worauf schon die Gleichungen des ausfahrenden Lichtstrahls, nemlich

$$y = k^{m-1}\cos\psi^{m-1} + (q^{m-1} - x) \operatorname{tg}\alpha^{m} \cos\beta^{m-1}$$
$$z = k^{m-1}\sin\psi^{m-1} + (q^{m-1} - x) \operatorname{tg}\alpha^{m} \sin\beta^{m-1}$$

völlig bekannt sind.

28.

Wenn beides die h^{te} und die $(h+1)^{\text{te}}$ brechenden Oberflächen Ebenen sind, so werden

$$\beta^{h+1} = \beta^{h} = \beta^{h-1}$$

$$\sin\alpha^{h} = \frac{n^{h-1}}{n^{h}} \sin\alpha^{h-1}$$

$$\sin\alpha^{h+1} = \frac{n^{h}}{n^{h+1}} \sin\alpha^{h}$$

$$\sin\lambda^{h+1} \sin\chi^{h+1} = \frac{p^{h-2} - q^{h-2}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \sin\mu^{h-2} \sin\omega^{h-1}$$

$$\sin\lambda^{h+1} \cos\chi^{h+1} = \frac{p^{h-2} - q^{h-2}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cdot \frac{\cos\alpha^{h+1}}{\cos\alpha^{h-1}} \sin\mu^{h-2} \cos\omega^{h-1}$$
$$+ \frac{q^{h-1} - p^{h-2}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cos\alpha^{h+1} \operatorname{tg}\alpha^{h-1}$$
$$+ \frac{q^{h} - q^{h-1}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cos\alpha^{h+1} \operatorname{tg}\alpha^{h} + \frac{p^{h+1} - q^{h}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \operatorname{tg}\alpha^{h+1}$$

worauf die allgemeinen Gleichungen mit

$$\sin\mu^{h+1} = \frac{n^{h+1}}{n^{h+2}} \sin\lambda^{h+1}$$

eintreten.

29.

Der Fall, in welchem der einfallende Lichtstrahl und die Abscissenachse in Einer Ebene liegen, führt auf beträchtliche Vereinfachung der im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen, und sowohl deshalb als aus dem Grunde, dass er in den Anwendungen am Häufigsten vorkommt, soll er hier besonders behandelt werden. Da in diesem Falle alle gebrochenen Strahlen in derselben Ebene liegen, in welcher sich der einfallende befindet, so können wir diese Ebene zur Ebene der xy machen, und von der zweiten Ordinate z ganz absehen. Die beiden Gleichungen des Lichtstrahls, die im Vorhergehenden aufgestellt werden mussten, reduciren sich daher auf Eine, und da, wenn $z = 0$ gesetzt wird, $\beta = 0$ und $\psi = 0$ werden, so kann die Gleichung des Lichtstrahls vor der ersten Brechung in der Form

$$y = k + (a - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

aufgestellt werden, und ähnliche Formen nehmen die Gleichungen der gebrochenen Lichtstrahlen an.

Es ist zu bemerken, dass man hier jedenfalls α immer positiv annehmen kann, nur muss man, wenn der Durchschnittspunkt des einfallenden Lichtstrahls mit der Abscissenachse einer Abscisse entspricht, die $> q$ auch k positiv, so wie wenn die bezeichnete Abscisse $< q$ ist, k negativ nehmen. Die Gleichungen für den gegenwärtigen Fall können aus den vorstehenden Entwickelungen des allgemeinen Falles abgeleitet werden, und es ist gleichgültig, welche der zwei entwickelten Verfahrungsarten hiebei zu Grunde gelegt wird, da beide im gegenwärtigen Falle auf dieselben Gleichungen führen.

30.

Es ist jetzt immer noch

$$\begin{aligned} a &= p - (p - q)\cos\theta \\ &= q + 2\,(p - q)\sin^2\tfrac{1}{2}\theta \end{aligned}$$

$$\sin\theta = \frac{k}{p - q}$$

aber da jetzt $\psi = \beta = \beta' = \chi = 0$ sind, so geben die (17) und (19)

$$\lambda = \alpha - \theta\,, \quad \mu = \alpha' - \theta$$

und folglich wird

$$\sin(\alpha' - \theta) = \frac{n}{n'} \sin(\alpha - \theta)$$

welche α', und damit die Gleichung des ein Mal gebrochenen Lichtstrahls, nemlich

$$y = k + (a - x) \operatorname{tg} \alpha'$$

giebt. Da nun für die zweite Brechung auch

$$\lambda' = \alpha' - \theta' \; , \quad \mu' = \alpha'' - \theta'$$

werden, und auch $\omega' = 0$ ist, so geben die (29) und die (23) sogleich

$$\sin(\alpha' - \theta') = \frac{p - q}{p' - q'} \sin(\alpha' - \theta) + \frac{p' - p}{p' - q'} \sin \alpha'$$

woraus θ' hervorgeht, und

$$\sin(\alpha'' - \theta') = \frac{n'}{n''} \sin(\alpha' - \theta')$$

welche α'' giebt. Da nun

$$k' = (p' - q') \sin \theta'$$
$$a' = q' + 2(p' - q') \sin^2 \tfrac{1}{2} \theta'$$

sind, so ist auch die Gleichung des zwei Mal gebrochenen Lichtstrahls, nemlich

$$y = k' + (a' - x) \operatorname{tg} \alpha''$$

bekannt. Der Cyclus der Gleichungen ist hiemit schon geschlossen, und die vorstehenden können ohne Weiteres auf eine beliebige Anzahl von Brechungen angewandt werden.

31.

Seien wieder m Brechungen vorhanden, dann sind wieder, wie im allgemeinen Falle, die Logarithmen der Constanten

$$A = \frac{p - q}{p' - q'} \, , \quad A' = \frac{p' - q'}{p'' - q''} \, , \quad A'' = \frac{p'' - q''}{p''' - q'''} \, , \text{ etc. bis}$$
$$A^{m-2} = \frac{p^{m-2} - q^{m-2}}{p^{m-1} - q^{m-1}} \; ;$$

$$B = \frac{p' - p}{p' - q'} \, , \quad B' = \frac{p'' - p'}{p'' - q''} \, , \quad B'' = \frac{p''' - p''}{p''' - q'''} \, , \text{ etc. bis}$$
$$B^{m-2} = \frac{p^{m-1} - p^{m-2}}{p^{m-1} - q^{m-1}}$$

zu rechnen, worauf die folgenden Gleichungen anzuwenden sind,

$$\sin\theta = \frac{k}{p-q}$$

$$\sin(\alpha'-\theta) = \frac{n}{n'}\sin(\alpha-\theta)$$

$$\sin(\alpha'-\theta') = A\sin(\alpha'-\theta) + B\sin\alpha'$$

$$\sin(\alpha''-\theta') = \frac{n'}{n''}\sin(\alpha'-\theta')$$

$$\sin(\alpha''-\theta'') = A'\sin(\alpha''-\theta') + B'\sin\alpha''$$

$$\sin(\alpha'''-\theta'') = \frac{n''}{n'''}\sin(\alpha''-\theta'')$$

u. s. w. bis

$$\sin(\alpha^{m-1}-\theta^{m-1}) = A^{m-2}\sin(\alpha^{m-1}-\theta^{m-2}) + B^{m-2}\sin\alpha^{m-1}$$

$$\sin(\alpha^{m}-\theta^{m-1}) = \frac{n^{m-1}}{n^m}\sin(\alpha^{m-1}-\theta^{m-1})$$

Man kann bemerken, dass jede hinzukommende brechende Oberfläche die Berechnung von solchen zwei Gleichungen, wie die vorstehenden, verlangt.

Als Schlussrechnung sind hierauf nur noch

$$k^{m-1} = (p^{m-1}-q^{m-1})\sin\theta^{m-1}$$

$$a^{m-1} = q^{m-1} + 2(p^{m-1}-q^{m-1})\sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-1}$$

zu berechnen, worauf die Gleichung

$$y = k^{m-1} + (a^{m-1}-x)\operatorname{tg}\alpha^m$$

des Lichtstrahls nach der letzten Brechung völlig bekannt ist. Für irgend einen Werth der Ordinate y bekommt man

$$x = a^{m-1} + \frac{k^{m-1}-y}{\operatorname{tg}\alpha^m}$$

und bezeichnet man mit ξ^m den Werth der Abscisse, welcher dem Durchschnittspunkt des ausfahrenden Lichtstrahls mit der Abscissenachse angehört, so wird

$$\xi^m = a^{m-1} + \frac{k^{m-1}}{\operatorname{tg}\alpha^m}$$

32.

Wenn die h^{te} brechende Oberfläche eine Ebene ist, so tritt in den allgemeinen Gleichungen des vor. Art. die Aenderung ein, dass nachdem der Winkel α^{h-1} erhalten worden ist, man

$$\sin\alpha^h = \frac{n^{h-1}}{n^h}\sin\alpha^{h-1}$$

und darauf durch

$$\sin(\alpha^h - \theta^h) = \frac{p^{h-2} - q^{h-2}}{p^h - q^h} \cdot \frac{\cos\alpha^h}{\cos\alpha^{h-1}} \sin(\alpha^{h-1} - \theta^{h-2})$$
$$+ \frac{q^{h-1} - p^{h-2}}{p^h - q^h} \cos\alpha^h \operatorname{tg}\alpha^{h-1} + \frac{p^h - q^{h-1}}{p^h - q^h} \sin\alpha^h$$

den Winkel θ^h erhält, worauf die allgemeinen Gleichungen wieder anzuwenden sind.

Wenn die Ebene die erste brechende Oberfläche ist, bekommt man $\theta = 0$, $a = q$,

$$\sin\alpha' = \frac{n}{n'} \sin\alpha$$

$$\sin(\alpha' - \theta') = \frac{p' - q}{p' - q'} \sin\alpha' - \frac{k}{p' - q'} \cos\alpha'$$

worauf die allgemeinen Gleichungen eintreten.

Wenn die Ebene die letzte brechende Oberfläche ist, so werden die allgemeinen Gleichungen angewandt, bis man α^{m-1} erhalten hat, worauf

$$\sin\alpha^m = \frac{n^{m-1}}{n^m} \sin\alpha^{m-1}$$

$$k^{m-1} = -(p^{m-2} - q^{m-2}) \frac{\sin(\alpha^{m-1} - \theta^{m-2})}{\cos\alpha^{m-1}} + (p^{m-2} - q^{m-1}) \operatorname{tg}\alpha^{m-1}$$

zu berechnen sind, und die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls

$$y = k^{m-1} + (q^{m-1} - x) \operatorname{tg}\alpha^m$$

wird.

33.

Wenn beides, die h^{te} und die $(h+1)^{te}$ brechende Oberfläche Ebenen sind, so werden wieder die Rechnungen nach den allgemeinen Gleichungen fortgesetzt, bis man α^{h-1} erhalten hat. Hierauf werden

$$\sin\alpha^h = \frac{n^{h-1}}{n^h} \sin\alpha^{h-1}$$

$$\sin\alpha^{h+1} = \frac{n^h}{n^{h+1}} \sin\alpha^h$$

$$\sin(\alpha^{h+1} - \theta^{h+1}) = \frac{p^{h-2} - q^{h-2}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cdot \frac{\cos\alpha^{h+1}}{\cos\alpha^{h-1}} \sin(\alpha^{h-1} - \theta^{h-2})$$
$$+ \frac{q^{h-1} - p^{h-2}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cos\alpha^{h+1} \operatorname{tg}\alpha^{h-1}$$
$$+ \frac{q^h - q^{h-1}}{p^{h+1} - q^{h+1}} \cos\alpha^{h+1} \operatorname{tg}\alpha^h + \frac{p^{h+1} - q^h}{p^{h+1} - q^{h+1}} \sin\alpha^{h+1}$$

worauf wieder die Rechnung durch die allgemeinen Gleichungen fortgesetzt wird.

Die Fälle, in welchen die beiden Ebenen entweder die ersten oder die letzten aller vorhandenen brechenden Oberflächen sind, werden wohl in den Anwendungen nie vorkommen, und sollen daher hier nicht besonders betrachtet werden. Uebrigens ist es ein Leichtes, die Gleichungen dafür aus den obigen abzuleiten.

---

§ 2.

Entwickelung der Ausdrücke zur Berechnung der Lage der centralen Lichtstrahlen nach einer unbestimmten Anzahl von Brechungen.

Erster Theil.

Betrachtung der einzelnen Brechungen.

34.

Unter den centralen Lichtstrahlen verstehe ich diejenigen, welche so nahe an der Abscissenachse auf die brechenden Oberflächen auffallen, und mit dieser Achse so kleine Winkel machen, dass man sie ihren Sinussen oder Tangenten gleich setzen darf. Es werden daher im Folgenden die Tangenten oder die Sinusse der Winkel α, θ, λ, μ, etc. diesen Winkeln selbst gleich gesetzt werden. Dieser Fall ist früher ausschliesslich oder doch fast ausschliesslich in der Dioptrik behandelt worden, und auch Gauss und Möbius haben blos diesen Fall ihren dioptrischen Untersuchungen zu Grunde gelegt. Er reicht in der That, wenn man ihn zweckmässig verwendet, in vielen Fällen aus, um gewisse Gattungen der dioptrischen und catoptrischen Instrumente, welche im Gebrauch sind, berechnen zu können.

Am Vollkommensten, aber freilich sehr kurz abgefasst, hat Gauss diesen Fall in seinen »Dioptrischen Untersuchungen« entwickelt, und ich werde in der gegenwärtigen Abhandlung, mit Ausnahme der Abkürzungen, Weglassungen und Zusätze, die mir zu meinem Zwecke geboten schienen, jener eben genannten Abhandlung folgen.

35.

Bezeichnen wir mit l und m die Winkel, welche die Projectionen des einfallenden Lichtstrahls mit den Ebenen der xy und der xz machen, und führen b und c wieder statt $k\cos\psi$ und $k\sin\psi$ ein, so werden vor Allem

$$\operatorname{tg} l = \operatorname{tg}\alpha\cos\beta$$
$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg}\alpha\sin\beta$$

und die Gleichungen des einfallenden Lichtstrahls gehen über in

$$y = b + (a - x)\operatorname{tg} l$$
$$z = c + (a - x)\operatorname{tg} m$$

so wie die des ein Mal gebrochenen in

$$y = b + (a - x)\operatorname{tg} l'$$
$$z = c + (a - x)\operatorname{tg} m'$$

wo l' und m' in Bezug auf diesen Lichtstrahl dieselbe Bedeutung haben, wie l und m in Bezug auf jenen. Nehmen wir wieder die durch den Mittelpunkt p der ersten brechenden Oberfläche senkrecht auf die Abscissenachse gelegte Ebene zu Hülfe, so sind zu Folge des Art. 6 die Coordinaten des Durchschnittspunkts des einfallenden Lichtstrahls mit dieser Ebene

$$x = p\,, \quad y = \varrho\cos R\,, \quad z = \varrho\sin R$$

und die des gebrochenen

$$x = p\,, \quad y = \sigma\cos R\,, \quad z = \sigma\sin R$$

Die obigen Gleichungen geben daher

$$\varrho\cos R = b + (a - p)\operatorname{tg} l$$
$$\varrho\sin R = c + (a - p)\operatorname{tg} m$$
$$\sigma\cos R = b + (a - p)\operatorname{tg} l'$$
$$\sigma\sin R = c + (a - p)\operatorname{tg} m'$$

aus welchen die Gleichungen

$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{b + (a - p)\operatorname{tg} l'}{b + (a - p)\operatorname{tg} l}$$
$$\frac{\sigma}{\varrho} = \frac{c + (a - p)\operatorname{tg} m'}{c + (a - p)\operatorname{tg} m}$$

entstehen.

36.

Die Elimination von λ und μ zwischen den Gleichungen (10), (11), (13) des Art. 9 giebt

$$\sigma = \varrho \frac{n}{n'} \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa}$$

womit man aus den Gleichungen, die im vor. Art. erhalten wurden,

$$\frac{n}{n'} \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa} = \frac{b + (a-p)\,\mathrm{tg}\, l'}{b + (a-p)\,\mathrm{tg}\, l} = \frac{c + (a-p)\,\mathrm{tg}\, m'}{c + (a-p)\,\mathrm{tg}\, m}$$

oder

$$n' \,\mathrm{tg}\, l' = \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa} n \,\mathrm{tg}\, l + \frac{b}{a-p}\left(n \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa} - n'\right)$$

$$n' \,\mathrm{tg}\, m' = \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa} n \,\mathrm{tg}\, m + \frac{c}{a-p}\left(n \frac{\sin \eta}{\sin \varkappa} - n'\right)$$

erhält. Da hier α und α' kleine Grössen erster Ordnung sind, so sind l, m, l', m' auch kleine Grössen der ersten Ordnung, und das Vorhergehende zeigt, dass aus diesem Grunde η und $\varkappa$ vom rechten Winkel nur um Grössen erster Ordnung, folglich ihre Sinusse von der Einheit nur um Grössen zweiter Ordnung verschieden sind. Da ferner

$$a = q + 2(p-q)\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

und θ auch eine kleine Grösse erster Ordnung ist, so ist a von q nur um eine kleine Grösse zweiter Ordnung verschieden. Die eben erhaltenen Gleichungen geben also bis auf Grössen dritter Ordnung

$$n'l' = nl + \frac{n'-n}{p-q} b$$

$$n'm' = nm + \frac{n'-n}{p-q} c$$

welche als das erste Paar der Fundamentalgleichungen der gegenwärtigen Aufgabe bezeichnet werden können.

Um das zweite Paar zu erhalten, wenden wir uns zu dem Art. 21, und schreiben auch b' und c' bez. statt $k' \cos \psi'$ und $k' \sin \psi'$, worauf wir sogleich

$$b' = b + (a - a')\,\mathrm{tg}\, l'$$

$$c' = c + (a - a')\,\mathrm{tg}\, m'$$

oder bis auf Grössen dritter Ordnung

$$b' = b + (q - q')\, l'$$

$$c' = c + (q - q')\, m'$$

erhalten. Diese sind das zweite Paar der Fundamentalgleichungen.

Wenn man diese beiden Paare betrachtet, so zeigt sich, dass die beiden Gleichungen eines jeden derselben durchaus von einander unabhängig sind, und nicht in einander greifen, wie bei der allgemeinen Aufgabe der Fall war. Wir brauchen daher von jedem Paar nur die eine den Entwickelungen zu Grunde zu legen, da die andere auf dieselben Resultate führen muss. Wir können noch einen Schritt weiter gehen, und in diesen Fundamentalgleichungen ohne Unterschied

$$\begin{array}{llll} \alpha & \text{statt} & l & \text{und } m \\ \alpha' & — & l' & — \; m' \\ k & — & b & — \; c \\ k' & — & b' & — \; c' \end{array}$$

schreiben, wenn wir uns nur erinnern, dass hierauf α, α', k, k' für alle Lichtstrahlen, die mit der Abscissenachse in einer und derselben Ebene liegen, zwar die nemlichen Bedeutungen haben wie vorher, aber für die Lichtstrahlen, die nicht mit der Abscissenachse in Einer Ebene liegen, nach einander die zwei Bedeutungen annehmen, die eben erklärt wurden. Auf die Resultate ist dieses gänzlich ohne Einfluss.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\gamma = n\alpha\,, \quad \gamma' = n'\alpha'$$

so werden unsere beiden Fundamentalgleichungen

$$\gamma' = \gamma + \frac{n'-n}{p-q}\,k$$
$$k' = k + \frac{q-q'}{n'}\,\gamma'$$

Die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls wird

$$y = (q-x)\,\frac{\gamma}{n} + k$$

und die des ein Mal gebrochenen

$$y = (q-x)\,\frac{\gamma'}{n'} + k$$

37.

Die beiden Fundamentalgleichungen des vor. Art. lassen sich, wenn man sie fortsetzt, auf jede beliebige Anzahl von Brechungen ausdehnen. Setzt man zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{n'-n}{p-q} & & \\
u' &= \frac{n''-n'}{p'-q'} & t' &= \frac{q-q'}{n'} \\
u'' &= \frac{n'''-n''}{p''-q''} & t'' &= \frac{q'-q''}{n''} \\
u''' &= \frac{n^{IV}-n'''}{p'''-q'''} & t''' &= \frac{q''-q'''}{n'''} \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

so werden sie

$$
\begin{aligned}
\gamma' &= \gamma + uk & & \\
\gamma'' &= \gamma' + u'k' & k' &= t'\gamma' + k \\
\gamma''' &= \gamma'' + u''k'' & k'' &= t''\gamma'' + k' \\
\gamma^{IV} &= \gamma''' + u'''k''' & k''' &= t'''\gamma''' + k'' \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Man sieht sogleich, dass jedes Paar dieser Grössen sich durch die Elimination zu linearischen Functionen der beiden ersten derselben, nemlich γ und k, machen lässt. Stellen wir, um vollständige Gleichförmigkeit zu erlangen, die erste derselben unter der Form

$$\gamma' = B\gamma + Ak$$

auf, wo also $B = 1$ und $A = u$ sind, so muss sich ergeben

$$
\begin{aligned}
\gamma' &= B\gamma + Ak & k' &= B'\gamma + A'k \\
\gamma'' &= B''\gamma + A''k & k'' &= B'''\gamma + A'''k \\
\gamma''' &= B^{IV}\gamma + A^{IV}k & k''' &= B^{V}\gamma + A^{V}k \\
\gamma^{IV} &= B^{VI}\gamma + A^{VI}k & & \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

und die Ausführung dieser Eliminationen führt für die verschiedenen A und B auf die folgenden einfachen und regelmässigen Ausdrücke

$$
\begin{aligned}
A &= u & B &= 1 \\
A' &= t'A + 1 & B' &= t' \\
A'' &= u'A' + A & B'' &= u'B' + B \\
A''' &= t''A'' + A' & B''' &= t''B'' + B' \\
A^{IV} &= u''A''' + A'' & B^{IV} &= u''B''' + B'' \\
A^{V} &= t'''A^{IV} + A''' & B^{V} &= t'''B^{IV} + B''' \\
A^{VI} &= u'''A^{V} + A^{IV} & B^{VI} &= u'''B^{V} + B^{IV} \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Alle diese Ausdrücke sind für vier Brechungen vollständig hingeschrieben, aber sie sind so einfach und regelmässig, dass man sie ohne die mindeste Schwierigkeit auf jede beliebige Anzahl von Brechungen ausdehnen kann. Seien im Ganzen m brechende Oberflächen, also auch m Brechungen vorhanden, dann werden für die letzte Brechung

$$(32) \quad \begin{cases} k^{m-1} = B^{2m-3}\gamma + A^{2m-3}k \\ \gamma^{m} = B^{2m-2}\gamma + A^{2m-2}k \end{cases}$$

die letzten zu berechnenden Grössen, und

$$A^{2m-3} = t^{m-1}A^{2m-4} + A^{2m-5}$$
$$A^{2m-2} = u^{m-1}A^{2m-3} + A^{2m-4}$$

so wie

$$B^{2m-3} = t^{m-1}B^{2m-4} + B^{2m-5}$$
$$B^{2m-2} = u^{m-1}B^{2m-3} + B^{2m-4}$$

die letzten zu berechnenden Coefficienten.

38.

Die Verhältnisse von je zwei auf einander folgenden A und B lassen sich durch Kettenbrüche ausdrücken. Man findet leicht die folgenden, die man beliebig fortsetzen kann,

$$\frac{A}{A'} = \frac{1}{t'} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{A'}{A''} = \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{A''}{A'''} = \frac{1}{t''} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u}$$

$$\frac{A'''}{A^{IV}} = \frac{1}{u''} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u}$$

etc.

Diese haben alle dasselbe Endglied, aber das Anfangsglied wächst in der Reihenfolge u, t', u', t'', u'', etc. der Elemente stets um Ein Element, ferner

$$\frac{B}{B'} = \frac{1}{t'}$$

$$\frac{B'}{B''} = \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'}$$

$$\frac{B''}{B'''} = \frac{1}{t''} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'}$$

$$\frac{B'''}{B^{n}} = \frac{1}{u''} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t'}$$

etc.

Diese Kettenbrüche haben bei gleichen Indices dieselben Anfangsglieder wie die vorhergehenden, aber das erste Element u kommt in keiner derselben vor, und sie haben also immer ein Glied weniger, als jene.

Ich führe noch die folgenden Kettenbrüche an,

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{u}$$

$$\frac{B'}{A'} = \frac{1}{u} + \frac{1}{t'}$$

$$\frac{B''}{A''} = \frac{1}{u} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u'}$$

$$\frac{B'''}{A'''} = \frac{1}{u} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t''}$$

$$\frac{B^{n}}{A^{n}} = \frac{1}{u} + \frac{1}{t'} + \frac{1}{u'} + \frac{1}{t''} + \frac{1}{u''}$$

etc.

in welchen die Elemente in entgegengesetzter Ordnung eintreten.

39.

Von den verschiedenen Relationen, die zwischen den A und B stattfinden, brauchen wir hier nur Eine abzuleiten. Führen wir den allgemeinen Index m ein, so zeigen die im Art. 37 zwischen je drei auf einander folgenden A und B erhaltenen Relationen, dass sie, mit Ausnahme der ersten, durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden können,

$$A^{2m} = u^m A^{2m-1} + A^{2m-2}$$
$$B^{2m} = u^m B^{2m-1} + B^{2m-2}$$

und

$$A^{2m-1} = t^m A^{2m-2} + A^{2m-3}$$
$$B^{2m-1} = t^m B^{2m-2} + B^{2m-3}$$

woraus durch die Elimination von u^m und t^m erhalten werden

$$A^{2m} B^{2m-1} - A^{2m-1} B^{2m} = -\{A^{2m-1} B^{2m-2} - A^{2m-2} B^{2m-1}\}$$
$$A^{2m-1} B^{2m-2} - A^{2m-2} B^{2m-1} = -\{A^{2m-2} B^{2m-3} - A^{2m-3} B^{2m-2}\}$$

Diese Gleichungen können rückwärts fortgesetzt werden bis man auf

$$A''B' - A'B'' = -(A'B - AB')$$

kommt, aber die Ausdrücke für A, A', B, B' des Art. 37 geben

$$A'B - AB' = 1$$

und aus der Verbindung dieser mit dem Vorhergehenden folgt allgemein:

$$(33) \quad \ldots\ldots \begin{cases} A^{2m} B^{2m-1} - A^{2m-1} B^{2m} = -1 \\ A^{2m-1} B^{2m-2} - A^{2m-2} B^{2m-1} = 1 \end{cases}$$

Eliminirt man nun nach einander k und γ aus den Gleichungen (32), so bekommt man in Folge der vorstehenden

$$(34) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \gamma = A^{2m-3} \gamma^m - A^{2m-2} k^{m-1} \\ k = -B^{2m-3} \gamma^m + B^{2m-2} k^{m-1} \end{cases}$$

die das Entgegengesetzte der (32) sind, indem sie γ und k durch Hülfe von γ^m und k^{m-1} geben, während die (32) diese Grössen durch Hülfe jener geben.

40.

Betrachten wir auf der graden Linie, die der Lichtstrahl vor der ersten Brechung beschreibt, einen bestimmten Punkt, den ich Q nennen will, und dessen Coordinaten mit ξ und η bezeichnet werden sollen. Für diesen Punkt giebt die Gleichung des Lichtstrahls vor der ersten Brechung

$$(35) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad n\eta = (q - \xi)\gamma + nk$$

Nehmen wir an, dass vom Punkt Q eine Anzahl von Lichtstrahlen nach verschiedenen Richtungen ausgehen, die die brechenden

Oberflächen in Punkten schneiden, die von der Achse derselben nicht allzuweit entfernt sind, so werden für jeden dieser Lichtstrahlen beides γ und k verschiedene Werthe bekommen, und die Folge davon ist, dass in der allgemeinen Gleichung des Lichtstrahls nach der letzten Brechung, nemlich in

$$n^m y = (q^{m-1} - x)\gamma^m + n^m k^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

auch γ^m und k^{m-1} für jeden dieser Lichtstrahlen verschiedene Werthe annehmen, und folglich jeder derselben nach der letzten Brechung eine andere grade Linie beschreibt. Zufolge der oben erhaltenen Abhängigkeit zwischen γ und k einerseits, und γ^m und k^{m-1} andrerseits lässt sich aber die Gleichung des ausfahrenden Strahls in Function des einfallenden darstellen, und umgekehrt. Die Elimination von γ und k aus der (35) durch die (34) giebt

$$n\eta = (\xi - q)\,\{A^{2m-2}k^{m-1} - A^{2m-3}\gamma^m\}$$
$$+ n\,\{B^{2m-2}k^{m-1} - B^{2m-3}\gamma^m\}$$

und durch die Elimination von k^{m-1} aus dieser durch Hülfe der (36) erhält man

$$n^m y\,\{nB^{2m-2} + (\xi - q)\,A^{2m-2}\} =$$
$$\gamma^m\{n^m B^{2m-3} + n^m(\xi - q)\,A^{2m-3} + [nB^{2m-2} + (\xi - q)\,A^{2m-2}]\,(q^{m-1} - x)\}$$
$$+ nn^m\eta$$

welche Gleichung sich wie folgt stellen lässt,

$$n^m y = (\xi^m - x)\,\gamma^m + n^m\eta^m \quad \ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

nachdem

$$\left.\begin{aligned} \xi^m &= q^{m-1} + n^m\frac{nB^{2m-3} + (\xi - q)A^{2m-3}}{nB^{2m-2} + (\xi - q)A^{2m-2}} \\ \eta^m &= \frac{n\eta}{nB^{2m-2} + (\xi - q)A^{2m-2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

gesetzt worden sind. Die Gleichung (37) zeigt, dass ξ^m und η^m die Coordinaten eines gewissen, gemeinschaftlichen Punkts aller Graden ist, die die vom Punkt Q ausgehenden Lichtstrahlen nach der letzten Brechung beschreiben, denn da die Ausdrücke (38) von γ^m und k^{m-1} unabhängig sind, so gehört der durch sie bestimmte Punkt allen diesen Lichtstrahlen an. Mit anderen Worten, bezeichnet man den durch die Coordinaten ξ^m und η^m bestimmten Punkt mit Q^m, so vereinigen sich alle von Q ausgehenden Lichtstrahlen nach der m^{ten} Brechung im Punkt Q^m.

Man kann diesen Satz umkehren. Nimmt man an, dass die Lichtstrahlen sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, so vereinigen sich alle von Q^m ausgehenden Strahlen nach der m^{ten} Brechung in Q.

Es gehöre nun der Punkt Q irgend einem Gegenstande an, so verursachen die m Brechungen, dass sich im Punkt Q^m das Bild dieses Gegenstandes zeigt, und umgekehrt.

Damit aber Bild und Gegenstand real seien, ist erforderlich, dass sie bez. im ersten und im letzten Mittel liegen, und diese Bedingungen werden, wie man leicht erkennt, durch die Ungleichheiten

$$\xi < q\,, \quad \text{und} \quad \xi^m > q^{m-1}$$

ausgedrückt. Sind entweder Eine dieser Ungleichheiten, oder sind beide nicht erfüllt, so werden im ersten Falle entweder Gegenstand oder Bild, und im zweiten Falle beide nicht real, während ihre im Vorhergehenden erklärte geometrische Bedeutung unverändert dieselbe bleibt.

Nehmen wir im ersten Mittel einen zweiten Punkt $Q_{,}$ an, für welchen ξ unverändert bleibt, aber η in $\eta_{,}$ übergeht, so zeigen die (38), dass auch ξ^m unverändert bleibt, und in Bezug auf die Ordinate, wenn sie mit $\eta^m_{,}$ bezeichnet wird, das Verhältniss

$$\eta^m_{,} : \eta^m = \eta_{,} : \eta$$

statt findet. Dehnt man daher den Punkt Q zu einem begrenzten, ebenen Gegenstande aus, welcher senkrecht auf der Abscissenachse steht, so liegt das Bild desselben auch in einer Ebene, die jener parallel ist, und dieses Bild ist in allen seinen Punkten dem Gegenstande proportional. Die einzelnen Theile dieses Bildes haben entweder die gleiche, oder die entgegengesetzte Lage in Bezug auf die einzelnen Theile des Gegenstandes. Jener Fall tritt ein, wenn η^m und η, und folglich auch $\eta^m_{,}$ und $\eta_{,}$ dasselbe Zeichen haben, dieser, wenn diese Ordinaten entgegengesetzte Zeichen haben. Mit andern Worten, das Bild ist ein aufrechtes, wenn der Coefficient von η in der zweiten Gleichung (38) positiv, und ein umgekehrtes, wenn dieser Coefficient negativ ist.

Da das Verhältniss $\eta^m : \eta$ jedenfalls das linearische Verhältniss

der Grösse des Bildes zur Grösse des Gegenstandes ausdrückt, so ist, allgemein zu reden, der absolute Werth der Zahl

$$\frac{n}{nB^{2m-2} + (\xi - q)A^{2m-2}}$$

die durch das System brechender Oberflächen bewirkte Vergrösserung des Gegenstandes. Wenn diese Zahl > 1 ist, so findet in der That eine Vergrösserung statt, ist sie aber < 1, so findet eine Verkleinerung statt.

41.

Die Gleichung (35) giebt, da $\gamma = n\alpha$ ist,

$$q - \xi = \frac{\eta - k}{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

eliminirt man hiemit $q - \xi$ aus den (38), so erhält man

$$\xi^{m} = q^{m-1} + n^{m}\frac{\alpha n B^{2m-3} - (\eta - k)A^{2m-3}}{\alpha n B^{2m-2} - (\eta - k)A^{2m-2}}$$

$$\eta^{m} = \frac{\alpha n \eta}{\alpha n B^{2m-2} - (\eta - k)A^{2m-2}}$$

Setzt man jetzt

$$\alpha = 0$$

so bezeichnet dieses, dass alle Lichtstrahlen parallel mit der Abscissenachse einfallen, und es ergiebt sich in diesem Falle

$$\xi^{m} = q^{m-1} + n^{m}\frac{A^{2m-3}}{A^{2m-2}}$$

$$\eta^{m} = 0$$

Alle mit der Abscissenachse parallel einfallenden Lichtstrahlen vereinigen sich also nach den Brechungen in der Abscissenachse, und nennen wir diesen Vereinigungspunkt den Brennpunkt des Systems von brechenden Oberflächen, so ist die Abscisse des Brennpunkts dem vorstehenden Werthe von ξ^{m} gleich. Die Entfernung des Brennpunkts von der letzten Oberfläche wird

$$\xi^{m} - q^{m-1} = n^{m}\frac{A^{2m-3}}{A^{2m-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

und es müssen folglich, damit der Brennpunkt real werde, A^{2m-3} und A^{2m-2} gleiche Zeichen haben.

Es habe jetzt für alle einfallenden Lichtstrahlen α wieder einen und denselben, aber von der Null verschiedenen Werth, so muss sich nothwendiger Weise der Gegenstand wieder in unendlich grosser Entfernung befinden, und demzufolge

$$\eta = \infty$$

sein. Der Gegenstand liegt nicht mehr in der Abscissenachse, sondern alle von demselben ausgehenden Lichtstrahlen machen, vor der ersten Brechung mit dieser den Winkel α. Die vorstehenden allgemeinen Ausdrücke für ξ^m und η^m geben in diesem Falle

$$\xi^m = q^{m-1} + n^m \frac{A^{2m-3}}{A^{2m-2}}$$

gleichwie im vorhergehenden Falle, aber es wird jetzt

$$(41) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \eta^m = -\frac{n\alpha}{A^{2m-2}}$$

und dieser Ausdruck bestimmt also jetzt die Entfernung des Bildes des unendlich weit entfernten Gegenstandes von der Abscissenachse, oder die Grösse und Lage dieses Bildes. Verbindet man dieses Bild mit dem Brennpunkt durch eine grade Linie, so steht diese senkrecht auf der Abscissenachse, das Bild ist also wieder ein ebenes, und hat in Bezug auf den Gegenstand die umgekehrte oder die aufrechte Lage, je nachdem A^{2m-2} positiv oder negativ ist.

42.

Die Betrachtungen des vor. Art. finden auch ihre Bedeutung, wenn man die Entwickelungen auf entgegengesetzte Art ausführte. Lösen wir die erste (38) in Bezug auf ξ auf, und substituiren den dadurch erhaltenen Ausdruck in die zweite (38), dann wird das Ergebniss

$$\xi = q - n\frac{n^m B^{2m-3} - (\xi^m - q^{m-1}) B^{2m-2}}{n^m A^{2m-3} - (\xi^m - q^{m-1}) A^{2m-2}}$$

$$\eta = \frac{n^m \eta^m}{n^m A^{2m-3} - (\xi^m - q^{m-1}) A^{2m-2}}$$

oder, da die (39), wenn ξ^m statt x, und η^m statt y gesetzt werden,

$$\xi^m - q^{m-1} = -\frac{\eta^m - k^{m-1}}{\alpha^m}$$

giebt,

$$\xi = q - n\frac{n^m \alpha^m B^{2m-3} + (\eta^m - k^{m-1}) B^{2m-2}}{n^m \alpha^m A^{2m-3} + (\eta^m - k^{m-1}) A^{2m-2}}$$

$$\eta = \frac{n^m \alpha^m \eta^m}{n^m \alpha^m A^{2m-3} + (\eta^m - k^{m-1}) A^{2m-2}}$$

Setzt man nun $\alpha^m = 0$, so bekommt man

$$\eta - \xi = n \frac{B^{2m-2}}{A^{2m-2}} \dots \dots \dots \dots (42)$$

$$\eta = 0$$

und setzt man $\eta^{m} = \infty$, so ergiebt sich derselbe Werth von ξ, aber für η erhält man

$$\eta = \frac{n^{m} \alpha^{m}}{A^{2m-2}} \dots \dots \dots \dots (43)$$

Die strikte Bedeutung dieser Gleichungen ist die folgende. Wenn in dem Punkt der Abscissenachse, den der aus der Gleichung (42) hervorgehende Werth von ξ bestimmt, sich ein Gegenstand befindet, so liegt dessen Bild auch in der Abscissenachse, aber in unendlich grosser Entfernung von der letzten brechenden Oberfläche. Wenn sich in dem Punkt, dessen Abscisse zwar denselben Werth hat, wie eben bestimmt wurde, aber dessen Ordinate η nicht Null ist, ein Gegenstand befindet, so ist dessen Bild zwar wieder von der letzten brechenden Oberfläche unendlich weit entfernt, aber die nach diesem Bilde gerichteten, nach der letzten Brechung, ausfahrenden Strahlen, machen mit der Abscissenachse den Winkel α^{m}. Die Realität des Gegenstandes wird durch die Bedingung bestimmt, dass sowohl B^{2m-2} wie A^{2m-2} gleiche Zeichen haben.

Da nun stets Bild und Gegenstand mit einander verwechselt werden dürfen, so folgt aus den vorstehenden Betrachtungen, dass die durch die Gleichung (42) gegebene Abscisse ξ einen andern Brennpunkt unsers Systems brechender Oberflächen bestimmt, welcher stattfindet, wenn am entgegengesetzten Ende desselben sich ein Gegenstand in unendlich grosser Entfernung befindet. Hat dieser eine superficielle Ausdehnung, so dass dessen Grenzen unter dem Winkel α^{m} mit der Abscissenachse auf die letzte Oberfläche, (die nun als die erste anzusehen ist,) einfallen, so bestimmt der Werth von η, welcher aus der (43) hervorgeht, die Grösse des Bildes in dem oben erhaltenen andern Brennpunkt. Da einem positiven Werthe von α^{m} ein auf der negativen Seite der y liegender Gegenstand entspricht, so hat das Bild, dessen Grösse durch die (43) bestimmt wird, wieder in Bezug auf den Gegenstand eine umgekehrte oder aufrechte Lage, je nachdem A^{2m-2} positiv oder negativ ist.

Die Lage der beiden Bilder in den beiden Brennpunkten ist also immer dieselbe, entweder sind beide umgekehrt oder aufrecht,

aber die Realität des einen Brennpunkts bedingt nicht die Realität des andern.

Der Gleichförmigkeit wegen soll im Folgenden der durch die Gleichung (42) bestimmte Brennpunkt der erste, und der durch die (40) bestimmte der zweite Brennpunkt genannt werden.

Die Vergrösserung, die das System brechender Oberflächen überhaupt gewährt, findet man auch aus der obigen Gleichung zwischen η und η^m durch den absoluten Werth der Zahl

$$\frac{n^m A^{2m-3} - (\xi^m - q^{m-1}) A^{2m-2}}{n^m}$$

von welcher leicht bewiesen werden kann, dass sie mit der im Art. 40 für diese Vergrösserung erhaltenen Zahl identisch ist; nur muss hier ξ^m die Abscisse des Bildes bedeuten, während stets ξ die Abscisse des Gegenstandes bezeichnet.

Zweiter Theil.

Betrachtung mehrerer Brechungen zugleich.

43.

Wenden wir uns zu den beiden erhaltenen Ausdrücken für die Vergrösserung des Gegenstandes, nemlich zu

$$\frac{n}{nB^{2m-2} + (\xi - q) A^{2m-2}}$$

und

$$\frac{n^m A^{2m-3} - (\xi^m - q^{m-1}) A^{2m-2}}{n^m}.$$

Da diese Ausdrücke von den Abscissen ξ und ξ^m abhängen, so zeigen sie, dass die Vergrösserung des Gegenstandes von dem Orte, an welchem er sich befindet, abhängt, und dass im Allgemeinen durch die Veränderung des Ortes des Gegenstandes die Vergrösserung desselben in eine Verkleinerung, und die aufrechte Lage in die entgegengesetzte übergehen kann, und umgekehrt. Unter diesen verschiedenen Abstufungen zwischen der Grösse des Gegenstandes und der des Bildes desselben ist vorzugsweise, diejenige zu bemerken, in welcher der Gegenstand und sein Bild gleiche Grösse und Lage haben. Man könnte die beiden Punkte, welche dieser Eigenschaft

entsprechen, die Indifferenzpunkte nennen, wenn sie von Gauss nicht schon die Hauptpunkte genannt worden wären. Der Gleichförmigkeit wegen soll diese letztere Benennung hier beibehalten werden. *)

Man findet die Lage der beiden Hauptpunkte eines Systems von brechenden Oberflächen, der vorstehenden Definition gemäss, dadurch, dass man die beiden vorstehenden Ausdrücke der Vergrösserung = 1 setzt, und die Abscissen ξ und ξ^m demgemäss bestimmt. Bezeichnet man den ersten Hauptpunkt mit E und den zweiten mit $E_,$, so dass in denselben

$$\xi = E, \quad \xi^m = E_,$$

werden, dann giebt die oben angegebene Bedingung

$$\frac{n}{nB^{2m-2} + (E-q)A^{2m-2}} = 1$$

$$\frac{n^m A^{2m-3} - (E_, - q^{m-1})A^{2m-2}}{n^m} = 1$$

woraus man sogleich

$$E = q - n\frac{B^{2m-2} - 1}{A^{2m-2}}$$

$$E_, = q^{m-1} + n^m\frac{A^{2m-3} - 1}{A^{2m-2}}$$

erhält. Ich lasse nicht unerwähnt, dass man viele Systeme von brechenden Oberflächen aufstellen kann, in welchen die beiden Hauptpunkte, oder wenigstens einer derselben, nicht ausserhalb der ersten oder letzten brechenden Oberfläche liegen, und folglich der betreffende Gegenstand nebst seinem Bilde, oder wenigstens Eins derselben nicht real werden; aber diese Umstände beeinträchtigen die Anwendung, deren die Hauptpunkte fähig sind, nicht im Geringsten.

44.

Durch die Einführung von E und $E_,$ kann man die Gleichungen (38) auf eine bedeutend einfachere Gestalt bringen. Zuerst bekommt man

---

*) Gauss hat diese Hauptpunkte auf ganz andere Weise eingeführt und definirt. Auch finde ich nirgends, dass er der oben angegebenen charakteristischen Eigenschaft derselben, die hier zur Definition dient, gedenkt. Möbius hat diese Eigenschaft schon gekannt.

$$\xi^{m} - E_{,} + n^{m} \frac{A^{2m-3} - 1}{A^{2m-2}} =$$

$$n^{m} \frac{n B^{2m-3} + \left\{ \xi - E - n \dfrac{B^{2m-2} - 1}{A^{2m-2}} \right\} A^{2m-3}}{n B^{2m-2} + \left\{ \xi - E_{,} - n \dfrac{B^{2m-2} - 1}{A^{2m-2}} \right\} A^{2m-3}}$$

oder nachdem Zähler und Nenner mit A^{2m-2} multiplicirt worden sind,

$$= n^{m} \frac{n B^{2m-3} A^{2m-2} - n (B^{2m-2} - 1) A^{2m-3} + (\xi - E) A^{2m-3} A^{2m-2}}{\{n B^{2m-2} - n (B^{2m-2} - 1) + (\xi - E) A^{2m-2}\} A^{2m-2}}$$

und nach Anwendung der (34)

$$= n^{m} \frac{n A^{2m-3} - n + (\xi - E) A^{2m-3} A^{2m-2}}{\{n + (\xi - E) A^{2m-2}\} A^{2m-2}}$$

$$= n^{m} \frac{(A^{2m-3} - 1) \{n + (\xi - E) A^{2m-2}\} + (\xi - E) A^{2m-2}}{\{n + (\xi - E) A^{2m-2}\} A^{2m-2}}$$

woraus sogleich

(44) $\left\{ \begin{array}{l} \xi^{m} = E_{,} + \dfrac{n^{m} (\xi - E)}{n + (\xi - E) A^{2m-2}} \\ \text{und auf ähnliche Weise} \\ \eta^{m} = \dfrac{n \eta}{n + (\xi - E) A^{2m-2}} \end{array} \right.$

hervorgehen, die nur von dem Einen Coefficienten A^{2m-2} abhängen, und überhaupt wesentlich einfacher sind, als die (38). Man kann bemerken, dass man aus der ersten (44) die symmetrische Gleichung

$$\frac{n^{m}}{\xi^{m} - E_{,}} + \frac{n}{E - \xi} = A^{2m-2}$$

und aus der zweiten

$$\eta^{m} = \frac{n}{n^{m}} \{n^{m} - (\xi^{m} - E_{,}) A^{2m-2}\} = \frac{n}{n^{m}} \frac{\xi^{m} - E_{,}}{\xi - E} \eta$$

bekommt.

Führen wir die Hauptpunkte in die Gleichungen für den einfallenden und den ausfahrenden Lichtstrahl ein. Die bisherige Form des ersteren, nemlich

$$y = (q - x) \frac{\gamma}{n} + k$$

geht durch die Einführung von E statt q sogleich in die folgende über

$$y = (E - x) \frac{\gamma}{n} + K$$

wo

(45) . . . . $K = k + \dfrac{B^{2m-2} - 1}{A^{2m-2}} \gamma$

ist, und die andere, welcher bisher die Form

$$y = (q^{m-1} - x)\frac{\gamma^m}{n^m} + k^{m-1}$$

gegeben worden ist, wird durch die Einführung von $E_{,}$ statt q^{m-1} zuerst

$$y = (E_{,} - x)\frac{\gamma^m}{n^m} + k^{m-1} - \frac{A^{2m-3} - 1}{A^{2m-2}}\gamma^m \quad \ldots\ldots \quad (46)$$

geht aber, nachdem in den beiden letzten Gliedern k^{m-1} und γ^m durch die (32) eliminirt worden sind, über in

$$y = (E_{,} - x)\frac{\gamma^m}{n^m} + K$$

wo K dieselbe durch die Gleichung (45) gegebene Ordinate ist. Also wenn für den einfallenden Lichtstrahl $x = E$ und demzufolge für den ausfahrenden $x = E_{,}$ gesetzt wird, so bekommt man für beide Lichtstrahlen

$$y = K$$

welche Gleichung mit der obigen Definition der Hauptpunkte in engster Beziehung steht, und diese in einer anderen Form ausspricht.

Um die Beziehung von γ^m zu γ und K zu erhalten, braucht man nur aus der zweiten Gleichung (32) k durch die (45) zu eliminiren, man erhält dadurch

$$\gamma^m = \gamma + KA^{2m-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

welche Gleichung der ersten Fundamentalgleichung des Art. 36 völlig ähnlich ist. Während aber diese letzt genannte Gleichung nur für eine einzige Brechung gilt, hat die (47) für jede beliebige Anzahl von Brechungen Geltung.

45.

Die Einführung der in den Artt. 41 und 42 erhaltenen zwei Brennpunkte vereinfacht auch die (38). Wenn wir die Abscisse des ersten Brennpunkts F und die des zweiten $F_{,}$ nennen, so geben die Gleichungen (40) und (42) sogleich

$$F = q - n\frac{B^{2m-2}}{A^{2m-2}}$$

$$F_{,} = q^{m-1} + n^m\frac{A^{2m-3}}{A^{2m-2}}$$

durch deren Einführung die (38) vermittelst einer ähnlichen Reduction, wie bei der Einführung von E und $E_{,}$ in

$$\xi^{m} = F_{,} - \frac{n^{m} n}{(\xi - F)(A^{2m-2})^2},$$

$$\eta^{m} = \frac{n\eta}{(\xi - F) A^{2m-2}}$$

übergehen, die auch nur von dem Einen Coefficienten A^{2m-2} abhängen. Man kann bemerken, dass hier die symmetrische Gleichung

$$(F - \xi)(\xi^{m} - F_{,}) = \frac{n^{m} n}{(A^{2m-2})^2}$$

entsteht, mittels welcher man auch

$$\eta^{m} = -\eta \frac{(\xi^{m} - F_{,}) A^{2m-2}}{n^{m}}$$

bekommt. Es lässt sich noch anmerken, dass durch die Einführung von F und $F_{,}$ statt q und q^{m-1} die Gleichungen für den einfallenden und den ausfahrenden Lichtstrahl die Formen

$$y = (F - x)\frac{\gamma}{n} + \frac{\gamma^{m}}{A^{2m-2}}$$

und

$$y = (F_{,} - x)\frac{\gamma^{m}}{n^{m}} - \frac{\gamma}{A^{2m-2}}$$

annehmen, so wie dass zwischen den Haupt- und den Brennpunkten die einfachen Relationen

$$F = E - \frac{n}{A^{2m-2}}$$

$$F_{,} = E_{,} + \frac{n^{m}}{A^{2m-2}}$$

bestehen.

46.

Wenn das in Betrachtung stehende System von brechenden Oberflächen so beschaffen ist, dass $A^{2m-2} = 0$ wird, dann verlieren die vier eingeführten Punkte zwar nicht ihre Bedeutung, wohl aber ihre Anwendbarkeit, denn sie liegen je zwei auf verschiedenen Seiten des Systems in unendlich grosser Entfernung von demselben; es werden mit anderen Worten die Abscissen E, $E_{,}$, F, $F_{,}$ unendlich gross; aus dem Umstande, dass die beiden Brennpunkte in unendlich grosser Entfernung liegen, giebt sich sogleich zu erkennen, dass die Bedingung $A^{2m-2} = 0$ jedes Mal vorhanden sein muss, wenn das System von brechenden Oberflächen so beschaffen ist, dass parallel mit einander einfallenden Lichtstrahlen parallel mit einander ausfahrende entsprechen. Es ist dieses der Fall eines jeden auf das

deutliche Sehen möglichst weit entfernter Gegenstände für weitsichtige Augen gestellten Fernrohrs.

In diesem Falle kann man zwei andere merkwürdige Punkte einführen, deren Abscissen mit $J_{,}$ und J bezeichnet werden sollen. Es ist immer noch verstattet, die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls durch

$$y = (q - x)\frac{\gamma}{n} + k$$

auszudrucken, welcher im Allgemeinen die Gleichung

$$y = (q^{m-1} - x)\frac{\gamma^{m}}{n^{m}} + k^{m-1}$$

des ausfahrenden Lichtstrahls entspricht. Da aber jetzt vermöge der zweiten (32)

$$\gamma^{m} = \gamma B^{2m-2}$$

wird, so nimmt die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls die Form

$$y = (q^{m-1} - x)\frac{B^{2m-2}}{n^{m}}\gamma + B^{2m-3}\gamma + A^{2m-3}k$$

an. Setzt man daher

$$J_{,} = q^{m-1} + n^{m} A^{2m-3} B^{2m-3}$$

und erwägt, dass die (33) jetzt

$$A^{2m-3} B^{2m-2} = 1$$

giebt, so wird die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls

$$y = (J_{,} - x)\frac{B^{2m-2}}{n^{m}}\gamma + A^{2m-3}k$$

und die (38) geben jetzt für den Ort des Bildes, welches entsteht, wenn sich im Punkt, dessen Coordinaten ξ und η sind, ein Gegenstand befindet,

$$\xi^{m} = J_{,} + \frac{n^{m}}{n}(\xi - q)(A^{2m-3})^{2}$$

$$\eta^{m} = \eta A^{2m-3}$$

Man sieht hieraus, dass der Punkt $J_{,}$ der Abscissenachse das Bild eines in Punkt q derselben befindlichen Gegenstandes ist, so wie, dass wenn dieses Bild eine superficielle Ausdehnung besitzt, die Grösse desselben sich linearisch zu der des Gegenstandes verhält wie

$$A^{2m-3} : 1$$

Lässt man im Gegensatze zum Vorhergehenden die Gleichung des ausfahrenden Strahles unverändert, so geht die des einfallenden

zu Folge der ersten (34), welche jetzt

$$\dot{\gamma} = A^{2m-3}\gamma^{m}$$

giebt, in die folgende über

$$y = (q - x)\frac{A^{2m-3}}{n}\gamma^{m} - B^{2m-3}\gamma^{m} + B^{2m-2}k^{m-1}$$

die durch die Einführung von

$$J = q - n B^{2m-3} B^{2m-2}$$

in die folgende

$$y = (J - x)\frac{A^{2m-3}}{n}\gamma^{m} + B^{2m-2}k^{m-1}$$

übergeht. Die (38) geben hiemit

$$\xi = J + \frac{n}{n^{m}}(\xi^{m} - q^{m-1})(B^{2m-2})^{2}$$

$$\eta = \frac{\eta^{m}}{A^{2m-3}}$$

Es liegt also in der durch den Punkt J der Abscissenachse gehenden senkrechten Ebene das Bild eines, in der durch q^{m-1} gehenden senkrechten Ebene befindlichen Gegenstandes, und die Grösse dieses Bildes verhält sich zu der dieses Gegenstandes wie

$$1 : A^{2m-3}$$

Dieses Bild wird also eben so viel verkleinert, wie das eben betrachtete Bild vergrössert wird, oder umgekehrt.

47.

Durch Zuziehung der beiden Hauptpunkte E und $E_{,}$ und ihre Anwendung auf beliebige partielle Brechungen kann man die Berechnung aller Brechungen, die ein durch ein gegebenes System von brechenden Oberflächen gehender Lichtstrahl im Ganzen erleidet, wesentlich abkürzen, und auch noch sonstige Vortheile erlangen. Die im Art. 37 u. f. entwickelten Ausdrücke verlangen, dass jede einzelne Brechung für sich in Betracht gezogen werde, während durch die Einführung der Hauptpunkte bewirkt werden kann, dass mehrere Brechungen als partielle Systeme in Rechnung gezogen werden können. Um bei dem Falle stehen zu bleiben, welcher in der Regel zur Anwendung kommt, sollen hier die Brechungen vorzugsweise in Gruppen von je zweien zerlegt, und diese Gruppen als verschiedene Körper, z. B. Glaslinsen, betrachtet werden, die an allen

Seiten von einem und demselben Mittel, z. B. von der atmosphärischen Luft, umgeben sind; andere Combinationen sollen indess auch angemerkt werden. Es folgt aus dem Vorhergehenden, dass im Folgenden die Anzahl der brechenden Oberflächen immer eine grade sein wird, und dass, wie schon im Art. 14 angedeutet wurde, von den Brechungsverhältnissen n, n', n'', etc. alle diejenigen, die mit einer graden Anzahl von Strichen versehen sind, einander gleich werden. Es sollen daher im Folgenden

$$n = n'' = n^{IV} = \text{etc.} = 1$$

und

$$n' = N,\ n''' = N',\ n^{V} = N'',\ \text{etc.}$$

gesetzt werden; die Bedeutung dieser Bezeichnungen ist die, dass die Brechungsverhältnisse der Mittel, aus welchen die vorerwähnten Linsen bestehen, zu dem sie umgebenden Mittel der Reihe nach durch

$$N:1,\quad N':1,\quad N'':1,\ \text{etc.}$$

ausgedrückt werden.

48.

Da nun neben den Hauptpunkten, die sich auf das System von brechenden Linsen als ein Ganzes betrachtet beziehen, auch die Hauptpunkte erscheinen werden, die sich auf je zwei einzelne Brechungen oder jede einzelne Linse beziehen, so müssen, während für jene die im Vorhergehenden angewandten Bezeichnungen beizubehalten sind, für diese andere Bezeichnungen eingeführt werden. Für die erste Linse sollen der erste und der zweite Hauptpunkt mit e und $e_{,}$, für die zweite Linse mit e' und $e_{,}'$, für die dritte mit e'' und $e_{,}''$ u. s. w. bezeichnet werden.

Behält man ausserdem die Bedeutung der verschiedenen A, B, u, t des Art. 37 bei, so ergiebt sich für die erste Linse zu Folge der Artt. 37 und 43:

$$e = q - \frac{B'' - 1}{A''}$$

$$e_{,} = q' + \frac{A' - 1}{A''}$$

oder

$$e = q - \frac{u't'}{u + u' + uu't'}$$

$$e_{,} = q' + \frac{ut'}{u + u' + uu't'}$$

Bringen wir die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls in die Form

$$y = (e - x)\,\gamma + l$$

so wird in Folge der Entwickelungen des Art. 44 die Gleichung des aus der ersten Linse ausfahrenden Lichtstrahls

$$y = (e_{,} - x)\,\gamma'' + l$$

sein, und zu Folge der (47) wird

$$\gamma'' = \gamma + \omega\, l$$

wenn

$$\omega = A'' = u + u' + u u' t'$$

gesetzt wird.

Für die zweite Linse wird ähnlich der erste

$$e' = q'' - \frac{u''' t''}{u'' + u''' + u'' u''' t''}$$

$$e_{,}' = q''' + \frac{u'' t''}{u'' + u''' + u'' u''' t''}$$

Die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls wird

$$y = (e' - x)\,\gamma'' + l'$$

und die des ausfahrenden

$$y = (e_{,}' - x)\,\gamma^{\text{IV}} + l'$$

ferner wird wie oben

$$\gamma^{\text{IV}} = \gamma'' + \omega' l'$$

wenn

$$\omega' = u'' + u''' + u'' u''' t''$$

gesetzt wird. Diese Gleichungen setzen sich auf analoge Weise fort, die Anzahl der Linsen des Systems mag so gross sein wie sie will.

Da der aus der ersten Linse ausfahrende Lichtstrahl mit dem auf der zweiten Linse einfallenden identisch ist, so müssen auch die Gleichungen

$$y = (e_{,} - x)\,\gamma'' + l$$

und

$$y = (e' - x)\,\gamma'' + l'$$

mit einander identisch sein, und diese Bedingung giebt sogleich

$$0 = (e_{,} - e')\,\gamma'' + l - l'$$

folglich wenn

$$\psi' = e_{,} - e'$$

gesetzt wird,

$$l' = l + \psi' \gamma''$$

Auch diese Gleichung, welche der zweiten Fundamentalgleichung des Art. 36 analog ist, setzt sich für jeden Zwischenraum zwischen je zwei auf einander folgenden Linsen unbegrenzt fort.

49.

Die Bezeichnungen γ, γ'', γ^{iv}, etc. der Winkel, welche die auf die Linsen einfallenden, und von denselben ausfahrenden Lichtstrahlen mit der Abscissenachse machen, sollen jetzt, um die Unterscheidungszeichen derselben, die sich auf die Anzahl der Brechungen beziehen, der Anzahl der Linsen gemäss auszudrücken, wie für die übrigen in Betracht kommenden Grössen der Fall ist, in ε, ε', ε'', etc. abgeändert werden. Stellen wir hierauf die im vor. Art. erhaltenen neuen Fundamentalgleichungen für eine unbestimmte Anzahl von Linsen zusammen, so erhalten wir, wenn im Voraus

$$\begin{array}{ll}
\omega\ = u + u' + uu't & \\
\omega' = u'' + u''' + u''u'''t''' & \psi' = e_, - e' \\
\omega'' = u^{iv} + u^{v} + u^{iv}u^{v}t^{v} & \psi'' = e_,' - e'' \\
\omega''' = u^{vi} + u^{vii} + u^{vi}u^{vii}t^{vii} & \psi''' = e_,'' - e''' \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

gesetzt werden,

$$\begin{array}{ll}
\varepsilon' = \varepsilon + \omega l & \\
\varepsilon'' = \varepsilon' + \omega' l' & l' = l + \psi' \varepsilon' \\
\varepsilon''' = \varepsilon'' + \omega'' l'' & l'' = l' + \psi'' \varepsilon'' \\
\varepsilon^{iv} = \varepsilon''' + \omega''' l''' & l''' = l'' + \psi''' \varepsilon''' \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

die denen des Art. 37 vollständig ähnlich sind. Gleichwie dort, erhält man also auch hier durch die Elimination aus denselben

$$\left.\begin{array}{ll}
\varepsilon' = D\varepsilon + Cl & \\
\varepsilon'' = D''\varepsilon + C''l & l' = D'\varepsilon + C'l \\
\varepsilon''' = D^{iv}\varepsilon + C^{iv}l & l'' = D'''\varepsilon + C'''l \\
\varepsilon^{iv} = D^{vi}\varepsilon + C^{vi}l & l''' = D^{v}\varepsilon + C^{v}l \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (48)$$

in welchen, ähnlich wie a. a. O.

$$\begin{array}{ll}
C\ = \omega & D\ = 1 \\
C' = \psi' C + 1 & D' = \psi' \\
C'' = \omega' C' + C & D'' = \omega' D' + D \\
C''' = \psi'' C'' + C' & D''' = \psi'' D'' + D' \\
C^{IV} = \omega'' C''' + C'' & D^{IV} = \omega'' D''' + D'' \\
C^{V} = \psi''' C^{IV} + C''' & D^{V} = \psi''' D^{IV} + D''' \\
C^{VI} = \omega''' C^{V} + C^{IV} & D^{VI} = \omega''' D^{V} + D^{IV} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Bezeichnet man die Anzahl der Linsen des ganzen Linsensystems mit μ, so sind die vier letzten zu berechnenden Coefficienten

$$C^{2\mu-3},\ D^{2\mu-3},\ C^{2\mu-2},\ D^{2\mu-2}$$

also die Anzahl derselben für 2μ Brechungen dieselbe wie oben für μ (oder m) Brechungen, folglich bei einer gleichen Anzahl von Brechungen nur die Hälfte der bei der Anwendung des Verfahrens der Artt. 37 u. f. erforderlichen, ähnlichen Coefficienten.

50.

Wir erhalten nun

$$(49)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} l^{\mu-1} = \varepsilon D^{2\mu-3} + l\, C^{2\mu-3} \\ \varepsilon^{\mu} \ \ = \varepsilon D^{2\mu-2} + l\, C^{2\mu-2} \end{cases}$$

die den (32) analog sind, und auf ähnliche Weise wie im Art. 39, den (33) analog,

$$(50)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} C^{2\mu} D^{2\mu-1} - C^{2\mu-1} D^{2\mu} = -1 \\ C^{2\mu-1} D^{2\mu-2} - C^{2\mu-2} D^{2\mu-1} = 1 \end{cases}$$

Ferner bekommen wir

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \quad \varepsilon^{\mu} C^{2\mu-3} - l^{\mu-1} C^{2\mu-2} \\ l &= -\varepsilon^{\mu} D^{2\mu-3} + l^{\mu-1} D^{2\mu-2} \end{aligned}$$

die den (34) analog sind. Da jetzt die Gleichung des einfallenden Strahls

$$y = (e - x) + l$$

und die des ausfahrenden

$$y = (e_{,}^{\mu-1} - x) + l^{\mu-1}$$

ist, so ergiebt sich auf gleiche Weise wie im Art. 40 für die Relationen zwischen den Coordinaten ξ'' und η'' des Bildes des Gegen-

standes, dessen Coordinaten ξ und η sind,

$$\left.\begin{aligned} \xi'' &= e_{,}^{\prime\prime-1} + \frac{D^{2\mu-3} + (\xi - e) C^{2\mu-3}}{D^{2\mu-2} + (\xi - e) C^{2\mu-2}} \\ \eta'' &= \frac{\eta}{D^{2\mu-2} + (\xi - e) C^{2\mu-2}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (51)$$

die den (38) analog sind, und aus diesen schon von selbst folgen. Man kann eben so zu den Gleichungen des Art. 42 analoge erhalten, von welchen ich nur die folgende hinschreiben will,

$$\eta'' = \{C^{2\mu-3} - (\xi'' - e_{,}^{\mu-1}) C^{2\mu-2}\} \eta$$

Aus diesen Gleichungen erkennt man schon sofort, dass in den Ausdrücken für E und $E_{,}$ des Art. 43, so wie in denen für F und $F_{,}$ des Art. 45 die B und A durch die analogen D und C ersetzt werden können, wenn zugleich q durch e und q^{m-1} durch $e_{,}^{\mu-1}$ ersetzt werden. Dieser Satz kann leicht näher begründet werden. Da die hier eingeführten Coordinaten ξ'' und η'' des Bildes nothwendiger Weise mit den Coordinaten ξ''' und η''' des Art. 40 u. f. identisch sein müssen, wenn in jedem Falle die Coordinaten ξ und η des Gegenstandes identisch sind, und umgekehrt, so müssen auch die obigen Ausdrücke mit den früheren identisch sein, und hiemit erhalten wir zunächst die Gleichungen

$$D^{2\mu-2} + (\xi - e) C^{2\mu-2} = B^{2m-2} + (\xi - q) A^{2m-2}$$

$$C^{2\mu-3} - (\xi'' - e_{,}^{\mu-1}) C^{2\mu-2} = A^{2m-3} - (\xi''' - q^{m-1}) A^{2m-2}$$

die unabhängig von den Werthen von $\xi''' = \xi''$ und ξ erfüllt werden müssen. Diese Gleichungen geben sogleich

$$\left.\begin{aligned} A^{2m-2} &= C^{2\mu-2} \\ B^{2m-2} &= D^{2\mu-2} + (q - e) C^{2\mu-2} \\ A^{2m-3} &= C^{2\mu-3} + (e_{,}^{\mu-1} - q^{m-1}) C^{2\mu-2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (52)$$

deren Substitution in die oben angezogenen Gleichungen der Artt. 43 und 45

$$E = e - \frac{D^{2\mu-2} - 1}{C^{2\mu-2}}$$

$$E_{,} = e_{,}^{\mu-1} + \frac{C^{2\mu-3} - 1}{C^{2\mu-2}}$$

$$F = e - \frac{D^{2\mu-2}}{C^{2\mu-2}}$$

$$F_{,} = e_{,}^{\mu-1} + \frac{C^{2\mu-3}}{C^{2\mu-2}}$$

oder

$$F = E - \frac{1}{C^{2\mu-2}}$$

$$F_\prime = E_\prime + \frac{1}{C^{2\mu-2}}$$

geben. Führen wir das Zeichen Φ durch die Relation

$$\Phi = \frac{1}{C^{2\mu-2}}$$

ein, so wird die Linie Φ am Zweckmässigsten die Brennweite des Linsensystems genannt, und die Brennweite daher als die Entfernung, entweder des ersten Hauptpunkts vom ersten Brennpunkt (als Anfangspunkt), oder als die Entfernung des zweiten Brennpunkts vom zweiten Hauptpunkt (als Anfangspunkt) definirt. Denn diese beiden Entfernungen sind, wie man sieht, einander immer gleich, und haben immer dasselbe Zeichen.

51.

Die Coordinaten ξ^μ und $\eta_\prime^\mu$ des Bildes des Gegenstandes, dessen Coordinaten ξ und η sind, bekommen jetzt infolge der (44) die Ausdrücke

$$(53) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \xi^\mu = E_\prime + \dfrac{\xi - E}{1 + \frac{\xi - E}{\Phi}} \\[2ex] \eta_\prime^\mu = \dfrac{\eta}{1 + \frac{\xi - E}{\Phi}} \end{cases}$$

oder

$$(54) \ldots\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \xi^\mu = F_\prime - \dfrac{\Phi^2}{\xi - F} \\[2ex] \eta^\mu = \dfrac{\Phi}{\xi - F}\,\eta_\prime \end{cases}$$

für die Brennpunkte ergeben sich bez.

$$\eta_\prime^\mu = -\varepsilon\Phi, \quad \eta = \varepsilon^\mu\Phi$$

Die obigen Gleichungen kann man auch auf die folgende Form bringen,

$$\frac{1}{E - \xi} + \frac{1}{\xi^\mu - E_\prime} = \frac{1}{\Phi}$$

$$(F - \xi)(\xi^\mu - F_\prime) = \Phi^2$$

$$\eta_\prime^\mu = -\frac{\xi^\mu - E_\prime}{E - \xi}\,\eta_\prime$$

$$\eta_\prime^\mu = -\frac{\xi^\mu - F_\prime}{\Phi}\,\eta_\prime$$

durch deren Hülfe man leicht die Ausdrücke für ξ und η erhält, wenn ξ'' und η'' gegeben sind. Setzt man

$$E - \xi = A\,,\ \ \xi'' - E_, = A_,$$

so bekommt man

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A_,}\,.$$

$$\Phi^2 = (A - \Phi)\,(A_, - \Phi)$$

$$\eta'' = -\frac{A_,}{A}\,\eta$$

von welchen die zweite mit der ersten identisch ist. Diese Gleichungen, für jedes Linsensystem im Ganzen geltend, haben genau dieselbe Form, wie die Grundgleichungen der früheren Dioptrik, die für eine einzige Linse mit Uebergehung der Dicke derselben abgeleitet wurden.

Die linearische Vergrösserung des Gegenstandes wird jetzt durch den absoluten Werth eines jeden beliebigen der folgenden Ausdrücke gegeben,

$$\frac{1}{1 - \frac{A}{\Phi}}$$

$$1 - \frac{A_,}{\Phi}$$

$$-\frac{A_,}{A}$$

$$\frac{\Phi}{\xi - F}$$

$$-\frac{\xi'' - F_,}{\Phi}$$

die, jenachdem sie an sich positiv oder negativ sind, die aufrechte oder die umgekehrte Lage des Bildes anzeigen.

52.

Die oben mit ω, ω', ω'', etc. bezeichneten Grössen, die sich auf die einzelnen Linsen beziehen, so wie die Abscissen der Haupt- und Brennpunkte dieser Linsen, sind noch zu entwickeln. Nehmen wir die erste Linse vor, und legen dem Zeichen N die Bedeutung bei, die im Art. 47 erklärt wurde. Setzen wir für die beiden Halbmesser der beiden brechenden Oberflächen dieser Linse, die bisher mit $p - q$ und $p' - q'$ bezeichnet worden sind, die durch die folgenden

Gleichungen zu berechnenden Linien ϱ und $\varrho_{,}$

$$\varrho = \frac{p-q}{N-1}, \quad \varrho_{,} = -\frac{p'-q'}{N-1}$$

so wie für die Dicke dieser Linse, nemlich $q'-q$, die durch den folgenden Ausdruck zu berechnende Linie δ,

$$\delta = \frac{q'-q}{N}$$

dann werden

$$u = \frac{1}{\varrho}, \quad u' = \frac{1}{\varrho_{,}}, \quad t' = -\delta$$

und folglich, wenn $\omega = \frac{1}{\varphi}$ gesetzt wird,

$$\varphi = \frac{\varrho\varrho_{,}}{\varrho + \varrho_{,} - \delta}$$

Die Linien ϱ und $\varrho_{,}$ sollen die Substituten der Halbmesser, und δ das Substitut der Dicke der Linse genannt werden.

Die Abscissen der Hauptpunkte dieser Linse bekommen jetzt die Ausdrücke

$$e = q + \frac{\delta\varphi}{\varrho_{,}}$$

$$e_{,} = q' - \frac{\delta\varphi}{\varrho}$$

und wenn die Abscissen der beiden Brennpunkte dieser Linse mit f und $f_{,}$ bezeichnet werden, so ergeben sich

$$f = e - \varphi$$

$$f_{,} = e_{,} + \varphi$$

Der obigen Definition zufolge ist also φ die Brennweite dieser Linse. Es wird ferner, wenn den oben eingeführten Bezeichnungen analog,

$$a = e - \xi, \quad \alpha = \xi' - e_{,}$$

gesetzt werden,

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$$

$$\eta' = -\frac{\alpha}{a}\eta$$

wo unter ξ' und η' die Coordinaten des durch diese Linse bewirkten Bildes eines in ξ und η befindlichen Gegenstandes, oder umgekehrt, verstanden werden müssen.

53.

Für die zweite und alle folgenden Linsen bekommt man ähnliche Ausdrücke durch die Versetzung der Bezeichnungen. Zu mehrerer Deutlichkeit sollen diese Ausdrücke für die zweite Linse ausführlich angesetzt werden.

$$\varrho' = \frac{p'' - q''}{N' - 1}, \quad \varrho_{,}' = -\frac{p''' - q'''}{N' - 1}, \quad \delta' = \frac{q''' - q''}{N'}$$

$$\varphi' = \frac{\varrho' \varrho_{,}'}{\varrho' + \varrho_{,}' - \delta'}$$

wo φ' also die Brennweite der zweiten Linse ist. Ferner die Haupt- und die Brennpunkte

$$e' = q'' + \frac{\delta' \varphi'}{\varrho_{,}'}$$

$$e_{,}' = q''' - \frac{\delta' \varphi'}{\varrho'}$$

$$f'' = e' - \varphi'$$

$$f_{,}' = e_{,}' + \varphi'$$

Setzt man hier

$$a' = e' - \xi', \quad \alpha' = \xi'' - e_{,}'$$

so werden

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{\alpha'}$$

$$\eta'' = -\frac{\alpha'}{a'}\eta'$$

woraus

$$\eta'' = \frac{\alpha\alpha'}{aa'}\eta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

folgt. Man kann bemerken, dass

$$\alpha + a' = e' - e_{,} = -\psi'$$

wird.

54.

Die beiden vorhergehenden Artt. enthalten die Vorbereitungen zur Anwendung der Gleichungen des Art. 49, und da

$$\omega = \frac{1}{\varphi}, \quad \omega' = \frac{1}{\varphi'}, \quad \omega'' = \frac{1}{\varphi''}, \text{ etc.}$$

sind, und die ψ', ψ'', etc. aus den Unterschieden der Abscissen der Hauptpunkte der einzelnen Linsen bestehen, so brauchen zu dieser Anwendung nur für jede Linse die Brennweite und die Hauptpunkte

berechnet zu werden, und von dem übrigen Inhalt dieser Artt. kann abgesehen werden.

Es wird aber dienlich sein, die einfachsten Fälle, zuerst wenn das Linsensystem nur aus zwei Linsen besteht, für sich zu betrachten, da sich hieraus besondere Folgerungen ziehen lassen. Sei

$$\Delta = e' - e_,$$

so dass $\Delta = -\psi'$ wird, dann geben die im Art. 19 entwickelten Gleichungen

$$C' = 1 - \frac{\Delta}{\varphi}, \quad C'' = \frac{\varphi + \varphi' - \Delta}{\varphi\varphi'},$$

$$D' = -\Delta, \quad D'' = 1 - \frac{\Delta}{\varphi'}$$

und hieraus folgt zuerst für die Gesammtbrennweite der beiden Linsen, wenn wir sie mit Φ bezeichnen,

$$\Phi = \frac{\varphi\varphi'}{\varphi + \varphi' - \Delta}$$

für die beiden Gesammthauptpunkte

$$E = e + \frac{\Delta\Phi}{\varphi'}$$

$$E_, = e'_, - \frac{\Delta\Phi}{\varphi}$$

und für die beiden Gesammtbrennpunkte

$$F = E - \Phi$$

$$F_, = E_, + \Phi$$

Die Relation zwischen Bild und Gegenstand wird, wenn wie oben

$$A = E - \xi, \quad A_, = \xi'' - E_,$$

gesetzt werden,

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A_,}$$

Diese Gleichungen haben genau dieselbe Form, wie die für eine einfache Linse; die Substituten ϱ und $\varrho_,$ der Halbmesser der beiden Oberflächen der Linse sind durch die Brennweiten φ und φ', das Substitut δ der Dicke der Linse ist durch die Entfernung Δ der beiden einander im Allgemeinen am Nächsten liegenden Hauptpunkte derselben, nemlich des zweiten der ersten, des ersten der zweiten Linse, und die beiden Hauptpunkte der einzelnen Linsen durch die beiden Gesammthauptpunkte beider Linsen vertreten.

55.

Es ist aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen, dass man für jede beliebige Anzahl von Linsen ganz ähnliche Ausdrücke bekommen muss. Es bestehe das System aus drei Linsen, von welchen die jetzt hinzugekommene hinter den beiden vorher betrachteten liegt, so berechne man die Brennweite, die beiden Haupt- und die beiden Brennpunkte der beiden ersten Linsen nach den Ausdrücken des vor. Art. und setze

$$\Delta_{,} = e'' - E_{,}$$

worauf die Gesammtbrennweite aller drei Linsen, wenn man sie Φ' nennt, durch

$$\Phi' = \frac{\Phi\varphi''}{\Phi + \varphi'' - \Delta_{,}}$$

und die Gesammthaupt- und Brennpunkte, die jetzt E', $E_{,}'$, F', $F_{,}'$ genannt werden sollen, durch

$$E' = E + \frac{\Delta_{,}\Phi'}{\varphi''}$$

$$E_{,}' = e_{,}'' - \frac{\Delta_{,}\Phi'}{\Phi}$$

$$F' = E' - \Phi'$$

$$F_{,}' = E_{,}' + \Phi'$$

erhalten werden, und auch die Relationen zwischen Bild und Gegenstand ähnlich abgeänderte Ausdrücke erhalten. Wäre unter diesen drei Linsen die einzeln betrachtete die erste von allen, so müssten in den vorstehenden Ausdrücken die Grössen, die sich auf die Gesammtheit der beiden ersten Linsen beziehen, auf die Gesammtheit der beiden letzten Linsen, so wie die Grössen, die sich oben auf die dritte Linse beziehen, auf die erste bezogen werden. Alle diese Ausdrücke sind leicht direct zu beweisen.

Bei drei Linsen können weiter keine Combinationen gemacht werden, als die beiden vorbenannten; besteht aber das System aus mehr als drei Linsen, so lassen sich eine grössere Anzahl von Combinationen ausführen, die alle den vorstehenden Erklärungen gemäss zu behandeln sind. Nur ist zu bemerken, dass man die Linsen immer zufolge ihrer gegebenen Reihenfolge combiniren muss, und keine Versetzungen oder Auslassungen vornehmen darf.

56.

Dehnen wir die Gleichung (55) auf μ Linsen aus, dann wird sie

$$\eta_{,}^{\mu} = \pm \frac{\alpha\alpha'\alpha'' \dots \alpha^{\mu-1}}{a a' a'' \dots a^{\mu-1}} \eta$$

wo das obere Zeichen für ein grades, und das untere für ein ungrades μ gilt. Die Linien α, α', α'', etc. nebst a, a', a'', etc. sollen die Vereinigungsweiten der Lichtstrahlen in Bezug auf die einzelnen Linsen heissen, und zwar die a, a', a'', etc. die Vereinigungsweiten vor, und die α, α', α'', etc. die Vereinigungsweiten nach den Linsen. Da die Vergrösserung, die irgend ein Linsensystem gewährt, durch das Verhältniss der Ordinate des Bildes zu der des Gegenstandes ausgedrückt wird, oder dem Verhältniss $\eta_{,}^{\mu} : \eta$ gleich kommt, so giebt die vorstehende Gleichung zu erkennen, dass die Function

$$\pm \frac{\alpha . \alpha' . \alpha'' \dots \alpha^{\mu-1}}{a . a' . a'' \dots a^{\mu-1}}$$

abgesehen von ihrem Vorzeichen, überhaupt die Vergrösserung bezeichnet, welche der Gegenstand, dessen Abscisse ξ ist, nach dem Durchgange des Lichtstrahls durch alle μ Linsen erfährt. Die Berechnung der Vereinigungsweiten wird hier durch die folgenden Gleichungen ausgeführt,

$$(56) \dots\dots \left\{ \begin{array}{ll} a = e - \xi, & \alpha = \dfrac{a\varphi}{a-\varphi}; \\ a' = \Delta - \alpha, & \alpha' = \dfrac{a'\varphi'}{a'-\varphi'} \\ a'' = \Delta' - \alpha', & \alpha'' = \dfrac{a''\varphi''}{a''-\varphi''} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array} \right.$$

wo

$$\begin{aligned} \Delta &= e' - e_{,} \\ \Delta' &= e'' - e_{,}' \\ \Delta'' &= e''' - e_{,}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sind.

Da der Ausdruck $\eta_{,}^{\mu} : \eta$ für die Vergrösserung allgemein gültig ist, und auch dann seine Bedeutung nicht verliert, wenn beides $\eta_{,}^{\mu}$ und η unbegrenzt wachsend angenommen werden, so gilt er auch für das Fernrohr, in welchem beides $\eta_{,}^{\mu}$ und η unendlich gross sind. Da aber in diesem Falle auch die Abscissen ξ^{μ} und ξ unendlich

gross sind, so kann der obige Ausdruck eine etwas andere Form annehmen. Da nun

$$a = -\infty\,,\quad a^{\mu-1} = \infty$$

werden, so erhalten wir

$$\alpha = \varphi\,,\quad \alpha^{\mu-1} = \varphi^{\mu-1}$$

und der Ausdruck der Vergrösserung eines Fernrohrs ist der absolute Werth der Function

$$\mp \frac{\varphi}{\varphi^{\mu-1}} \cdot \frac{\alpha'.\alpha''\ldots\alpha^{\mu-2}}{a'.a''\ldots a^{\mu-2}}$$

wenn φ die Brennweite des Objectivs, und $\varphi^{\mu-1}$ die Brennweite des letzten Oculars bezeichnen. Die Vereinigungsweiten ergeben sich jetzt durch die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} a' &= \varDelta - \varphi\,, & \alpha' &= \frac{a'\varphi'}{a'-\varphi'} \\ a'' &= \varDelta' - \alpha'\,, & \alpha'' &= \frac{a''\varphi''}{a''-\varphi''} \\ a''' &= \varDelta'' - \alpha''\,, & \alpha''' &= \frac{a'''\varphi'''}{a'''-\varphi'''} \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

aus welchen schliesslich $\alpha^{\mu-1} = \varphi^{\mu-1}$ hervorgehen muss.

57.

In Bezug auf das Fernrohr lassen sich noch andere Ausdrücke für die Vergrösserung ableiten. Seien wie oben ε der Winkel, den die einfallenden, und ε'' der Winkel, den die ausfahrenden Lichtstrahlen mit der Abscissenachse machen, dann nähert sich bei fortwährend wachsenden η^{μ} und η das Verhältniss $\eta^{\mu} : \eta$ dem Verhältniss $\varepsilon'' : \varepsilon$ unbeschränkt, und wird diesem gleich, wenn η^{μ} und η unendlich gross werden. Die Vergrösserung eines Fernrohrs hat daher auch den absoluten Werth des Verhältnisses $\varepsilon'' : \varepsilon$ zum Ausdruck.

Da nun zufolge des Art. 46 und der ersten Gleichung (52) im Fernrohr $C^{2\mu-2} = 0$ ist, so giebt die zweite Gleichung (49) sogleich

$$\frac{\varepsilon^{\mu}}{\varepsilon} = D^{2\mu-2}$$

und folglich ist $D^{2\mu-2}$ ein Ausdruck für die Vergrösserung des Fernrohrs. Da die (50) im gegenwärtigen Falle

$$C^{2\mu-3} D^{2\mu-2} = 1$$

giebt, so ist auch $\frac{1}{C^{2\mu-3}}$ ein Ausdruck für diese Vergrösserung.

Um noch andere Ausdrücke zu erhalten nehmen wir zuerst an, dass das Fernrohr aus zwei Linsen bestehe, oder dass $\mu = 2$ sei. Dann wird wie im Art. 54

$$D' = 1 - \frac{\Delta}{\varphi'}$$

Da aber die Gesammtbrennweite des Fernrohrs oder $\Phi = \infty$ ist, so wird $\Delta = \varphi + \varphi'$, womit

$$D'' = -\frac{\varphi}{\varphi'}$$

erhalten wird. Also wenn φ dem Objectiv angehört, ist das immer absolut anzunehmende Verhältniss

$$\varphi : \varphi'$$

ein Ausdruck für die Vergrösserung des aus zwei Linsen bestehenden Fernrohrs. Dieser längst bekannte Ausdruck ist ein specieller Fall des im vor. Art. erhaltenen allgemeinen Ausdrucks.

Es soll jetzt das Fernrohr aus drei Linsen bestehen, oder $\mu = 3$ sein. Da nun $\alpha = \varphi$, $a'' = \varphi''$, und

$$\frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{a'} + \frac{1}{\alpha'}, \quad \Delta = \varphi + a'; \quad \Delta' = \alpha' + \varphi''$$

sind, so wird zuerst

$$D'' = -\frac{\Delta}{\alpha'} - \frac{\varphi}{a'}$$

und zufolge des Art. 49, und da $\psi'' = -\Delta'$ ist,

$$D''' = \Delta' \frac{\Delta}{\alpha'} + \Delta' \frac{\varphi}{a'} - \Delta = \frac{\Delta\varphi''}{\alpha'} + \frac{\Delta'\varphi}{a'}$$

und

$$D^{IV} = \frac{\Delta}{\alpha'} + \frac{\Delta'\varphi}{a'\varphi''} - \frac{\Delta}{\alpha'} - \frac{\varphi}{a'}$$

oder

$$D^{IV} = -\frac{\varphi\alpha'}{\psi'' a'}$$

wo die rechte Seite wieder ein specieller Werth des allgemeinen Ausdrucks des vor. Art. für das Fernrohr ist.

Man erkennt leicht, dass identisch

$$\frac{a'}{\varphi\alpha'} = \frac{a'}{\varphi}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{a'}\right) - \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi'} + \frac{\varphi}{\varphi\varphi'}$$

ist, welche Gleichung durch Zuziehung der vorhergehenden

$$\frac{a'}{\varphi a'} = -\frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\varphi'} + \frac{\Delta}{\varphi\varphi'} = -\frac{1}{\Phi_,}$$

giebt, wenn $\Phi_,$ die Gesammtbrennweite der ersten und zweiten Linse bezeichnet. Es wird also

$$D^{IV} = -\frac{\Phi_,}{\varphi''}$$

Identisch ist auch

$$\frac{\alpha'}{\varphi''\alpha'} = \frac{\alpha'}{\varphi''}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha'}\right) - \frac{1}{\varphi'} - \frac{1}{\varphi''} + \frac{\varphi''}{\varphi'\varphi''}$$

die in

$$\frac{\alpha'}{\varphi''\alpha'} = -\frac{1}{\varphi'} - \frac{1}{\varphi''} + \frac{\Delta'}{\varphi'\varphi''} = -\frac{1}{\Phi'_{,,}}$$

übergeht, wenn $\Phi'_{,,}$ die Gesammtbrennweite der zweiten und dritten Linse bezeichnet. Hiemit wird

$$D^{IV} = -\frac{\varphi}{\Phi'_{,,}}$$

Für die Vergrösserung des aus drei Linsen bestehenden Fernrohrs haben wir also die zwei Ausdrücke

$$\Phi_, : \varphi'' \quad \text{und} \quad \varphi : \Phi'_{,,}$$

erhalten, die alle Combinationen der Brennweiten zu zwei Gruppen erschöpfen, die möglich sind ohne die Reihenfolge der drei Linsen zu unterbrechen. Die Fortsetzung dieser Entwickelungen muss ein analoges Resultat geben. Bezeichnen wir daher irgend eine bestimmte Gesammtbrennweite dadurch, dass wir dem Buchstaben Φ die Anzahl der Accente anhängen, die sowohl der ersten wie der letzten dazu concurrirenden Linse angehören, das ist mit Φ_q^p oder Φ_p^q, dann bekommt man allgemein für die Vergrösserung eines aus einer beliebigen Anzahl von Linsen bestehenden Fernrohrs den Ausdruck

$$\Phi_q^0 : \Phi_{\mu-1}^{q+1}$$

wofür man auch schreiben könnte,

$$\Phi_0^p : \Phi_{p+1}^{\mu-1}$$

da die p und q hier mit einander vertauscht werden dürfen, und nur darauf zu achten ist, dass der Accent 0 (d. i. keine Accente) dem Objectiv angehöre.

Für ein terrestrisches Fernrohr z. B., welches aus fünf Linsen besteht, erhält man die folgenden vier Ausdrücke der Vergrösserung

$$\Phi^0_{\prime\prime\prime} : \varphi^{iv}; \quad \Phi^0_{\prime\prime} : \Phi'''_{iv}; \quad \Phi^0_{\prime} : \Phi''_{iv}; \quad \varphi : \Phi'_{iv}$$

58.

Wenden wir uns zu den im Art. 46 eingeführten Punkten $J_{\prime}$ und J, die ausschliesslich einem System von brechenden Oberflächen angehören, in welchem $A^{2m-2} = 0$ ist. Gehen wir zu einem Linsensystem über, so kommen wir wieder, da zufolge der Gleichungen (52) immer

$$A^{2m-2} = C^{2\mu-2}$$

also hier $C^{2\mu-2} = 0$ ist, auf ein beliebiges Fernrohr, und die Gleichungen für $J_{\prime}$ und J werden, nachdem $n = 1$ und $n^m = 1$ gesetzt worden sind,

$$\begin{aligned} J_{\prime} &= q^{m-1} + A^{2m-3} B^{2m-3} \\ J &= q \quad\;\; - B^{2m-2} B^{2m-3} \end{aligned}$$

Um diese A und B Coefficienten durch die C und D Coefficienten auszudrücken, dienen vor Allem die Gleichungen (52), welche im jetzigen Falle

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad A^{2m-3} = C^{2\mu-3}, \quad B^{2m-2} = D^{2\mu-2}$$

geben, aber der Ausdruck für B^{2m-3}, welcher im allgemeinen Falle durch die (33) gefunden werden kann, lässt sich jetzt, wegen $A^{2m-2} = 0$, nicht aus dieser ableiten, wir bekommen ihn aber durch die Zuziehung der ersten Gleichungen (38) und (51). Diese geben jetzt, da $\xi^m = \xi^\mu$ ist,

$$\begin{aligned} (\xi^\mu - q^{m-1})\, B^{2m-2} &= B^{2m-3} + (\xi - q)\, A^{2m-3} \\ (\xi^\mu - e_{\prime}^{\mu-1})\, D^{2\mu-2} &= D^{2\mu-3} + (\xi - e)\, C^{2\mu-3} \end{aligned}$$

aus deren Unterschiede, wegen der (57), ξ und ξ^μ verschwinden. Man bekommt hierauf sogleich

$$B^{2m-3} = D^{2\mu-3} + (q-e)\, C^{2\mu-3} + (e_{\prime}^{\mu-1} - q^{m-1})\, D^{2\mu-2}$$

und es werden daher, wenn ausserdem die Gleichung

$$C^{2\mu-3} D^{2\mu-2} = 1$$

berücksichtigt wird,

$$(58) \quad . \quad \begin{cases} J_{\prime} = e_{\prime}^{\mu-1} + C^{2\mu-3} D^{2\mu-3} + (q-e)\,(C^{2\mu-3})^2 \\ J = e \quad\;\; - D^{2\mu-2} D^{2\mu-3} + (q^{m-1} - e_{\prime}^{\mu-1})\,(D^{2\mu-2})^2 \end{cases}$$

wodurch $J_,$ und J berechnet werden können, wenn die betreffenden C und D Coefficienten gegeben sind. Man kann bemerken, dass der erste Ausdruck (58) aus dem ersten (54) entsteht, wenn darin $\xi = q$ und $C^{2\mu-2} = 0$ gesetzt wird. Ebenso entsteht der zweite Ausdruck (58) aus jenem, wenn man $\xi^{\mu} = q^{m-1}$, $C^{2\mu-2} = 0$ setzt, und die Gleichung in Bezug auf ξ auflöst.

59.

Man kann jedoch die Werthe von $J_,$ und J erhalten ohne die C und D Coefficienten zu benutzen. Da zufolge des Art. 46 $J_,$ die Abscisse des Bildes eines Gegenstandes ist, dessen Abscisse q ist, so bekommt man $J_,$ durch die allgemeinen Gleichungen (56), nachdem darin q statt ξ substituirt worden ist. Rechnet man daher

$$a = e - q \qquad \alpha = \frac{a\varphi}{a-\varphi}$$

$$a' = \Delta - \alpha \qquad \alpha' = \frac{a'\varphi'}{a'-\varphi'}$$

etc. bis

$$a^{\mu-1} = \Delta^{\mu-2} - \alpha^{\mu-2}, \quad \alpha^{\mu-1} = \frac{a^{\mu-1}\varphi^{\mu-1}}{a^{\mu-1}-\varphi^{\mu-1}}$$

so wird

$$J_, = e_,^{\mu-1} + \alpha^{\mu-1}$$

Da ferner J die Abscisse des Bildes eines Gegenstandes ist, dessen Abscisse q^{m-1} ist, und hiebei die Lichtstrahlen in entgegengesetzter Richtung fortschreitend gedacht werden, so bekommt man den Werth von J durch eine der vorstehend beschriebenen entgegengesetzt ausgeführte Rechnung. Schreibt man, um Verwechselungen zu vermeiden, $\gamma^{\mu-1}$ statt a, $c^{\mu-1}$ statt α, $\gamma^{\mu-2}$ statt a', $c^{\mu-2}$ statt α', u. s. w. und rechnet durch die folgenden Ausdrücke

$$\gamma^{\mu-1} = q^{m-1} - e_,^{\mu-1}, \quad c^{\mu-1} = \frac{\gamma^{\mu-1}q^{\mu-1}}{\gamma^{\mu-1}-q^{\mu-1}}$$

$$\gamma^{\mu-2} = \Delta^{\mu-2} - c^{\mu-1}, \quad c^{\mu-2} = \frac{\gamma^{\mu-2}q^{\mu-2}}{\gamma^{\mu-2}-q^{\mu-2}}$$

$$\gamma^{\mu-3} = \Delta^{\mu-3} - c^{\mu-2}, \quad c^{\mu-3} = \frac{\gamma^{\mu-3}q^{\mu-3}}{\gamma^{\mu-3}-q^{\mu-3}}$$

etc. bis

$$\gamma' = \Delta' - c'' \qquad c' = \frac{\gamma'\varphi'}{\gamma'-q'}$$

$$\gamma = \Delta - c' \qquad c = \frac{\gamma q}{\gamma - q}$$

so bekommt man

$$J = e - c$$

60.

Die Vergrösserung des in $J_{,}$ befindlichen Bildes ist zufolge des Art. 46

$$= A^{2m-3}$$

also

$$= \frac{1}{D^{2\mu-2}}$$

folglich das Entgegengesetzte der Vergrösserung des Fernrohrs; dieses Bild ist eben so viele Male verkleinert, als das Fernrohr beim Durchsehen durch das Ocular die Gegenstände vergrössert. Hieraus entspringt ein practisches Verfahren, um die Vergrösserung eines Fernrohrs zu bestimmen, welches längst bekannt ist.

In mehreren Gattungen von Fernröhren erblickt man vor dem letzten Ocular eine kleine hellleuchtende kreisförmige Scheibe, diese ist das in $J_{,}$ befindliche Bild des Objectivs, wenn im Fernrohr keine hindernden Blendungen angebracht sind. Da dieses Bild, dem Vorhergehenden zufolge, den Gegenstand, von welchem es herrührt, hier im Allgemeinen den Durchmesser des Objectivs eben so viele Male verkleinert, als das Fernrohr überhaupt die Gegenstände vergrössert, so braucht man nur den Durchmesser des Objectivs sowohl wie den dieser Scheibe zu messen, und ersteren durch letzteren zu dividiren, um die Vergrösserung des Fernrohrs zu erhalten. Sollte man im Innern des Fernrohrs hindernde Blendungen befürchten, so braucht man nur am Objectiv zu diesem Zweck eine Blendung von angemessener Oeffnung anzubringen.

Der Punkt $J_{,}$ wird in der Dioptrik der Ort des Auges genannt.

Im Galiläischen Fernrohr liegt $J_{,}$ im Innern des Fernrohrs, wird daher nicht reel, und kann nicht unmittelbar zur Bestimmung der Vergrösserung eines solchen Fernrohrs benutzt werden, jedoch hat man Mittel gefunden, um ihn auch hier dazu benutzen zu können.

Das im Punkt J, den man den Gegenpunkt nennen kann, befindliche Bild, ist das des letzten Oculars, wenn keine Hindernisse im Innern des Fernrohrs vorhanden sind, und der Durchmesser des letzten Oculars erscheint in demselben unter derselben Vergrösse-

rung, die überhaupt das Fernrohr gewährt. Dieser Gegenpunkt liegt gemeiniglich, wenn er reel ist, in sehr grosser Entfernung vom Objectiv, und scheint keiner practischen Benutzung zugänglich zu sein.

61.

Es soll noch, zur Ergänzung dieser Theorie, die Frage erörtert werden, wie gross die Oeffnungen der verschiedenen Linsen sein müssen, damit ein gegebener Lichtstrahl durch sie hindurch gehen könne. Berechnet man den Weg des Lichtstrahls nach einer der strengen Verfahrungsarten des § 1, so kann man, wie dort erklärt worden ist, für jede vorhandene brechende Oberfläche die Werthe der k, k'', k''', etc. strenge berechnen, die die halben erforderlichen Oeffnungen bedeuten.

Aber es wird wohl nie das Bedürfniss eintreten, diese Oeffnungen mit grösster Genauigkeit kennen zu lernen, sondern es wird immer ein Weniges davon vergeben werden dürfen, und infolge dessen kann man sie durch die den centralen Lichtstrahlen zukommenden Relationen stets mit ausreichender Genauigkeit erhalten, zumal diese Oeffnungen, um zu grosse Einfallswinkel zu vermeiden, in der Anwendung nur kleine Bruchtheile der Krümmungshalbmesser sein dürfen.

Berechnet man den Weg der centralen Lichtstrahlen durch das Verfahren des Art. 37, so bekommt man zugleich die Werthe der k', k'', etc. für jede vorhandene brechende Oberfläche, wenn für γ und k die betreffenden Werthe des zu betrachtenden einfallenden Lichtstrahls substituirt werden, und k erforderlichen Falles die halbe Oeffnung der ersten brechenden Oberfläche bedeuten darf. Ist das gegebene System brechender Oberflächen ein System von Linsen, die in Bezug auf ihre Krümmungshalbmesser nur eine geringe Dicke besitzen, so werden bis auf sehr Weniges, $k' = k$, $k''' = k''$, etc. sein, und man braucht entweder nur die mit graden, oder die mit ungraden Indices versehenen k zu berechnen.

Wenn man im Falle des Linsensystems sich des Verfahrens des Art. 49 bedient, um den Weg des Lichtstrahls zu berechnen, so bekommt man nicht unmittelbar die k', k'', etc., sondern statt dieser die l', l', l'', etc. Diese letzteren sind aber in den meisten Fällen so wenig von jenen verschieden, dass sie für die halben Oeffnungen

der Linsen angesehen werden können. Denn da die k', k'', k''', etc. sich auf die Oberflächen der einzelnen Linsen, während die l, l', l'', etc. sich auf die Hauptpunkte derselben beziehen, und gemeiniglich die Hauptpunkte einer einzelnen Linse innerhalb derselben, oder wenigstens nicht ausserhalb, liegen, so werden l nahe gleich k oder k', l' nahe gleich k'' oder k''', u. s. w. sein. Es giebt jedoch Ausnahmefälle hievon, und diese treten ein, wenn sich im Linsensystem Menisken befinden, deren Krümmungshalbmesser bedeutend kleiner als deren Brennweiten sind. In diesen Fällen können die Hauptpunkte weit von der Linse entfernt liegen, und es kann daher der Werth des betreffenden l von den Werthen der dazu gehörigen beiden k sehr verschieden sein. Um diese Fälle in die allgemeinen Gleichungen einzuschliessen, müssen die Unterschiede zwischen den l und den k berücksichtigt werden.

62.

Die Gleichungen (45) und (46) geben allgemein für ein System brechender Oberflächen

$$K = k \quad + \frac{B^{2m-2} - 1}{A^{2m-2}} \gamma$$

$$K = k^{m-1} - \frac{A^{2m-3} - 1}{B^{2m-2}} \gamma^{m}$$

und daher für ein Linsensystem vermöge der (52)

$$K = k \quad + \frac{D^{2\mu-2} - 1}{C^{2\mu-2}} \varepsilon + (q - e)\varepsilon$$

$$K = k^{2\mu-1} - \frac{C^{2\mu-3} - 1}{C^{2\mu-2}} \varepsilon^{\mu} + (q^{2\mu-1} - e_{,}^{\mu-1})\varepsilon^{\mu}$$

Wenden wir diese Gleichungen auf die erste Linse an, so geht K in l über und es muss $\mu = 1$ gesetzt werden. Da nun $D = C^{-1} = 1$ sind, so ergiebt sich

$$l = k + (q - e)\varepsilon = k' + (q' - e_{,})\varepsilon' .$$

und für die einzelnen folgenden Linsen bekommen wir

$$l' = k'' + (q'' - e')\varepsilon' = k''' + (q''' - e_{,}')\varepsilon''$$
$$l'' = k^{iv} + (q^{iv} - e'')\varepsilon'' = k^{v} + (q^{v} - e_{,}'')\varepsilon'''$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

worauf die Gleichungen (48)

$$
\left.
\begin{array}{l}
k'' = \{ D' + (e' - q'')\, D \}\varepsilon + \{ C' + (e' - q'')\, C \} l \\
k^{iv} = \{ D''' + (e'' - g^{iv})\, D'' \}\varepsilon + \{ C''' + (e'' - q^{iv})\, C'' \} l \\
k^{vi} = \{ D^{v} + (e''' - q^{vi})\, D^{iv} \}\varepsilon + \{ C^{v} + (e''' - q^{vi})\, C^{iv} \} l \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc. bis} \\
k^{2\mu-2} = \{ D^{2\mu-3} + (e^{\mu-1} - q^{2\mu-2})\, D^{2\mu-4} \}\varepsilon \\
\qquad\qquad + \{ C^{2\mu-3} + (e^{\mu-1} - q^{2\mu-2})\, C^{2\mu-4} \} l \\
\text{und} \\
k' = \qquad (e_{,} - q')\,\varepsilon + \{ 1 + (e_{,} - q')\, C \} l \\
k''' = \{ D' + (e_{,}' - q''')\, D'' \}\varepsilon + \{ C' + (e_{,}' - q''')\, C'' \} l \\
k^{v} = \{ D''' + (e_{,}'' - q^{v})\, D^{iv} \}\varepsilon + \{ C''' + (e_{,}'' - q^{v})\, C^{iv} \} l \\
\qquad\qquad \text{etc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{etc. bis} \\
k^{2\mu-1} = \{ D^{2\mu-3} + (e_{,}^{\mu-1} - q^{2\mu-1})\, D^{2\mu-2} \}\varepsilon \\
\qquad\qquad + \{ C^{2\mu-3} + (e_{,}^{\mu-1} - q^{2\mu-1})\, C^{2\mu-2} \} l
\end{array}
\right\} \quad . \; . \; (59)
$$

geben. In diesen Ausdrücken werden nur in den oben angeführten besonderen Fällen die zweiten Glieder der Coefficienten merkliche Werthe haben, und man wird in allen Fällen $k' = k$, $k''' = k''$, $k^{v} = k'''$ etc. bis $k^{2\mu-1} = k^{2\mu-2}$ annehmen dürfen.

Man hat früher in der Dioptrik die Oeffnungsmaasse der Linsen in zwei Theile zerlegt eingeführt, die mit ε multiplicirten Glieder der Gleichungen (48) oder (59) die Oeffnungen wegen des Gesichtsfeldes, und die mit l multiplicirten die Oeffnungen wegen Helligkeit genannt. Man hat hinzugefügt, dass nicht nur von diesen beiden Gattungen von Oeffnungsmaassen die algebraische Summe genommen werden müsse, sondern dass in den Anwendungen die Oeffnungen noch etwas grösser gemacht werden müssten, damit der ganze Strahlenkegel, dem der besonders betrachtete Lichtstrahl als Hauptstrahl angehört, durch die Linsen hindurch gehen könne.

Die vorstehenden Gleichungen geben in allen Fällen die vollständigen halben Oeffnungen, oder die vollständigen Oeffnungsmaasse.

63.

Die in den Gleichungen des vor. Art. vorkommenden C und D Coefficienten können durch die Vereinigungsweiten a', a'', a''', etc. und α, α', α'', α''', etc. der Lichtstrahlen vor und nach den einzelnen Linsen ausgedrückt werden. Aus dem Art. 49 u. f. folgt ohne Weiteres, dass $C = \frac{1}{q}$ ist, da aber

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{a}$$

und a in den folgenden Ausdrücken gar nicht vorkommen kann, so können wir diese Linie hier willkührlich annehmen. Setzen wir daher $a = \infty$, so wird $\alpha = \varphi$, und $C = \frac{1}{\alpha}$, welcher Ausdruck angewandt werden soll, weil er allen Ausdrücken grössere Gleichförmigkeit verleiht. Aus den Gleichungen $C' = (e_{,} - e')\,C + 1$ und $\alpha + a' = e' - e_{,}$ der Artt 49 und 53 folgt sogleich $C' = -\frac{a'}{\alpha}$. Da ferner

$$C'' = -\frac{1}{\varphi'}\frac{a'}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\varphi'} = \frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{a'}$$

sind, so bekommt man sogleich $C'' = -\frac{a'}{\alpha\alpha'}$, und da man diese Entwickelungen fortsetzen kann, so weit man will, so ergeben sich

$$C = \frac{1}{\alpha} \qquad C' = -\frac{a'}{\alpha}$$
$$C'' = -\frac{a'}{\alpha\alpha'} \qquad C''' = \frac{a'a''}{\alpha\alpha'}$$
$$C^{\text{iv}} = \frac{a'a''}{\alpha\alpha'\alpha''} \qquad C^{\text{v}} = -\frac{a'a''a'''}{\alpha\alpha'\alpha''}$$

etc. etc.

In Betreff der D Coefficienten giebt der Art. 49 zuerst $D' = -\Delta$ und $D'' = -\frac{\Delta}{\alpha'} - \frac{\Delta}{a'} + 1$, oder da $\Delta = \alpha + a'$ ist, $D'' = -\frac{\Delta}{a'} - \frac{\alpha}{a'}$. Da ferner

$$D''' = -(e_{,}' - e'')\left(\frac{\Delta}{\alpha'} + \frac{\alpha}{a'}\right) - \Delta, \text{ und } e'' - e_{,}' = \alpha' + a''$$

sind, so bekommt man leicht $D''' = \Delta\frac{a''}{\alpha'} + \Delta'\frac{\alpha}{a'}$, und wenn diese Entwickelungen fortgesetzt werden,

$$D' = -\Delta, \qquad D'' = -\frac{\Delta}{\alpha'} - \frac{\alpha}{a'}$$
$$D''' = \frac{\Delta}{\alpha'}a'' + \Delta'\frac{\alpha}{a'}, \quad D^{\text{iv}} = \left(\frac{\Delta}{\alpha'}a'' + \Delta'\frac{\alpha}{a'}\right)\frac{1}{\alpha''} + \frac{\alpha\alpha'}{a'a''}$$
$$D^{\text{v}} = -\left(\frac{\Delta}{\alpha'}a'' + \Delta'\frac{\alpha}{a'}\right)\frac{a'''}{\alpha''} - \Delta''\frac{\alpha\alpha'}{a'a''}$$
$$D^{\text{vi}} = -\left(\left(\frac{\Delta}{\alpha'}a'' + \Delta'\frac{\alpha}{a'}\right)\frac{a'''}{\alpha''} + \Delta''\frac{\alpha\alpha'}{a'a''}\right)\frac{1}{\alpha'''} - \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{a'a''a'''}$$
$$D^{\text{vii}} = \left(\left(\frac{\Delta}{\alpha'}a'' + \Delta'\frac{\alpha}{a'}\right)\frac{a'''}{\alpha''} + \Delta''\frac{\alpha\alpha'}{a'a''}\right)\frac{a^{\text{iv}}}{\alpha'''} + \Delta'''\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{a'a''a'''}$$

oder wenn man diese von den vorhergehenden abhängig machen will,

$$\begin{array}{ll} D' = -\varDelta & D'' = \frac{D'}{\alpha'} + \frac{1}{C'} \\ D''' = -\frac{D'}{\alpha'}a'' - \frac{\varDelta'}{C''}, & D^{IV} = \frac{D'''}{\alpha''} + \frac{1}{C'''} \\ D^{V} = -\frac{D'''}{\alpha''}a''' - \frac{\varDelta''}{C'''}, & D^{VI} = \frac{D^{V}}{\alpha'''} + \frac{1}{C^{V}} \\ D^{VII} = -\frac{D^{V}}{\alpha'''}a^{IV} - \frac{\varDelta'''}{C^{V}}, & D^{VIII} = \frac{D^{VII}}{\alpha^{IV}} + \frac{1}{C^{VII}} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Die Vereinigungsweiten sind hier durch die Gleichungen

$$a = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = \varphi & a' = \varDelta - \alpha \\ \alpha' = \frac{a'\varphi'}{a'-\varphi'} & a'' = \varDelta' - \alpha' \\ \alpha'' = \frac{a''\varphi''}{a''-\varphi''} & a''' = \varDelta'' - \alpha'' \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

zu berechnen.

64.

Die obigen Ausdrücke können durch die Einführung der verschiedenen Brennweiten auf andere Formen gebracht werden. Seien wie vorher die Brennweiten der einzelnen Linsen der Reihe nach φ, φ', φ'', etc., die Gesammtbrennweiten der ersten und zweiten Linse $\Phi^0_{,}$, die der drei ersten Linsen $\Phi^0_{,,}$, die der vier ersten $\Phi^0_{,,,}$ u. s. w., so geben die obigen Entwickelungen schon

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\varphi} \\ C'' &= \frac{1}{\Phi^0_{,}} \\ C^{IV} &= \frac{1}{\Phi^0_{,,}} \\ C^{VI} &= \frac{1}{\Phi^0_{,,,}} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und aus den vorstehenden ergiebt sich daher sogleich

$$\begin{aligned} C' &= -\frac{a'}{\varphi} \\ C''' &= -\frac{a''}{\Phi^0_{,}} \\ C^{V} &= -\frac{a'''}{\Phi^0_{,,}} \\ C^{VII} &= -\frac{a^{IV}}{\Phi^0_{,,,}} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Ausdrücke derjenigen D Coefficienten, deren Indices ungrade Zahlen sind, bringt man leicht auf die folgende Form

$$D' = -(\varphi + a')$$
$$D''' = -\frac{D'}{\varphi'}a'' - (\Phi^0{}_{,} + a'')$$
$$D^{v} = -\frac{D'''}{\varphi''}a''' - \frac{D'}{\varphi'}a''' - (\Phi^0{}_{,,} + a''')$$
$$D^{vii} = -\frac{D^{v}}{\varphi'''}a^{iv} - \frac{D'''}{\varphi''}a^{iv} - \frac{D'}{\varphi'}a^{iv} - (\Phi^0{}_{,,,} + a^{iv})$$

etc.

Die D Coefficienten, deren Indices grade Zahlen sind, können zu Functionen der verschiedenen Brennweiten gemacht werden. Man findet leicht die folgenden einfachen Ausdrücke,

$$D'' = \varphi\left(\frac{1}{\Phi_{,}{}^0} - \frac{1}{\varphi'}\right)$$
$$D^{iv} = \Phi_{,}{}^0\left(\frac{D''}{\Phi^0{}_{,,}} - \frac{1}{\varphi''}\right)$$
$$D^{vi} = \Phi^0{}_{,,}\left(\frac{D^{iv}}{\Phi^0{}_{,,,}} - \frac{1}{\varphi'''}\right)$$
$$D^{viii} = \Phi^0{}_{,,,}\left(\frac{D^{vi}}{\Phi^0{}_{iv}} - \frac{1}{\varphi^{iv}}\right)$$

etc.

Hiemit ist zugleich die Berechnung dieser D von der jener ganz unabhängig gemacht worden.

Jene D Coefficienten werden auch zu blosen Functionen der verschiedenen Brennweiten, wenn man sie auf ein Fernrohr anwendet. Die obigen Gleichungen werden für zwei Linsen, da alsdann $a' = \varphi'$

$$\frac{D'}{\varphi'} + \frac{\varphi}{\varphi'} + 1 = 0$$

für drei Linsen, da alsdann $a'' = \varphi''$

$$\frac{D'''}{\varphi''} + \frac{D'}{\varphi'} + \frac{\Phi^0{}_{,}}{\varphi''} + 1 = 0$$

für vier Linsen, da alsdann $a''' = \varphi'''$

$$\frac{D^{v}}{\varphi'''} + \frac{D'''}{\varphi''} + \frac{D'}{\varphi'} + \frac{\Phi^0{}_{,,}}{\varphi'''} + 1 = 0$$

für fünf Linsen, da alsdann $a^{iv} = \varphi^{iv}$

$$\frac{D^{vii}}{\varphi^{iv}} + \frac{D^{v}}{\varphi'''} + \frac{D'''}{\varphi''} + \frac{D'}{\varphi'} + \frac{\Phi^0{}_{,,,}}{\varphi^{iv}} + 1 = 0$$

65.

Die vorhergehenden Ausdrücke geben Anlass zu neuen Formen, wenn die Vereinigungsweiten auf ausgedehntere Weise benutzt werden. Seien von den (60) ausgehend

$$a = -\infty, \qquad \alpha = \varphi$$

$$a' = \Delta - \alpha, \qquad \alpha' = \frac{a'\varphi'}{a'-\varphi'}$$

$$a'' = \Delta' - \alpha', \qquad \alpha'' = \frac{a''\varphi''}{a''-\varphi''}$$

$$a''' = \Delta'' - \alpha'', \qquad \alpha''' = \frac{a'''\varphi'''}{a'''-\varphi'''}$$

etc. bis

$$a^{\mu-1} = \Delta^{\mu-2} - \alpha^{\mu-2}, \qquad \alpha^{\mu-1} = \frac{a^{\mu-1}\varphi^{\mu-1}}{a^{\mu-1}-\varphi^{\mu-1}}$$

$$a'_{,} = -\infty, \qquad \alpha'_{,} = \varphi'$$

$$a''_{,} = \Delta' - \alpha'_{,}, \qquad \alpha''_{,} = \frac{a''_{,}\varphi''}{a''_{,}-\varphi''}$$

$$a'''_{,} = \Delta'' - \alpha''_{,}, \qquad \alpha'''_{,} = \frac{a'''_{,}\varphi'''}{a'''_{,}-\varphi'''}$$

etc. bis

$$a_{,}^{\mu-1} = \Delta^{\mu-2} - \alpha_{,}^{\mu-2}, \qquad \alpha_{,}^{\mu-1} = \frac{a_{,}^{\mu-1}\varphi^{\mu-1}}{a_{,}^{\mu-1}-\varphi^{\mu-1}}$$

$$a''_{,,} = -\infty, \qquad \alpha''_{,,} = \varphi''$$

$$a'''_{,,} = \Delta'' - \alpha''_{,,}, \qquad \alpha'''_{,,} = \frac{a'''_{,,}\varphi'''}{a'''_{,,}-\varphi'''}$$

etc. bis

$$a_{,,}^{\mu-1} = \Delta^{\mu-2} - \alpha_{,,}^{\mu-2}, \qquad \alpha_{,,}^{\mu-1} = \frac{a_{,,}^{\mu-1}\varphi^{\mu-1}}{a_{,,}^{\mu-1}-\varphi^{\mu-1}}$$

$$b^{\mu-1} = \infty \qquad \beta^{\mu-1} = \varphi^{\mu-1}$$

$$b^{\mu-2} = \Delta^{\mu-2} - \beta^{\mu-1}, \qquad \beta^{\mu-2} = \frac{b^{\mu-2}\varphi^{\mu-2}}{b^{\mu-2}-\varphi^{\mu-2}}$$

$$b^{\mu-3} = \Delta^{\mu-3} - \beta^{\mu-2}, \qquad \beta^{\mu-3} = \frac{b^{\mu-3}\varphi^{\mu-3}}{b^{\mu-3}-\varphi^{\mu-3}}$$

$$b^{\mu-4} = \Delta^{\mu-4} - \beta^{\mu-3}, \qquad \beta^{\mu-4} = \frac{b^{\mu-4}\varphi^{\mu-4}}{b^{\mu-4}-\varphi^{\mu-4}}$$

etc. bis

$$b = \Delta - \beta', \qquad \beta = \frac{b\varphi}{b-\varphi}$$

$$b_{,}^{\mu-2} = \infty, \qquad \beta_{,}^{\mu-2} = \varphi^{\mu-2}$$

$$b_{,}^{\mu-3} = \Delta^{\mu-3} - \beta_{,}^{\mu-2}, \qquad \beta_{,}^{\mu-3} = \frac{b_{,}^{\mu-3}\varphi^{\mu-3}}{b_{,}^{\mu-3}-\varphi^{\mu-3}}$$

$$b_{,}^{\mu-4} = \Delta^{\mu-4} - \beta_{,}^{\mu-3}, \qquad \beta_{,}^{\mu-4} = \frac{b_{,}^{\mu-4}\varphi^{\mu-4}}{b_{,}^{\mu-4}-\varphi^{\mu-4}}$$

etc. bis

$$b_{,} = \Delta - \beta_{,}', \qquad \beta_{,} = \frac{b_{,}\varphi}{b_{,}-\varphi}$$

$$b_{,,}^{\mu-3} = \infty, \qquad \beta_{,,}^{\mu-3} = \varphi^{\mu-3}$$

$$b_{,,}^{\mu-4} = \Delta^{\mu-4} - \beta_{,,}^{\mu-3}, \qquad \beta_{,,}^{\mu-4} = \frac{b_{,,}^{\mu-4}\varphi^{\mu-4}}{b_{,,}^{\mu-4}-\varphi^{\mu-4}}$$

etc. bis

$$b_{,,} = \Delta - \beta_{,,}', \qquad \beta_{,,} = \frac{b_{,,}\varphi}{b_{,,}-\varphi}$$

u. s. w. bis man auf die beiden letzten und bez. die beiden ersten Linsen, für sich allein, kommt. Die letzte Abtheilung wird daher sein, für die a und α

$$a_{\mu-2}^{\mu-2} = -\infty, \qquad \alpha_{\mu-2}^{\mu-2} = \varphi^{\mu-2}$$

$$a_{\mu-2}^{\mu-1} = \Delta^{\mu-2} - \alpha_{\mu-2}^{\mu-2}, \qquad \alpha_{\mu-2}^{\mu-1} = \frac{a_{\mu-2}^{\mu-1}\varphi^{\mu-1}}{a_{\mu-2}^{\mu-1}-\varphi^{\mu-1}}$$

und für die b und β

$$b'_{\mu-2} = \infty, \qquad \beta'_{\mu-2} = \varphi'$$

$$b_{\mu-2} = \Delta - \beta'_{\mu-2}, \qquad \beta_{\mu-2} = \frac{b_{\mu-2}\varphi}{b_{\mu-2}-\varphi}$$

Durch Hülfe dieser Vereinigungsweiten kann man alle verschiedenen Gesammtbrennweiten, die Haupt- und die Brennpunkte, so wie die D Coefficienten auf sehr einfache Weise ausdrücken. Die C Coefficienten sind schon im vor. Art. durch möglichst einfache Ausdrücke erhalten worden.

66.

Man erhält sogleich für die Gesammtbrennweiten die folgenden doppelten Ausdrücke,

$$\Phi^0_{,} = -\varphi\frac{\alpha'}{a'} = -\varphi'\frac{\beta_{\mu-2}}{b_{\mu-2}}$$

$$\Phi^0_{,,} = -\Phi^0_{,}\frac{\alpha''}{a''} = -\Phi'_{,,}\frac{\beta_{\mu-3}}{b_{\mu-3}}$$

$$\Phi^0_{,,,} = -\Phi^0_{,,}\frac{\alpha'''}{a'''} = -\Phi'_{,,,}\frac{\beta_{\mu-4}}{b_{\mu-4}}$$

$$\Phi^0_{IV} = -\Phi^0_{,,,}\frac{\alpha^{IV}}{a^{IV}} = -\Phi'_{IV}\frac{\beta_{\mu-5}}{b_{\mu-5}}$$

etc.

$$\Phi'_{\prime\prime} = -\ \varphi' \frac{\alpha_{\prime}''}{a_{\prime}''} = -\ \varphi'' \frac{\beta'_{\mu-3}}{b_{\mu-3}}$$

$$\Phi'_{\prime\prime\prime} = -\Phi'_{\prime\prime} \frac{\alpha_{\prime}'''}{a_{\prime}'''} = -\Phi''_{\prime\prime\prime} \frac{\beta'_{\mu-4}}{b'_{\mu-4}}$$

$$\Phi'_{IV} = -\Phi'_{\prime\prime\prime} \frac{\alpha_{\prime}^{IV}}{a_{\prime}^{IV}} = -\Phi''_{IV} \frac{\beta'_{\mu-5}}{b'_{\mu-5}}$$

etc.

$$\Phi''_{\prime\prime\prime} = -\ \varphi'' \frac{\alpha_{\prime\prime}'''}{a_{\prime\prime}'''} = -\ \varphi'''_{IV} \frac{\beta''_{\mu-4}}{b''_{\mu-4}}$$

$$\Phi''_{IV} = -\Phi''_{\prime\prime\prime} \frac{\alpha_{\prime\prime}^{IV}}{a_{\prime\prime}^{IV}} = -\Phi'''_{IV} \frac{\beta''_{\mu-5}}{b''_{\mu-5}}$$

etc.

$$\Phi'''_{IV} = -\ \varphi''' \frac{\alpha_{\prime\prime\prime}^{IV}}{a_{\prime\prime\prime}^{IV}} = -\ \varphi^{IV} \frac{\beta'''_{\mu-5}}{b'''_{\mu-5}}$$

etc.

---

etc.

Bezeichnet man die Brenn- und die Hauptpunkte auf dieselbe Weise, und zwar die ersten mit F^q_p und E^p_q, und die zweiten mit F^q_p und E^q_p, wo immer $p < q$ anzusetzen ist, so ergeben sich sogleich

$$\begin{aligned} F^0_{\prime} &= e - \beta_{\mu-2} & \qquad F'_0 &= e'_{\prime} + \alpha'_{\prime} \\ F^0_{\prime\prime} &= e - \beta_{\mu-3} & F''_0 &= e''_{\prime} + \alpha'' \\ F^0_{\prime\prime\prime} &= e - \beta_{\mu-4} & F'''_0 &= e'''_{\prime} + \alpha''' \\ F^0_{IV} &= e - \beta_{\mu-5} & F^{IV}_0 &= e^{IV}_{\prime} + \alpha^{IV} \end{aligned}$$

etc. etc.

$$\begin{aligned} F'_{\prime\prime} &= e' - \beta'_{\mu-3} & \qquad F''_{\prime} &= e''_{\prime} + \alpha''_{\prime} \\ F'_{\prime\prime\prime} &= e' - \beta'_{\mu-4} & F'''_{\prime} &= e'''_{\prime} + \alpha'''_{\prime} \\ F'_{IV} &= e' - \beta'_{\mu-5} & F^{IV}_{\prime} &= e^{IV}_{\prime} + \alpha^{IV}_{\prime} \end{aligned}$$

etc. etc.

$$\begin{aligned} F''_{\prime\prime\prime} &= e'' - \beta''_{\mu-4} & \qquad F'''_{\prime\prime} &= e'''_{\prime} + \alpha'''_{\prime\prime} \\ F''_{IV} &= e'' - \beta''_{\mu-5} & F^{IV}_{\prime\prime} &= e^{IV}_{\prime} + \alpha^{IV}_{\prime\prime} \end{aligned}$$

etc. etc.

$$\begin{aligned} F'''_{IV} &= e''' - \beta'''_{\mu-5} & \qquad F^{IV}_{\prime\prime\prime} &= e^{IV}_{\prime} + \alpha^{IV}_{\prime\prime\prime} \end{aligned}$$

etc. etc.

---

etc. etc.

Die Hauptpunkte bekommt man hierauf durch die allgemeinen Gleichungen

$$E^p_q = F^p_q + \Phi^p_q,\quad E^q_p = F^q_p - \Phi^p_q$$

Alle diese Gleichungen folgen aus dem Vorhergehenden durch so einfache Betrachtungen, dass es wohl nicht nöthig sein wird diese anzuführen.

67.

Um für die D Coefficienten, deren Index eine grade Zahl ist, einfache Ausdrücke zu erhalten, mache ich auf die allgemeine Gleichung

$$F = e - \frac{D^{2\mu-2}}{C^{2\mu-2}}$$

des Art. 50 aufmerksam, welche sogleich nach Einführung der später gewählten Bezeichnung der verschiedenen F und e, so wie der Ausdrücke des Art. 64 für die C Coefficienten,

$$D'' = \frac{\beta_{\mu-2}}{\Phi 0_{,}}$$

$$D^{IV} = \frac{\beta_{\mu-3}}{\Phi 0_{,,}}$$

$$D^{VI} = \frac{\beta_{\mu-4}}{\Phi 0_{,,,}}$$

$$D^{VIII} = \frac{\beta_{\mu-5}}{\Phi 0_{IV}}$$

etc.

giebt. Um auch für die D Coefficienten mit ungradem Index neue Ausdrücke zu erhalten, wende ich mich an die zweite Gleichung (50), welche allgemein

$$D^{2\mu-1} = \frac{D^{2\mu-2}\,C^{2\mu-1} - 1}{C^{2\mu-2}}$$

giebt. Hieraus folgen

$$D' = -\Delta$$

$$D''' = -\left(\frac{a''\beta_{\mu-2}}{\Phi 0_{,}} + \Phi^0_{,}\right)$$

$$D^{V} = -\left(\frac{a^{IV}\beta_{\mu-3}}{\Phi 0_{,,}} + \Phi^0_{,,}\right)$$

$$D^{VII} = -\left(\frac{a^{VI}\beta_{\mu-4}}{\Phi 0_{,,,}} + \Phi^0_{,,,}\right)$$

etc.

Bei der Anwendung auf ein Fernrohr tritt eine Abkürzung ein. Man findet leicht, dass in diesem Falle

$$\beta^{\mu-1} = a^{\mu-1}, \; b^{\mu-2} = \alpha^{\mu-2}, \; \beta^{\mu-2} = a^{\mu-2}, \text{ etc.}$$

werden, und also nicht besonders berechnet zu werden brauchen. Ferner sind in diesem Falle verschiedene Brennpunkte, die im Allgemeinen von einander verschieden sind, identisch. Es werden

$$F'_{\mu-1} = f_{,}, \; F''_{\mu-1} = F'_{0}, \; F'''_{\mu-1} = F''_{0}, \; F^{IV}_{\mu-1} = F'''_{0}, \text{ etc.}$$

wobei zu bemerken ist, dass immer

$$F^{\mu-1}_{\mu-1} = f^{\mu-1} = F_0^{\mu-2}$$

die letzte dieser Gleichungen ist. Es wird ferner von den obigen Ausdrücken, die D'', D^{IV}, etc. geben, derjenige für $D^{2\mu-2}$ unbestimmt, aber da jetzt

$$D^{2\mu-2} = \frac{1}{C^{2\mu-3}}$$

ist, so bekommt man

$$D^{2\mu-2} = -\frac{\varphi^0_{\mu-2}}{a^{\mu-1}} = -\frac{\varphi^0_{\mu-2}}{q^{\mu-1}}$$

womit Alles bestimmt wird. Wenn man ohnehin die C und D Coefficienten berechnet, so kann man auch den Ort des Auges und dessen Gegenpunkt unmittelbar durch die (58) berechnen.

---

§ 3.

Berechnung einiger Beispiele der Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke.

68.

Um die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke zu zeigen, werde ich zuerst den Gang der Lichtstrahlen durch ein bekanntes Objectiv berechnen, welches zu den besten der vorhandenen Objective gehört. Ich wähle dazu das Objectiv des Königsberger Heliometers, dessen Dimensionen Bessel in Schumachers Astr. Nachr. B. XVIII Sp. 106 veröffentlicht hat. In den hier gewählten Bezeichnungen sind für dieses Objectiv

$$r = + 838^L 164 \qquad$$
$$r' = - 333.768 \qquad d = 6^L 0$$
$$r'' = - 340.536 \qquad d' = 0$$
$$r''' = - 1172.508 \qquad d'' = 4.0$$

Das Brechungsverhältniss der ersten (Kronglas-) Linse ist

$$= 1.529130$$

und das der zweiten (Flintglas-) Linse

$$= 1.639121$$

angegeben, und es müssen diese als die Brechungsverhältnisse der mittleren Strahlen angesehen werden, da ausserdem nur das Zerstreuungsverhältniss

$$dn : dn' = 1 : 2.025$$

angegeben ist.

69.

Da die hier entwickelten Ausdrücke den Gang bestimmter Lichtstrahlen geben, so müssen wir aus den vorstehenden Angaben die Brechungsverhältnisse für zwei bestimmte Gattungen von Lichtstrahlen berechnen. Setzt man für die Kronglaslinse das Brechungsverhältniss

$$= 1.518700$$

und in Folge des angeführten Zerstreuungsverhältnisses für die Flintglaslinse dasselbe

$$= 1.618000$$

so werden, wie aus einer Vergleichung mit anderen, aus demselben Münchener Institut, in welchem dieses Objectiv verfertigt worden ist, hervorgegangenen, bekannten Glasarten sich zu erkennen giebt, diese Brechungsverhältnisse einem Punkt in dem hellsten Theile der rothen Strahlen entsprechen. Für die violetten Lichtstrahlen wird man hierauf, in Folge der oben angegebenen mittleren Brechungsverhältnisse

$$1.539560$$
$$\text{und } 1.660242$$

erhalten.

70.

Die im Vorhergehenden verlangten Data werden nun, zufolge des Art. 2, und wenn man die willkührliche Abscisse $q = 0$ setzt,

$$
\begin{array}{llll}
p = + & 838.164 & q = & 0 \\
p' = - & 327.768 & q' = & 6.0 \\
p'' = - & 334.536 & q'' = & 6.0 \\
p''' = - & 1162.508 & q''' = & 10.0
\end{array}
$$

und wenn man die rothen Strahlen betrachtet, für die erste Linse

$$N = 1.518700$$

und für die zweite

$$N' = 1.618000$$

Für die violetten Strahlen hingegen, und für die erste Linse wird

$$N = 1.539560$$

für die zweite hingegen

$$N' = 1.660242$$

71.

Untersuchen wir zuerst den Gang der rothen Lichtstrahlen, die in der Nähe der Abscissenachse einfallen; der rothen centralen Strahlen, wie ich mich ausdrücken werde.

Durch die Ausdrücke des Art. 52 ergeben sich die Substituten der Halbmesser der brechenden Oberflächen und der Linsendicke, in Bezug auf die erste Linse

$$
\begin{aligned}
\varrho &= + 1615.896 \\
\varrho_{,} &= + 643.470 \\
\delta &= + 3.951
\end{aligned}
$$

Hiemit die Brennweite

$$\varphi = + 461.014$$

Die Hauptpunkte

$$
\begin{aligned}
e &= + 2.831 \\
e_{,} &= + 4.873
\end{aligned}
$$

und die Brennpunkte

$$
\begin{aligned}
f &= - 458.183 \\
f_{,} &= + 465.887
\end{aligned}
$$

welche letztere übrigens hier nicht gebraucht werden. Für die zweite Linse bekommt man eben so

$$\varrho' = -\ 551.030$$
$$\varrho'_{,} = +\ 1897.265$$
$$\delta' = 2.472$$
$$\varphi' = -\ 778.000$$
$$e' = +\ 4.986$$
$$e'_{,} = +\ 6.510$$
$$f' = +\ 782.986$$
$$f'_{,} = -\ 771.490$$

Die Ausdrücke des Art. 54 geben hierauf

$$\varDelta = +\ 0.113$$
$$\varPhi = +\ 1131.095$$
$$E = 2.667$$
$$E_{,} = 6.233$$
$$F = -\ 1128.428$$
$$F_{,} = +\ 1137.328$$

Dieser Werth von $F_{,}$ ist die Abscisse, unter welcher der ausfahrende Strahl die Abscissenachse schneidet, also werden

$$\xi'' = +\ 1137^{L}328\,, \quad \eta'' = 0$$

die Coordinaten des Bildes eines Gegenstandes, welcher in der Abscissenachse in unendlich grosser Entfernung auf der Seite der ersten Linse liegt. Wenn dieser Gegenstand nicht in der Abscissenachse liegt, sondern vor der ersten Brechung die Gesichtslinie nach demselben mit der Abscissenachse den Winkel ε macht, so hat zwar ξ'' denselben Werth wie oben, aber die Ordinate wird

$$\eta'' = -\,\varepsilon\varPhi$$

zufolge des Art. 51. Ist daher z. B. $\varepsilon = 16'$, so wird der entsprechende Werth der Ordinate des Bildes

$$\eta'' = -\ 5^{L}2644$$

72.

Nehmen wir jetzt die violetten Strahlen vor, so erhalten wir auf dieselbe Weise wie vorher, für die erste Linse

$$\begin{aligned}
\varrho &= + 1553.421 \\
\varrho_{,} &= + 618.591 \\
\delta &= 3.897 \\
\varphi &= + 443.211 \\
e &= 2.792 \\
e_{,} &= 4.888 \\
f &= - 440.419 \\
f_{,} &= + 448.099
\end{aligned}$$

für die zweite Linse

$$\begin{aligned}
\varrho' &= - 515.775 \\
\varrho_{,}' &= + 1775.876 \\
\delta' &= 2.409 \\
\varphi' &= - 728.282 \\
e' &= 5.012 \\
e_{,}' &= 6.598 \\
f' &= + 733.294 \\
f_{,}' &= - 721.684
\end{aligned}$$

und für beide Linsen im Ganzen

$$\begin{aligned}
\Delta &= + 0.124 \\
\Phi &= + 1131.795 \\
E &= 2.599 \\
E_{,} &= 6.281 \\
F &= - 1129.196 \\
F_{,} &= + 1138.076
\end{aligned}$$

also werden jetzt für Strahlen, die parallel mit der Abscissenachse einfallen

$$\xi'' = + 1138^{\text{L}}076\,, \quad \eta'' = 0$$

so wie für Strahlen, die unter einem Winkel von 16′ einfallen, ξ'' wie vorher, aber

$$\eta'' = - 5^{\text{L}}2676$$

73.

Zur Berechnung der Vereinigungsweiten der Randstrahlen brauchen wir die Grösse der Oeffnung des Objectivs, und diese findet sich in den Königsberger Beobachtungen = 70 Linien angegeben, folglich $k = 35^{\text{L}}0$. Aus den im Art. 70 angegebenen Werthen der

p und q erhalten wir durch die Ausdrücke des Art. 24 oder 31 die in jedem Falle anzuwendenden Constanten

$$\log A = 0.399885n\,, \quad \log B = 0.543229$$
$$\log A' = 9.991281\,, \quad \log B' = 8.298297$$
$$\log A'' = 9.463047\,, \quad \log B'' = 9.848900$$

und wenden wir uns zuerst zu den mit der Abscissenachse parallel einfallenden Strahlen, und bedienen uns des Verfahrens des Art. 31. so erhalten wir

$$\alpha = 0\,, \quad k = 35.0$$

woraus jedenfalls

$$\theta = 2^0\ 23'\ 35''\!.70\,, \quad a = +\ 0.731$$

folgen. Betrachten wir zuerst die rothen Strahlen, so ergeben sich die folgenden Werthe der übrigen zu berechnenden Winkel und Linien,

$$\begin{array}{llll} \alpha' = 0^0\ 49'\ \ 3''\!.55 & & \theta' = -\ 6^0\ \ 0'\ 39''\!.0 \\ \alpha'' = 4\ \ 22\ \ 31.6 & & \theta'' = -\ 5\ \ 53\ \ 25.7 \\ \alpha''' = 0\ \ 26\ \ 36.5 & & \theta''' = -\ 1\ \ 42\ \ 21.7 \end{array}$$

$$\alpha^{IV} = 1^0\ 46'\ 23''\!.5$$
$$\log k''' = 1.542915$$
$$a''' = 9.480$$

und die Gleichung des Lichtstrahls nach der letzten Brechung, nemlich

$$y = (a''' - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha^{IV} + k'''$$

ist völlig bekannt. Nennt man wieder ξ'' die Abscisse, unter welcher der jetzt betrachtete Strahl die Abscissenachse schneidet, so bekommt man

$$\xi'' = 1137^{L}049$$

Für die violetten Strahlen folgt auf dieselbe Weise

$$\begin{array}{llll} \alpha' = 0^0\ 50'\ 20''\!.44 & & \theta' = -\ 6^0\ \ 0'\ 38''\!.2 \\ \alpha'' = 4\ \ 34\ \ 11.0 & & \theta'' = -\ 5\ \ 53\ \ 24.9 \\ \alpha''' = 0\ \ 23\ \ 15.5 & & \theta''' = -\ 1\ \ 42\ \ 22.4 \end{array}$$

$$\alpha^{IV} = 1^0\ 46'\ 17''\!.2$$
$$\log k''' = 1.542965$$
$$a''' = 9.480$$

und hiemit

$$\xi'' = 1138^{L}293$$

74.

Die Betrachtung der Lichtstrahlen, die zur Abscissenachse geneigt einfallen, führt auf weit grössere Mannigfaltigkeit, aber wir können uns hier begnügen, blos diejenigen zu betrachten, deren Einfallswinkel entweder ein Minimum, oder ein Maximum ist, oder mitten zwischen diese beiden Werthe fällt. Die zwei zuerst genannten Strahlen können wieder durch das Verfahren des Art. 31 behandelt werden, da sie mit der Abscissenachse in Einer Ebene liegen. Im ersten Falle erhalten wir, wenn wir die Neigung des einfallenden Strahls zu 16′ annehmen,

$$\alpha = 0^\circ\ 16'\ 0'',\quad k = 35.0,\quad \theta = 2^\circ\ 23'\ 35''.70$$

und hiemit für die rothen Strahlen

$$\begin{aligned} \alpha' &= 0^\circ\ 59'\ 35''.4 & \theta' &= -\ 6^\circ\ 0'\ 32''.5 \\ \alpha'' &= 4\ \ 39\ \ 37.1 & \theta'' &= -\ 5\ \ 53\ \ 19.1 \\ \alpha''' &= 0\ \ 36\ \ 29.7 & \theta''' &= -\ 1\ \ 42\ \ 17.1 \end{aligned}$$

$$\alpha^{iv} = 2^\circ\ 2'\ 21''.7$$

$$\log k''' = 1.542590$$

$$a''' = 9.481$$

$$y = (9.481 - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha^{iv} + 34.8811$$

Die Substitution der Abscisse für die rothen Parallelstrahlen, welche eben gefunden wurde, für x giebt

$$y = -\ 5^L 2701$$

und die Substitution des Werthes der Ordinate für die rothen Centralstrahlen, welcher oben erhalten wurde, giebt

$$x = 1136^L 839$$

Für die violetten Strahlen ergiebt sich auf dieselbe Art

$$\begin{aligned} \alpha' &= 1^\circ\ 0'\ 43''.7 & \theta' &= -\ 6^\circ\ 0'\ 31''.7 \\ \alpha'' &= 4\ \ 50\ \ 16.9 & \theta'' &= -\ 5\ \ 53\ \ 18.2 \\ \alpha''' &= 0\ \ 32\ \ 53.7 & \theta''' &= -\ 1\ \ 42\ \ 17.9 \end{aligned}$$

$$\alpha^{iv} = 2^\circ\ 2'\ 15''.4$$

$$\log k''' = 1.542647$$

$$a''' = 9.481$$

$$y = (9.481 - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha^{iv} + 34.8857$$

und auf dieselbe Art wie vorher

$$y = -5^{L}2752$$
und bez. $x = 1138.019$

75.

Im zweiten Falle, nemlich im Maximum des Einfallswinkels wird

$$\alpha = 0^{0}\,16'\,0'', \quad k = -35.0\,, \quad \theta = -2^{0}\,23'\,35''.70$$

und hiemit für die rothen Strahlen

$$\begin{array}{llll} \alpha' & = -0^{0}\,38'\,31''.8 & \theta' & = 6^{0}\;\;0'\,45''.9 \\ \alpha'' & = -4\;\;\;7\;\;27.1 & \theta'' & = 5\;\;53\;\;32.5 \\ \alpha''' & = -0\;\;16\;\;43.6 & \theta''' & = 1\;\;42\;\;26.4 \end{array}$$

$$\alpha^{v} = -1^{0}\,30'\,26''.0$$
$$\log k''' = 1.543317n$$
$$a''' = 9.480$$
$$y = (9.480 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha^{v} - 34.9395$$

und hieraus eben so wie oben

$$y = -5^{L}2708$$
und bez. $x = 1137.293$

Für die violetten Strahlen ergiebt sich

$$\begin{array}{llll} \alpha' & = -0^{0}\,39'\,57''.2 & \theta' & = 6^{0}\;\;0'\,44''.5 \\ \alpha'' & = -4\;\;18\;\;\;5.6 & \theta'' & = 5\;\;53\;\;31.1 \\ \alpha''' & = -0\;\;13\;\;37.6 & \theta''' & = 1\;\;42\;\;26.8 \end{array}$$

$$\alpha^{v} = -1^{0}\,30'\,19''.6$$
$$\log k''' = 1.543346n$$
$$a''' = 9.480$$
$$y = (9.480 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha^{v} - 34.9418$$

und in demselben Sinne wie vorher

$$y = -5^{L}2755$$
und bez. $x = 1138.593$

76.

Im dritten Falle denken wir uns einen einfallenden Lichtstrahl, welcher mit den in den beiden vorhergehenden Fällen betrachteten Lichtstrahlen parallel ist, für welchen also α denselben Werth hat wie vorher. Dieser Lichtstrahl soll aber den Rand des Objectivs in

einem der beiden Punkte treffen, die 90° von den beiden bisher betrachteten Punkten, welche einander diametral gegenüber stehen, liegen. Es wird daher auch θ denselben Werth haben, wie vorher, aber es werden $\psi - \beta = \pm 90°$ und $k = 35.0$ sein, während β willkührlich angenommen werden kann. Da es gleichgültig ist, welchen dieser beiden Punkte wir annehmen, so sollen jetzt

$$\alpha = 0° 16' 0'', \quad \beta = 0, \quad k = 35.0, \quad \psi = 90°$$

sein, worauf wie oben

$$\theta = 2° 23' 35''.70$$

folgt. Wenden wir nun das zweite allgemeine Verfahren, oder mit anderen Worten, die im Art. 24 zusammengestellten Gleichungen an, so erhalten wir, da die Logarithmen der Constanten A, A', A'', B, B', B'' schon im Art. 73 berechnet worden sind,

für die rothen Lichtstrahlen,

1ste Brechung.

$$\log\begin{cases}\operatorname{tg}\chi = 0.953273, \\ \sin\chi = 9.997324,\end{cases} \quad \lambda = 2° 24' 29''.0, \quad \mu = 1° 35' 7''.2$$

2te Brechung.

$$q = 0° 1' 46''.2, \quad r = 83° 38' 44''.5, \quad \beta' - \beta + r = 161° 31' 33''.1$$

$$\log\begin{cases}\operatorname{tg}\omega' = 9.523915n, & \operatorname{tg}\alpha' = 8.164284, & \operatorname{tg}\chi' = 9.275014n \\ \cos\omega' = 9.977017n, & \cos\alpha' = 9.999953, & \cos\chi' = 9.992427n\end{cases}$$

$$\lambda' = -6° 49' 50''.9, \quad \mu' = -10° 24' 23''.3, \quad \beta' = 77° 52' 48''.6$$

3te Brechung.

$$q' = -0° 49' 18''.7, \quad r' = 169° 19' 59''.7, \quad \beta'' - \beta' + r' = 177° 59' 15''.9$$

$$\log\begin{cases}\operatorname{tg}\omega'' = 8.547021n, & \operatorname{tg}\alpha'' = 8.886210, & \operatorname{tg}\chi'' = 8.543294n \\ \cos\omega'' = 9.999730n, & \cos\alpha'' = 9.998718, & \cos\chi'' = 9.999735n\end{cases}$$

$$\lambda'' = -10° 17' 10''.1, \quad \mu'' = -6° 20' 10''.0, \quad \beta'' = 86° 32' 4''.8$$

4te Brechung.

$$q'' = -4° 23' 51''.3, \quad r'' = 178° 0' 17''.7, \quad \beta''' - \beta'' + r'' = 161° 4' 15''.1$$

$$\log\begin{cases}\operatorname{tg}\omega''' = 9.535239n, & \operatorname{tg}\alpha''' = 7.916880, & \operatorname{tg}\chi''' = 9.458839n \\ \cos\omega''' = 9.975853n, & \cos\alpha''' = 9.999985, & \cos\chi''' = 8.982740n\end{cases}$$

$$\lambda''' = -2° 9' 20''.7, \quad \mu''' = -3° 29' 21''.6, \quad \beta''' = 69° 36' 2''.2$$

Schlussrechnung.

$H = -0^0\ 29'\ 32''.4$, $\psi''' = 90^0\ 2'\ 32''.8$, $\beta'' = 81^0\ 27'\ 55''.8$

$\log\{\eta = 9.982741n$, $\sin\theta''' = 8.473806n$, $\sin\alpha'' = 8.495405$

$\log k''' = 1.542922$, $a''' = 9.481$

und hiemit

$$y = -\ 0^L0259 + (9^L481 - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha''\cos\beta''$$
$$z = +\ 34.9078 + (9.481 - x)\ \mathrm{tg}\,\alpha''\sin\beta''$$

mit den Werthen

$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''\cos\beta'' = 7.667065$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''\sin\beta'' = 8.490781$$

Substituirt man in die vorstehenden Gleichungen des ausfahrenden Lichtstrahls, wie oben, die Abscisse

$$x = 1137^L049$$

so ergeben sie

$$y = -\ 5^L2524\ ,\quad z = +\ 0^L0801$$

Für die violetten Lichtstrahlen

erhält man

1ste Brechung.

χ und λ wie oben, $\mu = 1^0\ 33'\ 49''.9$

2te Brechung.

q und r wie oben, $\beta' - \beta + r = 161^0\ 58'\ 51''.3$

$$\log\begin{cases}\mathrm{tg}\,\omega' = 9.512317n, & \mathrm{tg}\,\alpha' = 8.174747, & \mathrm{tg}\,\chi' = 9.256697\\ \cos\omega' = 9.978154n, & \cos\alpha' = 9.999952, & \cos\chi' = 9.993031\end{cases}$$

$\lambda' = -\ 6^0\ 51'\ 6''.5$, $\mu' = -\ 10^0\ 35'\ 1''.4$, $\beta' = 78^0\ 20'\ 6''.8$

3te Brechung.

$q' = -\ 0^0\ 50'\ 35''.1$, $r' = 169^0\ 45'\ 51''.6$, $\beta'' - \beta' + r' = 178^0\ 5'\ 53''.0$

$$\log\begin{cases}\mathrm{tg}\,\omega'' = 8.522621n, & \mathrm{tg}\,\alpha'' = 8.903434, & \mathrm{tg}\,\chi'' = 8.518809n\\ \cos\omega'' = 9.999759n, & \cos\alpha'' = 9.998612, & \cos\chi'' = 9.999763n\end{cases}$$

$\lambda'' = -\ 10^0\ 27'\ 48''.1$, $\mu'' = -\ 6^0\ 16'\ 47''.7$, $\beta'' = 86^0\ 40'\ 8''.2$

4te Brechung.

$q'' = -4^0\ 34'\ 30''.2,\ r'' = 178^0\ 6'\ 52''.8,\ \beta''' - \beta'' + r'' = 158^0\ 55'\ 29''.2$

$$\log\begin{cases} \operatorname{tg}\omega''' = 9.585891n, & \operatorname{tg}\alpha''' = 7.864808, & \operatorname{tg}\chi''' = 9.516034n \\ \cos\omega''' = 9.969931n, & \cos\alpha''' = 9.999988, & \cos\chi''' = 9.977796n \end{cases}$$

$\lambda''' = -2^0\ 5'\ 59''.8,\ \mu''' = -3^0\ 29'\ 16''.1,\ \beta''' = 67^0\ 28'\ 44''.6$

Schlussrechnung.

$H = -0^0\ 26'\ 30''.1,\ \psi'' = 90^0\ 2'\ 28''.4,\ \beta'' = 81^0\ 27'\ 25''.9$

$\log \{\eta = 9.977797n,\ \sin\theta''' = 8.473844n,\ \sin\alpha'' = 8.494996$

$\log k''' = 1.542960\ ,\quad \alpha''' = 9.481$

und hiemit

$$y = -\ 0^L0251 + (9^L481 - x)\operatorname{tg}\alpha''\cos\beta''$$
$$z = +\ 34.9108 + (9.481 - x)\operatorname{tg}\alpha''\sin\beta''$$

mit den Werthen

$$\log\operatorname{tg}\alpha''\cos\beta'' = 7.667033$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''\sin\beta'' = 8.490364$$

Substituirt man in diese Gleichungen, wie oben für die violetten Lichtstrahlen

$$x = 1138^L293$$

so erhält man

$$y = -5^L2690,\ z = -0^L0021$$

Die Untersuchung des Ganges des diametral gegenüber einfallenden Lichtstrahls, oder desjenigen, für welchen $\psi = -90^0$ wird, ist überflüssig, da für diesen y und z dieselben absoluten Werthe bekommen, und y mit demselben, z aber mit entgegengesetztem Zeichen erhalten werden müssen.

77.

Stellen wir die im Vorhergehenden für dieses Objectiv erhaltenen Vereinigungsweiten zusammen, so ergiebt sich

für die rothen Lichtstrahlen, für die violetten Lichtstrahlen

Centralstrahlen, die mit der Abscissenachse parallel einfallen:

$\xi'' = 1137.328,\ \eta'' = 0;\quad \xi'' = 1138.076,\ \eta'' = 0$

Centralstrahlen, die mit der Abscissenachse einen Winkel von 16′ machen.

Die ξ'' wie vorher.

$$\eta'' = -5.2644\,; \quad \eta'' = -5.2676$$

Randstrahlen, die mit der Abscissenachse parallel einfallen:

$$\xi'' = 1137.049,\ \eta'' = 0\,; \quad \xi'' = 1138.293,\ \eta'' = 0$$

Randstrahlen, die unter einem Winkel von 16′ einfallen

a) bei dem kleinsten Einfallswinkel:

$$x = 1137.049,\ y = -5.2701\,; \quad x = 1138.293,\ y = -5.2752$$

oder oder

$$x = 1136.839,\ y = -5.2644\,; \quad x = 1138.019,\ y = -5.2676$$

b) bei dem grössten Einfallswinkel:

$$x = 1137.049,\ y = -5.2708\,; \quad x = 1138.293,\ y = -5.2755$$

oder oder

$$x = 1137.293,\ y = -5.2644\,; \quad x = 1138.593,\ y = -5.2676$$

c) bei einem mittleren Einfallswinkel:

$$x = 1137.049 \qquad x = 1138.293$$
$$y = -5.2524 \qquad y = -5.2690$$
$$z = \mp 0.0801 \qquad z = \pm 0.0021$$

Bessel hat seine in Schum. Astr. Nachr. befindliche Untersuchung dieses Objectivs weniger vollständig ausgeführt.

78.

Ich werde noch den Gang eines Lichtstrahls durch verschiedene andere Linsensysteme beispielsweise untersuchen, kann aber hiebei nicht mit solcher Genauigkeit und Ausdehnung verfahren, wie im vorhergehenden Beispiel, da mir dazu die erforderlichen Daten fehlen. Namentlich fehlen mir die genauen Angaben der Brechungsverhältnisse der Glasarten, aus welchen die Linsen bestehen, auch sehe ich mich genöthigt, die vorkommenden, zur Herstellung des Achromatismus dienenden Doppellinsen, die ich entweder nicht aus ihren Fassungen herausnehmen kann, oder die an einander gekittet sind, als einfache Linsen zu betrachten, und demgemäss ihre Hauptpunkte zu ermitteln. Zur Abmessung der Brennweiten, Dicken und,

wo es nöthig war, der Krümmungen der Linsen habe ich mir Apparate anfertigen lassen, die für meinen Zweck hinreichende Genauigkeit gewähren.

Nehmen wir zuerst das astronomische Ocular vor, in welchem ein reelles Bild vorhanden ist.

Die Abmessungen eines Oculars dieser Gattung, welches von Fraunhofer verfertigt ist, und aus zwei einfachen Linsen besteht, gab für die erste Linse die Brennweite = 37.0, und die Dicke = 3.3; für die zweite Linse die Brennweite = 11.3, und die Dicke = 1.2 Die Entfernung der beiden inneren Flächen dieser beiden Linsen fand ich = 25.5. Die Einheit aller Maasse ist hier wie im Folgenden das Millimeter. Beide Linsen sind plan-convex und kehren ihre ebenen Oberflächen dem Auge zu.

Wir bekommen zuerst hieraus

$$d = 3.3 \qquad q = 0$$
$$d' = 25.5 \qquad q' = 3.3$$
$$d'' = 1.2 \qquad q'' = 28.8$$
$$q''' = 30.0$$

und nimmt man das Brechungsverhältniss des Glases, aus welchem die Linsen bestehen,

$$N = 1.53$$

an, so ergeben sich

$$\varrho = 37.0\,,\quad \varrho_{,} = \infty\,,\quad \delta = 2.157\,,\quad \varphi = 37.0$$
$$\varrho' = 11.3\,,\quad \varrho_{,}' = \infty\,,\quad \delta' = 0.784\,,\quad \varphi' = 11.3$$

so wie die Hauptpunkte der einzelnen Linsen

$$e = 0$$
$$e_{,} = 1.143 \qquad \varDelta = 27.657\,.$$
$$e' = 28.8$$
$$e_{,}' = 29.216$$

Betrachten wir hierauf beide Linsen als ein Ganzes, so erhalten wir

die Gesammtbrennweite $\Phi = 20.26$

die Hauptpunkte . . . . $\begin{cases} E = 49.59 \\ E_{,} = 14.07 \end{cases}$

die Brennpunkte . . . . $\begin{cases} F = 29.33 \\ F_{,} = 34.33 \end{cases}$

Von den Hauptpunkten liegt also der erste ausserhalb, und der zweite innerhalb des Linsensystems, und von den Brennpunkten ist der erste blos geometrisch, aber der zweite reel, und liegt 4.33 Millimeter von der zweiten Oberfläche der zweiten Linse entfernt. Die Verbindung dieses Oculars mit dem oben untersuchten Objectiv giebt, wenn das Mittel aus den dort erhaltenen Brennweiten der rothen und der violetten Strahlen, nemlich $1131^{L}445 = 2552^{mm}3$ angewandt wird, ein Fernrohr, dessen Vergrösserung

$$\frac{2552.3}{20.26} = 126.0$$

beträgt.

79.

Gehen wir zum astronomischen Ocular, in welchem kein reelles Bild vorhanden ist, dem Ramsdenschen Ocular, über, als dessen Repräsentanten ich zuerst das folgende, von Fraunhofer verfertigte aufstelle. Dieses Ocular besteht auch aus zwei einfachen, plan-convexen Linsen, von welchen die convexen Oberflächen einander zugekehrt sind. Für die erste Linse fand ich die Brennweite = 34.0 und die Dicke = 2.3; für die zweite die Brennweite = 22.2 und die Dicke = 1.6; die Entfernung der beiden inneren Oberflächen ergab sich = 13.1. Hier werden also

$$\begin{aligned} d &= 2.3 & q &= 0 \\ d' &= 13.1 & q' &= 2.3 \\ d'' &= 1.6 & q'' &= 15.4 \\ & & q''' &= 17.0 \end{aligned}$$

und wenn wieder $N = 1.53$ gesetzt wird,

$$\begin{aligned} \varrho &= \infty\ , & \varrho_{,} &= 34.0\ , & \delta &= 1.503\ , & \varphi &= 34.0 \\ \varrho' &= 22.2\ , & \varrho_{,}' &= \infty\ , & \delta' &= 1.046\ , & \varphi' &= 22.2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= 1.503 \\ e_{,} &= 2.3 \\ e' &= 15.4 \\ e_{,}' &= 15.954 \end{aligned} \qquad \varDelta = 13.100$$

Ins Gesammte betrachtet erhält man hieraus

$$\Phi = 17.52$$

$$E = 11.83$$
$$E_{,} = 9.20$$
$$F = - 5.69$$
$$F_{,} = 26.72\,.$$

Hier liegen also beide Hauptpunkte im Inneren des Linsensystems, und beide Brennpunkte sind reel. Der erste liegt $5^{mm}69$ vor der ersten Oberfläche der ersten Linse, und der zweite $9^{mm}72$ hinter der zweiten Oberfläche der zweiten Linse. Die Verbindung dieses Oculars mit dem obigen Objectiv giebt ein Fernrohr, dessen Vergrösserung

$$\frac{2552.3}{17.52} = 145.7$$

beträgt.

80.

Seit einer Reihe von Jahren macht man diese Oculare achromatisch, und wendet zu dem Ende statt der einfachen Linsen theils zwei, theils Eine aus Flint- und Kronglas bestehende Doppellinse an. Unter den verschiedenen Ocularen dieser Gattungen, die vor mir liegen, und von verschiedenen Optikern angefertigt sind, wähle ich die folgende zur Berechnung aus. Diese besteht aus zwei Doppellinsen, die ich hier aber als einfache betrachten muss, da ich sie nicht aus ihren Fassungen heraus nehmen lassen mag.

Die erste Linse ist an ihren äusseren Oberflächen plan-convex, und kehrt ihre ebene Oberfläche dem Gegenstande zu; ihre Brennweite ist $= 43.0$, und ihre Dicke $= 7.8$. Die zweite Linse ist convex-concav mit positiver Brennweite, sie kehrt ihre convexe Oberfläche dem Gegenstande zu, ihre Brennweite ist $= 40.2$, ihre Dicke $= 6.0$, und der Halbmesser ihrer concaven Oberfläche $= 32.0$ gefunden worden. Für das Brechungsverhältniss habe ich hier ein Mittel aus den Brechungsverhältnissen des Kron- und des Flintglases, nemlich $N = 1.58$ angenommen. Wir bekommen hieraus für die einzelnen Doppellinsen

$$q = 0$$
$$q' = 7.8$$
$$q'' = 27.0$$
$$q''' = 33.0$$

$$\varrho = \infty \quad , \varrho_{,} = \quad 43.0 \;, \delta = 4.937, \varphi = 43.0$$
$$\varrho' = 24.86, \varrho_{,}' = -55.17, \delta' = 3.798, \varphi' = 40.2$$

$$e = 4.937$$
$$e_{,} = 7.8$$
$$e' = 24.233 \qquad \Delta = 16.433$$
$$e_{,}' = 26.860$$

und für das Ocular im Ganzen

$$\Phi = 25.89$$
$$E = 15.52$$
$$E_{,} = 16.97$$
$$F = -10.37$$
$$F_{,} = 42.86$$

Die Hauptpunkte liegen also wieder im Inneren des Oculars, beide Brennpunkte sind reel, der erste liegt $10^{mm}37$ vor der ersten Oberfläche der ersten Doppellinse, und der zweite $9^{mm}86$ hinter der zweiten Oberfläche der zweiten Doppellinse.

81.

Es soll jetzt der Gang eines Lichtstrahls mittlerer Brechung durch ein dialytisches, Galiläisches Fernrohr, ein sogenanntes Theaterperspectiv, betrachtet werden. Das erste Objectiv besteht aus einer planconvexen Linse aus Kronglas, die ihre convexe Oberfläche dem Gegenstande zuwendet, das zweite Objectiv ist eine aus Kron- und Flintglas zusammengesetzte convex-concave Doppellinse, die ihre convexe Oberfläche dem Gegenstande zuwendet, das Ocular ist plan-concav, und wendet seine ebene Oberfläche dem Gegenstande zu.

Die Abmessung der ersten Linse gab ihre Brennweite = 132.4, und ihre Dicke = 5.5; das Brechungsverhältniss werde ich = 1.53 setzen. Die zweite Linse, die als eine einfache hier betrachtet werden muss, da die zwei Linsen, aus welchen sie besteht, sich nicht von einander trennen lassen, hat eine negative Brennweite; der Halbmesser ihrer concaven Oberfläche ist = 42.0 gefunden worden, und in ihrer normalen Stellung ist die Entfernung ihrer ersten Oberfläche von der zweiten der ersten Linse = 42.0, ihre Dicke beträgt 4.0. Führt man sie in ihrem Rohr soweit zurück, dass sie die erste Linse berührt, so ergiebt sich die Gesammtbrennweite beider Linsen

= 145.1. Diese Daten gnügen, um die Dimensionen der zweiten Linse berechnen zu können.

82.

Der Apparat, dessen ich mich zur Bestimmung der Brennweiten bedient habe, giebt diese durch die Formel

$$\varphi = \frac{c - \lambda}{4} - \frac{b^2}{4(c - \lambda)}$$

wo c die Entfernung des Gegenstandes von dem Bilde desselben bezeichnet, und $> 4\varphi$ sein muss, λ die Entfernung des zweiten Hauptpunkts der Linse vom ersten ist, und b die Verschiebung der Linse bedeutet, die erforderlich ist, um bei unverändertem c in zwei verschiedenen Lagen derselben ein deutliches Bild des Gegenstandes zu erhalten. Da, wenn wie (immer) d die Dicke der Linse bedeutet, näherungsweise

$$\lambda = \frac{N - 1}{N} d$$

ist, so bekommt man hiemit durch die obige Formel schon einen sehr genäherten Werth von φ, den man hierauf durch genauere Berechnung der Hauptpunkte verbessern, und überhaupt so genau wie möglich erhalten kann. Man braucht hiezu freilich die Kenntniss des Einen Halbmessers der Linse, allein dieser braucht nicht mit sonderlicher Genauigkeit bekannt zu sein.

Wenn d'' und N' die Dicke und das Brechungsverhältniss einer zweiten Linse sind, so ist nicht nur näherungsweise

$$\lambda' = \frac{N' - 1}{N'} d''$$

sondern wenn beide Linsen sich in sehr kleiner Entfernung von einander befinden, so ist für dieselben, als Ganzes betrachtet, die Entfernung des zweiten Hauptpunktes vom ersten näherungsweise

$$= \lambda + \lambda'$$

Für ein solches System von zwei Linsen giebt daher die obige Formel, wenn man $\lambda + \lambda'$ statt λ darin substituirt, die Gesammtbrennweite auf die oben beschriebene Art so genau wie überhaupt möglich.

Die obige Formel kann nicht auf Linsen mit negativer Brennweite, die keine reellen Bilder geben, angewandt werden; verbindet man aber eine solche Linse in möglichst kleiner Entfernung con-

centrisch mit einer zweiten, die eine wesentlich kleinere positive Brennweite hat, so kann man die Gesammtbrennweite dieser beiden Linsen bestimmen, und hieraus, wenn die Dimensionen der letzteren bekannt sind, die Brennweite der ersteren berechnen. Zu diesem Zwecke dienen die oben abgeleiteten Gleichungen

$$\Phi = \frac{\varphi\varphi'}{\varphi + \varphi' - e' + e_,}$$

$$e' = q'' + \frac{\delta'\varphi'}{\varrho_,'}$$

die nach der Elimination von e' zuerst

$$\Phi\left(\varphi + \varphi' - q'' - \frac{\delta'}{\varrho_,'}\varphi' + e_,\right) = \varphi\varphi'$$

und hierauf

$$\varphi' = \frac{\varphi - q'' + e_,}{\varphi - \left(1 - \frac{\delta'}{\varrho_,'}\right)\Phi}\,\Phi$$

geben. Wenn statt des zweiten Halbmessers $\varrho_,'$ der Linse mit negativer Brennweite der erste ϱ' gegeben wäre, so müsste man durch die Gleichung

$$\varphi' = \frac{\varrho'\varrho_,'}{\varrho' + \varrho_,' - \delta'}$$

$\varrho_,'$ aus den vorstehenden Gleichungen vor ihrer Auflösung eliminiren. Besonders einfach wird diese Elimination, wenn, wie bei dem oben vorkommenden Ocular, die erste Oberfläche eine Ebene ist. Denn da in diesem Falle $\varphi' = \varrho'$ wird, so ergiebt sich sogleich

$$\varphi' = \frac{\varphi - q'' - \delta' + e_,}{\varphi - \Phi}\,\Phi$$

83.

Aus den in dem vorvor. Art. angegebenen Abmessungen ergab sich nun für die erste Linse ohne Weiteres

$$\varrho = 132.4,\quad \varrho_, = \infty,\quad \delta = 3.595,\quad \varphi = 132.4,\quad N = 1.53$$

und aus den Angaben für die erste und zweite Linse, indem für letztere das Brechungsverhältniss zu 1.57 angenommen wurde, erhielt ich

$$\varrho' = 81.92,\ \varrho_,' = -73.67,\ \delta' = 2.548,\ \varphi = -1060.0,\ N' = 1.57$$

In Betreff der dritten Linse, des Oculars, habe ich ein ähnliches Verfahren angewandt. Ich befestigte in Berührung mit der ebenen

Oberfläche dieser Linse eine zweite convexe von angemessener, bekannter Brennweite, und bestimmte, wie oben erklärt wurde, die Gesammtbrennweite dieser beiden Linsen. Da nun die Dicke der Ocularlinse 2.5 beträgt, und angenommen werden musste, dass sie aus Kronglas besteht, so erhielt ich für dieselbe

$$\varrho'' = \infty, \quad \varrho_{,}'' = -26.38, \quad \delta'' = 1.634, \quad \varphi'' = -26.38, \quad N'' = 1.53$$

Es werden nun zunächst

$$\begin{array}{ll} d = 5.5 & q = 0 \\ d' = 34.5 & q' = 5.5 \\ d'' = 4.0 & q'' = 40.0 \\ d''' = 65.922 & q''' = 44.0 \\ d^{IV} = 2.5 & q^{IV} = 109.922 \\ & q^{V} = 112.422 \end{array}$$

von welchen d''' durch Rechnung so bestimmt wurde, dass parallel einfallenden Lichtstrahlen parallel ausfahrende entsprechen.

Wir bekommen nun zunächst die Abscissen der Hauptpunkte der einzelnen Linsen

$$\begin{array}{ll} e = 0 & \\ e_{,} = 1.905 & \Delta = 74.75 \\ e' = 76.66 & \\ e_{,}' = 76.97 & \Delta' = 34.586 \\ e'' = 111.556 & \\ e_{,}'' = 112.422 & \end{array}$$

denen wir noch

$$f_{,} = 134.305$$
$$f'' = 137.936$$

hinzufügen.

84.

Die Berechnung der Vereinigungsweiten nach den Ausdrücken des Art. 65 giebt

$$\alpha = b = 132.4$$

$$a' = \beta' = -57.650, \qquad \alpha' - b' = 60.966$$

$$a'' = \beta'' = -26.38$$

$$\alpha_{,}' = -1060.0, \qquad \beta_{,}' = -1060.0$$

$$a_{,}'' = 1094.586, \qquad \alpha_{,}'' = -25.758, \quad b_{,} = 1134.75, \quad \beta_{,} = 149.89$$

$$\alpha_{,,}'' = -26.38, \qquad \beta_{,,} = 132.4$$

woraus man mit Anwendung der in den Artt. 57 und 66 eingeführten Bezeichnungen, durch die Ausdrücke des letzteren Art. zuerst

$$\Phi_{,}^{0} = 140.02$$

$$F_{,}^{0} = -149.89 \qquad F_{0}' = 137.936$$

$$E_{,}^{0} = -\quad 9.87 \qquad E_{0}' = -2.084$$

$$\Phi_{,,}' = -24.945$$

$$F_{,,}' = 134.31 \qquad F_{,}'' = 86.664$$

$$E_{,,}' = 109.365 \qquad E_{,}'' = 111.609$$

erhält. Man sieht durch die Vergleichung mit den Angaben des vor. Art., dass die Gleichungen

$$F_{,,}' = f_{,}, \quad f'' = F_{0}'$$

die im Art. 67 erhalten wurden, erfüllt sind.

Für die Vergrösserung dieses Fernrohrs bekommen wir nun zufolge der Artt. 56 und 57

$$\frac{\Phi\, \alpha'}{\varphi''\alpha'} = 5.308$$

$$-\frac{\Phi_{,}^{0}}{\varphi''} = 5.308$$

$$-\frac{\varphi}{\Phi_{,,}'} = 5.308$$

mit einander übereinstimmend.

85.

Rechnen wir die C und D Coefficienten nach den Ausdrücken der Artt. 64 und 67, so ergeben sich

$$\log C \;= 7.87811 \qquad \log C' \;= 9.63891$$

$$\log C'' = 7.85382 \qquad \log C''' = 9.27509$$

$$\log D'' = 0.02959 \qquad \log D' \;= 1.87361n$$

$$\log D^{\prime v} = 0.72491 \qquad \log D''' = 2.04835n$$

Man kann nun zunächst den Ort des Auges und dessen Gegenpunkt unmittelbar durch die Ausdrücke (58) berechnen, zu welchem Zweck in diesem Beispiel $q = e = 0$ und $q^{v} - e_{,}'' = 0$ sind; man findet

$$J_{,} = 91.363$$

$$J = 593.29$$

Der Ort des Auges liegt also im Innern des Fernrohrs, und ist daher nur geometrisch vorhanden, wie von den Galiläischen Fernröhren

überhaupt bekannt ist. Der Gegenpunkt liegt zwar ausserhalb des Fernrohrs, aber an dem unrichtigen Ende desselben, und ist daher auch nur geometrisch vorhanden. Die vom Ocular ausgehenden, nach dem Objectiv sich bewegenden Lichtstrahlen haben ihren Vereinigungspunkt nicht an der entgegengesetzten Seite des Objectivs, sondern fahren divergirend aus, so dass ihr Vereinigungspunkt, wenn man sie rückwärts verlängert, auf der entgegengesetzten Seite des Oculars zu liegen kommt. Man findet leicht, dass dieses in jedem Galiläischen Fernrohr stattfinden muss.

86.

Zur Berechnung der Ausdrücke für die halben Oeffnungen nach den Gleichungen (59) bemerke ich, dass in diesen ε in Theilen des Kreishalbmessers verstanden werden muss, und daher immer eine kleine Zahl ist. Da dadurch der Ueberblick erschwert wird, so ziehe ich vor, die Coefficienten von ε mit 57°,296 zu dividiren, wodurch die Einheit von ε Ein Grad wird. Somit bekam ich durch Hülfe der vorstehenden numerischen Werthe

$$k = l, \quad k' = -0.063\,\varepsilon + 0.973\,l$$
$$k'' = -0.665\,\varepsilon + 0.712\,l, \quad k''' = -0.689\,\varepsilon + 0.671\,l$$
$$k^{IV} = -1.920\,\varepsilon + 0.200\,l, \quad k^{V} = -1.951\,\varepsilon + 0.189\,l$$

Man kann bemerken, dass k und k', k'' und k''', k^{IV} und k^{V} sehr wenig von einander verschieden sind, welches immer der Fall sein wird, wenn die Linsen nicht allzu dick sind. Es zeigt sich ferner, dass die Werthe des Coefficienten der Ausdrücke für k'' und k''' wesentlich von den Werthen von C' und D' verschieden sind, während die Coefficienten der übrigen k den Werthen der betreffenden C und D Coefficienten sehr nahe gleich sind. Ersteres rührt davon her, dass die zweite Linse eine Meniske ist, deren Krümmungshalbmesser weit kleiner als die Brennweite sind.

87.

Ich werde jetzt ein terrestrisches Handfernrohr auf ähnliche Weise, jedoch etwas ausführlicher, untersuchen, da das terrestrische Ocular, so wie es seit langer Zeit eingerichtet wird, einige Merkwürdigkeiten darbietet, die nicht allgemein bekannt zu sein scheinen.

Das achromatische Objectiv dieses Fernrohrs kann ich zwar wieder nicht in seine einzelnen Linsen zerlegen, sondern muss es als einfache Linse betrachten, aber dieser Umstand ist auch hier ohne Belang.

Beide äusseren Oberflächen des Objectivs sind convex, und die zweite hat einen Halbmesser von ohngefähr Einem Meter. Ich kann in der Bestimmung dieses Halbmessers mehr gefehlt haben, als in den übrigen Abmessungen, aber auch dieses ist dem Zwecke, welchen ich hier verfolge, nicht hinderlich. Die Dicke dieses Objectivs fand ich $= 9.7$, und dessen Brennweite $= 540.0$; die Entfernung der zweiten Oberfläche desselben von der ersten Oberfläche der ersten Ocularlinse wurde, nachdem die übrigen Abmessungen ausgeführt worden waren, durch die Bedingung, dass parallelen einfallenden Lichtstrahlen parallele ausfahrende entsprechen müssen, $= 547.05$ gefunden. Die Gleichung

$$\rho = \frac{\rho_{,} - \delta}{\rho_{,} - \varphi}\varphi$$

gab den ersten Halbmesser des Objectivs. Die vier Ocularlinsen sind alle plan-convex, weshalb durch die Messungen der Brennweiten derselben die zweiten Halbmesser derselben unmittelbar gegeben wurden. Die so erhaltenen Daten aller fünf Linsen befinden sich in der folgenden Zusammenstellung

$\rho = 783.5$,	$\rho_{,} = 1724.1$,	$\delta = 6.139$,	$\varphi = 540.0$,	$N = 1.58$
$\rho' = \infty$,	$\rho_{,}' = 39.8$,	$\delta' = 1.830$,	$\varphi' = 39.8$,	$N' = 1.53$
$\rho'' = \infty$,	$\rho_{,}'' = 44.8$,	$\delta'' = 1.373$,	$\varphi'' = 44.8$,	$N'' = 1.53$
$\rho''' = 49.7$,	$\rho_{,}''' = \infty$,	$\delta''' = 2.745$,	$\varphi''' = 49.7$,	$N''' = 1.53$
$\rho^{IV} = 34.5$,	$\rho_{,}^{IV} = \infty$,	$\delta^{IV} = 1.634$,	$\varphi^{IV} = 34.5$,	$N^{IV} = 1.53$

$d = 9.7$	$q = 0$
$d' = 547.05$	$q' = 9.7$
$d'' = 2.8$	$q'' = 556.75$
$d''' = 44.1$	$q''' = 559.55$
$d^{IV} = 2.1$	$q^{IV} = 603.65$
$d^{V} = 109.0$	$q^{V} = 605.75$
$d^{V'} = 4.2$	$q^{V'} = 714.75$
$d^{V''} = 52.3$	$q^{V''} = 718.95$
$d^{V'''} = 2.5$	$q^{V'''} = 771.25$
	$q^{IX} = 773.75$

Die Hauptpunkte der einzelnen Linsen nebst den betreffenden Unterschieden folgen hieraus

$$
\begin{array}{lll}
e = 1.923 & & \\
e_{,} = 5.468 & \Delta = 553.112 & \\
e' = 558.580 & & \\
e'_{,} = 559.550 & \Delta' = 45.473 & \\
e'' = 605.023 & & \\
e''_{,} = 605.750 & \Delta'' = 109.000 & \\
e''' = 714.750 & & \\
e'''_{,} = 716.205 & \Delta''' = 55.045 & \\
e^{IV} = 771.250 & & \\
e^{IV}_{,} = 772.116 & &
\end{array}
$$

denen ich noch den zweiten Brennpunkt der ersten, und den ersten Brennpunkt der letzten Linse, nemlich

$$f_{,} = 545.468$$
$$f^{IV} = 736.750$$

hinzufüge.

88.

Die nach den Ausdrücken des Art. 65 berechneten Vereinigungsweiten sind hier

$a' = \beta' = 13.112$ $a'' = \beta'' = 65.027$ $a''' = \beta''' = -35.028$ $a^{IV} = \beta^{IV} = 34.5$	$\alpha = b = 540.0$ $\alpha' = b' = -19.554$ $\alpha'' = b'' = 144.028$ $\alpha''' = b''' = 20.547$
$\alpha'_{,} = 39.8$ $a''_{,} = 5.673, \; \alpha''_{,} = -6.495$ $a'''_{,} = 115.405, \; \alpha'''_{,} = 87.240$ $a^{IV}_{,} = -32.195, \; \alpha^{IV}_{,} = 16.654$	$\beta'''_{,} = 49.7$ $b''_{,} = 59.390, \; \beta''_{,} = 183.213$ $b'_{,} = -137.740, \; \beta'_{,} = 30.877$ $b_{,} = 522.235, \; \beta' = -15873.7$
$\alpha''_{,,} = 44.8$ $a'''_{,,} = 64.20, \; \alpha'''_{,,} = 220.055$ $a^{IV}_{,,} = -165.010, \; \alpha^{IV}_{,,} = 28.535$	$\beta''_{,,} = 44.8$ $b'_{,,} = 0.673, \; \beta'_{,} = -0.685$ $b_{,,} = 553.797, \; \beta_{,,} = 21675.0$
$\alpha'''_{,,,} = 49.7$ $a^{IV}_{,,,} = 5.345, \; \alpha^{IV}_{,,,} = -6.325$	$\beta'_{,,,} = 39.8$ $b_{,,,} = 513.312, \; \beta_{,,,} = -10386.0$

woraus zunächst die folgenden Brennweiten, Brenn- und Hauptpunkte folgen,

$$\Phi^0_{\prime} = 805.30$$

$F^0_{\prime} = 10387.9$ geom. $F'_0 = 540.00$ geom.
$E^0_{\prime} = 11193.2$ ausserh. $E'_0 = -265.30$ ausserh.

$$\Phi^0_{\prime\prime} = -1783.67$$

$F^0_{\prime\prime} = -21673.1$ reel $F''_0 = 749.778$ reel
$E^0_{\prime\prime} = -23456.8$ ausserh. $E''_0 = 2533.5$ ausserh.

$$\Phi^0_{\prime\prime\prime} = -1046.26$$

$F^0_{\prime\prime\prime} = 15875.6$ geom. $F'''_0 = 736.752$ reel
$E^0_{\prime\prime\prime} = 14829.3$ ausserh. $E'''_0 = 1783.01$ ausserh.

$$\Phi'_{\prime\prime} = 45.570$$

$F'_{\prime\prime} = 559.265$ geom. $F''_{\prime} = 599.255$ geom.
$E'_{\prime\prime} = 604.835$ innerh. $E''_{\prime} = 553.685$ ausserh.

$$\Phi'_{\prime\prime\prime} = -34.422$$

$F'_{\prime\prime\prime} = 527.703$ reel $F'''_{\prime} = 803.445$ reel
$E'_{\prime\prime\prime} = 493.281$ ausserh. $E'''_{\prime} = 837.867$ ausserh.

$$\Phi'_{iv} = -17.806$$

$F'_{iv} = 545.468$ reel $F^{iv}_{\prime} = 788.770$ reel
$E'_{iv} = 527.662$ ausserh. $E^{iv}_{\prime} = 806.576$ ausserh.

$$\Phi''_{\prime\prime\prime} = -153.557$$

$F''_{\prime\prime\prime} = 421.810$ reel $F'''_{\prime\prime} = 936.26$ reel
$E''_{\prime\prime\prime} = 268.25$ ausserh. $E'''_{\prime\prime} = 1089.84$ ausserh.

$$\Phi''_{iv} = -26.554$$

$F''_{iv} = 540.00$ reel $F^{iv}_{\prime\prime} = 800.651$ reel
$E''_{iv} = 513.45$ ausserh. $E^{iv}_{\prime\prime} = 827.21$ ausserh.

$$\Phi'''_{iv} = 58.813$$

$F'''_{iv} = 749.778$ geom. $F^{iv}_{\prime\prime\prime} = 765.791$ geom.
$E'''_{iv} = 808.59$ ausserh. $E^{iv}_{\prime\prime\prime} = 706.98$ ausserh.

Vor Allem kann man bemerken, dass die Gleichungen

$$F'_{iv} = f_{\prime}, \quad F'''_{\prime\prime} = F'_0, \quad F'''_{iv} = F''_0, \quad f'' = F'''_0$$

des Art. 67 auch hier erfüllt sind. Es ist ausserdem zu bemerken, dass eine Anzahl der erhaltenen Gesammtbrennweiten negativ aus-

gefallen sind, obgleich das Fernrohr aus lauter Linsen von positiven Brennweiten besteht. Unter den Linsensystemen, welche negative Brennweiten besitzen, haben die meisten zwei reelle Brennpunkte, nur Eins hat blos Einen reellen Brennpunkt. Die drei Systeme, welche positive Brennweiten besitzen, haben demohngeachtet keinen reellen Brennpunkt, sondern nur geometrisch vorhandene. Alle Hauptpunkte, mit Ausnahme eines Einzigsten liegen ausserhalb des betreffenden Linsensystems. Betrachtet man das ganze aus vier Linsen bestehende Ocular, nemlich das System, welchem $\Phi'_{,\!\mathit{IV}}$ angehört, so sieht man, dass dieses eine negative Brennweite besitzt, aber demohngeachtet dessen beide Brennpunkte reel sind; man kann sich dieses letzteren Resultats an jedem terrestrischen Ocular leicht vergegenwärtigen.

Die Vergrösserung dieses Fernrohrs ergiebt sich wie folgt:

$$\frac{\varphi\alpha'\alpha''\alpha'''}{\varphi_{,}^{\mathit{IV}}a'a''a'''} = 30.326$$

$$-\frac{\Phi^0_{,,,}}{\varphi^{,\mathit{IV}}} = 30.326$$

$$-\frac{\Phi^0_{,,}}{\Phi'''_{,\mathit{IV}}} = 30.328$$

$$-\frac{\Phi^0_{,}}{\Phi''_{,\mathit{IV}}} = 30.327$$

$$-\frac{\varphi}{\Phi'_{,\mathit{IV}}} = 30.327$$

die in bester Uebereinstimmung sind.

89.

Durch die Ausdrücke der Artt. 64 u. 67 ergeben sich

$\log C = 7.26761$	$\log C' = 8.38528\,n$
$- C'' = 7.09404$	$- C''' = 8.90713\,n$
$- C^{\mathit{IV}} = 6.74869\,n$	$- C^{\mathit{V}} = 8.29311\,n$
$- C^{\mathit{VI}} = 6.98036\,n$	$- C^{\mathit{VII}} = 8.51818$
$\log D'' = 1.11049\,n$	$\log D' = 2.74281\,n$
$- D^{\mathit{IV}} = 1.08465\,n$	$- D''' = 1.52296$
$- D^{\mathit{VI}} = 1.18104$	$- D^{\mathit{V}} = 3.13290$
$- D^{\mathit{VIII}} = 1.48182$	$- D^{\mathit{VII}} = 2.71836$

woraus wir zunächst die Werthe der k', k'', etc. ermitteln könnten. Da aber hier keine Menisken vorhanden sind, so gnügt es, die

l', l'', etc. statt jener anzusetzen. Fügt man die Winkel ε', ε'', etc. hinzu, so geben die Gleichungen (48)

$$\begin{aligned}
\varepsilon' &= \qquad\quad \varepsilon + 0.106\, l, & l' &= - 9.65\,\varepsilon - 0.024\, l \\
\varepsilon'' &= -12.90\,\varepsilon + 0.071\, l, & l'' &= + 0.58\,\varepsilon - 0.081\, l \\
\varepsilon''' &= -12.15\,\varepsilon - 0.032\, l, & l''' &= +23.70\,\varepsilon - 0.020\, l \\
\varepsilon^{IV} &= +15.17\,\varepsilon - 0.055\, l, & l^{IV} &= + 9.13\,\varepsilon + 0.033\, l \\
\varepsilon^{V} &= +30.33\,\varepsilon
\end{aligned}$$

in welchen allenthalben die Einheit der Winkel ε, ε', ε'', etc. Ein Grad ist.

90.

Man kann jetzt den Ort des Auges und dessen Gegenpunkt durch die Ausdrücke (58) berechnen. Es findet sich

$$J_{,} = 789.36$$
$$J = -14352$$

Diese beiden Punkte sind hier reel, der Ort des Auges liegt $15^{mm}61$ hinter der zweiten Oberfläche der vierten Ocularlinse, und der Gegenpunkt nahe $14\frac{1}{3}$ Meter vor der Objectivlinse.

Das Bild des Objectivs, welches im Orte des Auges eines Fernrohrs entsteht, ist nicht das Einzige dieser Gattung. Betrachtet man blos den Durchgang des Lichtstrahls durch das Objectiv und die erste Ocularlinse, so muss schon ein Bild des Objectivs entstehen; betrachtet man das Objectiv nebst den beiden ersten Ocularlinsen, so muss ein anderes Bild des Objectivs entstehen u. s. w., nur sind diese Bilder nicht immer reel vorhanden. Da nach Wegnahme einer oder mehrerer Ocularlinsen parallel einfallenden Lichtstrahlen keine parallel ausfahrenden entsprechen, so kann man die Oerter dieser Bilder nicht durch die Gleichungen (58) berechnen, sondern muss sich dazu der (51) oder der (53) oder der (54) bedienen, die, wenn man auch die Gegenbilder berechnen wollte, in Bezug auf ξ und η aufgelöst werden müssten.

Im terrestrischen Fernrohr ist das durch das Objectiv und die erste Ocularlinse bewirkte Bild des ersteren das Einzige, welches reel vorhanden ist. Die Coordinaten desselben erhält man, nachdem in den eben genannten Ausdrücken $\mu = 2$, $\xi = q$ und $\eta =$ der

halben Oeffnung des Objectivs gesetzt worden sind. Es werden folglich, wenn man sich der (54) bedient, die am Einfachsten sind,

$$\xi'' = F'_0 - \frac{(\Phi^0_{,})^2}{q - F^0_{,}}$$

$$\eta'' = \frac{\Phi^0_{,}}{q - F^0_{,}}\eta$$

wo für η der eben genannte Werth zu setzen ist.

In dem in Betrachtung stehenden terrestrischen Fernrohr beträgt die halbe Oeffnung des Objectivs $21^{mm}2$, und man bekommt daher für die Coordinaten des gesuchten Bildes

$$\xi'' = \quad 602.45$$

$$\eta'' = -1.64$$

wo das negative Zeichen vor dem Werthe von η'' blos anzeigt, dass das Bild ein umgekehrtes ist. Die Vergleichung des Werthes von ξ'' mit den im Art. 87 angegebenen Werthen der verschiedenen q zeigt, dass dieses Bild zwischen der ersten und der zweiten Ocularlinse liegt, und daher in der That vorhanden ist. Die Entfernung desselben von der ersten Oberfläche der zweiten Ocularlinse beträgt $1^{mm}20$, und der Durchmesser desselben $3^{mm}28$. Dieses ist so zu verstehen, dass alle Lichtstrahlen, die durch das Objectiv ins Fernrohr dringen, mögen sie innerhalb oder ausserhalb des Gesichtsfeldes des Fernrohrs liegen, sich durch die Brechungen, die sie durch das Objectiv und die erste Ocularlinse erleiden, so verengen, dass sie in der Ebene, welche der Abscisse ξ'' angehört, durch die Fläche eines auf der Abscissenachse concentrisch stehenden Kreises gehen, dessen Durchmesser nur $3^{mm}28$ beträgt. Ausserhalb dieses Kreises befinden sich gar keine Lichtstrahlen in dieser Ebene, wenn nicht etwa welche durch Zurückwerfungen von der inneren Wand des Rohrs dahin gelangen sollten. Um die nachtheilige Wirkung solcher unregelmässigen Lichtstrahlen zu verhindern, bringt man in der genannten Ebene die bekannte Blendung an, die mit einer kleinen Oeffnung versehen ist, deren Durchmesser so eben für das in Rede stehende Fernrohr berechnet worden ist. In der Ebene, welcher ξ'' angehört, ist überhaupt der Durchmesser des Strahlenkegels, welcher das Fernrohr zu durchlaufen vermag, ein Minimum.

Man erkennt ferner leicht aus dem Vorhergehenden, dass die Oeffnung dieser Blendung durchaus ohne Einfluss auf die Grösse des

Gesichtsfeldes des Fernrohrs ist; wollte man sie kleiner machen, als das nach den obigen Sätzen berechnete Maass derselben, so würde das Gesichtsfeld dadurch nicht im Mindesten verkleinert, aber es würde die Helligkeit am Rande des Gesichtsfeldes vermindert werden.

Das eben berechnete Bild ist das Einzige dieser Gattung, welches im terrestrischen Fernrohr reel wird. Berechnet man die Abscisse des durch das Objectiv und die zwei ersten Ocularlinsen verursachten Bildes, so findet man diese $\xi''' = 603.01$. Dieses liegt also, jenem sehr nahe, auch zwischen der ersten und zweiten Ocularlinse, und ist daher nur geometrisch vorhanden, da es, um reel zu sein, zwischen der zweiten und dritten Ocularlinse liegen müsste. Die Berechnung des durch Zuziehung der dritten Ocularlinse entstehenden Bildes dieser Gattung giebt dessen Abscisse $\xi^{IV} = 805.73$. Dieses Bild liegt nun zwar hinter der dritten Ocularlinse, aber ausserhalb des Fernrohrs, und ist daher auch nicht im Fernrohr vorhanden. Die Zuziehung endlich der vierten Ocularlinse führt auf das schon berechnete, im Orte des Auges befindliche Bild des Objectivs.

91.

Untersuchen wir in dem in Betrachtung stehenden Fernrohr die an der Grenze des Gesichtsfeldes desselben einfallenden Lichtstrahlen in Bezug auf die Oeffnungen der verschiedenen Linsen. Die vorgenommenen Abmessungen ergeben

das Gesichtsfeld des Fernrohrs . . . . . . = 50′
die halbe Oeffnung des Objectivs . . . . . = 21mm2
„ „ „ der ersten Ocularlinse = 9.5
„ „ „ „ zweiten „ = 7.0
„ „ „ „ dritten „ = 10.5
„ „ „ „ vierten „ = 6.6

andererseits erhalten wir durch die im Art. 89 gefundenen numerischen Gleichungen für dieses Fernrohr,

wenn $\varepsilon = 0$ und $l = 21.2$ gesetzt werden,

$\varepsilon' = +2^{0}25 \qquad l' = -0.50$

$\varepsilon'' = +1.50 \qquad l'' = -1.72$

$\varepsilon''' = -0.68 \qquad l''' = -0.42$

$\varepsilon^{IV} = -1.17 \qquad l^{IV} = +0.70$

$\varepsilon^{V} = 0$

wenn $\varepsilon = \frac{5}{12}^{0}$ und $l = 0$ gesetzt werden

$\varepsilon' = +\ 0^{0}42 \qquad l' = -4.02$

$\varepsilon'' = -\ 5.38 \qquad l'' = +0.24$

$\varepsilon''' = -\ 5.06 \qquad l''' = +9.88$

$\varepsilon^{IV} = +\ 6.32 \qquad l^{IV} = +3.80$

$\varepsilon^{V} = +12.64$

und hieraus durch Additionen und Subtractionen,

für $\varepsilon = \frac{5}{12}^{0}$ und $l = 21.2$

$\varepsilon' = +\ 2^{0}67 \qquad l' = -\ 4.52$

$\varepsilon'' = -\ 3.88 \qquad l'' = -\ 1.48$

$\varepsilon''' = -\ 5.74 \qquad l''' = +\ 9.46$

$\varepsilon^{IV} = +\ 5.15 \qquad l^{IV} = +\ 4.50$

$\varepsilon^{V} = +12.64$

und für $\varepsilon = \frac{5}{12}^{0}$ und $l = -21.2$

$\varepsilon' = -\ 1^{0}83 \qquad l' = -\ 3.52$

$\varepsilon'' = -\ 6.88 \qquad l'' = +\ 1.96$

$\varepsilon''' = -\ 4.38 \qquad l''' = +10.30$

$\varepsilon^{IV} = +\ 7.49 \qquad l^{IV} = +\ 3.10$

$\varepsilon^{V} = +12.64$

Die beiden letzten Abtheilungen beziehen sich auf Lichtstrahlen, die von einem und demselben an der Grenze des Gesichtsfeldes liegenden Punkt des Gegenstandes ausgehend, das Objectiv in zwei, einander diametral gegenüber liegenden, Punkten des Randes desselben schneiden, und daher die überhaupt erforderlichen Oeffnungen der Ocularlinsen bestimmen. Man sieht hieraus, dass wenigstens

die halbe Oeffnung der ersten	Ocularlinse	4.52
„ „ „ „ zweiten	„	1.96
„ „ „ „ dritten	„	10.30
„ „ „ „ vierten	„	4.50

sehr nahe betragen müssen, um alle Lichtstrahlen, die ins Gesichtsfeld gelangen können, durchzulassen. Vergleicht man diese Oeffnungsmaasse mit den oben durch Abmessungen gefundenen, so zeigt sich, dass die erste, zweite und vierte Ocularlinse dieses Fernrohrs mehr wie hinreichend gross gemacht worden sind, dass dahingegen die dritte nur die eben erforderliche Oeffnung erhalten hat.

92.

Im Vorhergehenden sind im Betreff des terrestrischen Fernrohrs alle behandelten Lichtstrahlen als Centralstrahlen betrachtet worden, welches auch für die zu erlangenden Resultate ausreichend war, es kann aber auch von Interesse sein in Erfahrung zu bringen, wie sich strenge genommen die durch ein terrestrisches Ocular dieser Gattung gehenden Lichtstrahlen zu einander verhalten; es soll daher jetzt der Gang einiger derselben durch die strengen Gleichungen des § 1 untersucht werden. Hiebei sollen indess, um nicht zu weitläuftig zu werden, blos Lichtstrahlen betrachtet werden, die mit der Abscissenachse in Einer Ebene liegen, und das achromatische Objectiv, welches aus den oben angegebenen Gründen ohnehin nicht weiter analysirt werden kann, als ein vollkommenes betrachtet werden.

Da das vollkommene achromatische Objectiv die Eigenschaft besitzen muss, dass alle durch dasselbe durchgehende Lichtstrahlen so behandelt werden können, als wären sie Centralstrahlen, so ist die Gleichung jedes aus solchem Objectiv ausfahrenden Lichtstrahls überhaupt

$$y = (e_{,} - x)\,\varepsilon' + l$$

oder

$$y = (e' - x)\,\varepsilon' + l'$$

Für die Anwendung des Verfahrens des Art. 31 muss aber die Gleichung dieses Lichtstrahls auf die Form

$$y = (a'' - x)\,\alpha'' + k''$$

oder, da im gegenwärtigen Falle die erste Oberfläche der ersten Ocularlinse eine Ebene ist, auf die Form

$$y = (q'' - x)\,\alpha'' + k''$$

gebracht werden. Da nun $\varepsilon' = \alpha''$ ist, so geben die vorstehenden Gleichungen

$$k'' = l' - (q'' - e')\,\varepsilon'$$

aus welcher k'' zu berechnen ist.

Da ferner in dem zu berechnenden terrestrischen Ocular mehrere der brechenden Oberflächen Ebenen sind, so kommen auch die Gleichungen des Art. 32 in Betracht, und es erscheint aus diesem Grunde zweckmässig die erforderlichen Gleichungen für den gegenwärtigen speciellen Fall aus den Artt. 31 und 32 auszuschreiben und zusammen zu stellen. Diese sind, wenn das Brechungsverhältniss wie oben mit N bezeichnet wird

$$\sin\alpha''' = \frac{1}{N}\sin\alpha''$$

$$\sin(\alpha''' - \theta''') = \frac{p''' - q''}{p''' - q'''}\sin\alpha''' - \frac{k''}{p''' - q'''}\cos\alpha'''$$

$$\sin(\alpha^{IV} - \theta''') = N\sin(\alpha''' - \theta''')$$

$$\sin\alpha^{V} = \frac{1}{N}\sin\alpha^{IV}$$

$$\sin(\alpha^{V} - \theta^{V}) = \frac{p''' - q'''}{p^{V} - q^{V}}\cdot\frac{\cos\alpha^{V}}{\cos\alpha^{IV}}\sin(\alpha^{IV} - \theta''') + \frac{q^{IV} - p'''}{p^{V} - q^{V}}\cos\alpha^{V}\,\mathrm{tg}\,\alpha^{IV} + \frac{p^{V} - q^{IV}}{p^{V} - q^{V}}\sin\alpha^{V}$$

$$\sin(\alpha^{VI} - \theta^{V}) = N\sin(\alpha^{V} - \theta^{V})$$

$$\sin(\alpha^{VI} - \theta^{VI}) = A^{V}\sin(\alpha^{V} - \theta^{V}) + B^{V}\sin\alpha^{VI}$$

$$\sin(\alpha^{VII} - \theta^{VI}) = \frac{1}{N}\sin(\alpha^{VI} - \theta^{VI})$$

$$\sin\alpha^{VIII} = N\sin\alpha^{VII}$$

$$\sin(\alpha^{VIII} - \theta^{VIII}) = \frac{p^{VI} - q^{VI}}{p^{VIII} - q^{VIII}}\cdot\frac{\cos\alpha^{VIII}}{\cos\alpha^{VII}}\sin(\alpha^{VII} - \theta^{VI}) + \frac{q^{VII} - p^{VI}}{p^{VIII} - q^{VIII}}\cos\alpha^{VIII}\,\mathrm{tg}\,\alpha^{VII} + \frac{p^{VII} - q^{VII}}{p^{VIII} - q^{VIII}}\sin\alpha^{VIII}$$

$$\sin(\alpha^{IX} - \theta^{VIII}) = \frac{1}{N}\sin(\alpha^{VIII} - \theta^{VIII})$$

$$\sin\alpha^{X} = N\sin\alpha^{IX}$$

$$k^{IX} = -(p^{VIII} - q^{VIII})\frac{\sin(\alpha^{IX} - \theta^{VIII})}{\cos\alpha^{IX}} + (p^{VIII} - q^{IX})\,\mathrm{tg}\,\alpha^{IX}$$

worauf die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls

$$y = (q^{IX} - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha^{X} + k^{IX}$$

wird.

93.

Die Werthe der p für das zu berechnende Ocular findet man aus den Angaben des Art. 87 wie folgt, welchen ich die dort schon befindlichen Werthe der q beifüge.

$$
\begin{array}{ll}
p'' = \infty & q'' = 556.75 \\
p''' = 538.45 & q''' = 559.55 \\
p^{iv} = \infty & q^{iv} = 603.65 \\
p^{v} = 582.00 & q^{v} = 605.75 \\
p^{vi} = 741.09 & q^{vi} = 714.75 \\
p^{vii} = \infty & q^{vii} = 718.95 \\
p^{viii} = 789.53 & q^{viii} = 771.25 \\
p^{ix} = \infty & q^{ix} = 773.75
\end{array}
$$

Hieraus folgen die zur Berechnung des Weges des Lichtstrahls erforderlichen Constanten der Gleichungen des vor. Art.

$$\log \frac{p''' - q''}{p''' - q'''} = 9.9383$$

$$\log \frac{1}{p''' - q'''} = 8.6758\,n$$

$$\log \frac{p''' - q'''}{p^{v} - q^{v}} = 9.9486$$

$$\log \frac{q^{iv} - p'''}{p^{v} - q^{v}} = 0.4386\,n$$

$$\log \frac{p^{v} - q^{iv}}{p^{v} - q^{v}} = 9.9599$$

$$\log A^{v} = \log \frac{p^{v} - q^{v}}{p^{vi} - q^{vi}} = 9.9549\,n$$

$$\log B^{v} = \log \frac{p^{vi} - p^{v}}{p^{vi} - q^{vi}} = 0.7810$$

$$\log \frac{p^{vi} - q^{vi}}{p^{viii} - q^{viii}} = 0.1586$$

$$\log \frac{q^{vii} - p^{vi}}{p^{viii} - q^{viii}} = 0.0831\,n$$

$$\log \frac{p^{viii} - q^{vii}}{p^{viii} - q^{viii}} = 0.5866$$

$$\log (p^{viii} - q^{viii}) = 1.2621$$

$$\log (p^{viii} - q^{ix}) = 1.1981$$

94.

Berechnen wir zuerst den von der Grenze des Gesichtsfeldes auf das Objectiv einfallenden Randstrahl, für welchen $\varepsilon = \frac{5}{12}^0$ und $l = 21.2$ sind. Zufolge des Art. 91 entsprechen diesem die Werthe

$$\varepsilon' = +2^0 67, \quad l' = -4.52$$

womit der Art. 92

$$k'' = -4.435$$

giebt. Mit diesen Werthen von $\varepsilon' = \alpha''$ und k'' geben die Gleichungen und die Constanten der beiden vor. Artt. mit Anwendung des mittleren Brechungsverhältnisses

$$N = 1.53$$

nach und nach

$$\begin{array}{llll}
\alpha'' = & 2^0\ 40'.0 & & \\
\alpha''' = & 1\ \ 44.6 & \theta''' = & 12^0\ 20'.0 \\
\alpha^{IV} = & -3\ \ 58.4 & & \\
\alpha^{V} = & -2\ \ 35.8 & \theta^{V} = & 3\ \ 11.7 \\
\alpha^{VI} = & -5\ \ 41.2 & \theta^{VI} = & 21\ \ 38.8 \\
\alpha^{VII} = & 4\ \ 10.8 & & \\
\alpha^{VIII} = & 6\ \ 24.2 & \theta^{VIII} = & 11\ \ 28.1 \\
\alpha^{IX} = & 8\ \ \ 9.7 & & \\
\alpha^{X} = & 12\ \ 32.8 & &
\end{array}$$

$$k'^{X} = +3.328$$

Für den von demselben Punkt des Gegenstandes ausgehenden Lichtstrahl, welcher das Objectiv am entgegengesetzten Rande schneidet, für welchen also $\varepsilon = \frac{5}{12}^0$, $l = -21.2$ sind, giebt die Rechnung, mit Beibehaltung des obigen Brechungsverhältnisses, die folgenden Werthe. Zuerst werden

$$\varepsilon' = -1^0 83, \quad l' = -3.52$$

$$k'' = -3.578$$

und hiemit

$$\begin{array}{llll}
\alpha'' = & -1^0\ 50' & & \\
\alpha''' = & -1\ \ 11.9 & \theta''' = & 9^0\ 37'.4 \\
\alpha^{IV} = & -7\ \ \ 4.0 & & \\
\alpha^{V} = & -4\ \ 36.7 & \theta^{V} = & -5\ \ \ 9.9 \\
\alpha^{VI} = & -4\ \ 19.1 & \theta^{VI} = & 23\ \ 35.5 \\
\alpha^{VII} = & 5\ \ 40.8 & &
\end{array}$$

$$\alpha^{VIII} = 8\ 51.8 \qquad \theta^{VIII} = 6\ 48.3$$
$$\alpha^{IX} = 8\ 9.0$$
$$\alpha^{X} = 12\ 31.8$$
$$k^{IX} = +1.827$$

Dem von demselben Punkt ausgehenden Lichtstrahl, welcher die Mitte des Objectivs trifft, gehören $\varepsilon = \frac{5}{12}{}^0$, $l = 0$ an, woraus zuerst

$$\varepsilon' = 0''42, \quad l' = -4.02$$
$$k'' = -4.007$$

folgen, ferner

$$\alpha'' = 0^0\ 25'$$
$$\alpha''' = 0\ 16.3 \qquad \theta''' = 10^0\ 58.'9$$
$$\alpha^{IV} = -5\ 32.3$$
$$\alpha^{V} = -3\ 37.0 \qquad \theta^{V} = -1\ 1.8$$
$$\alpha^{VI} = -4\ 59.4 \qquad \theta^{VI} = 22\ 35.6$$
$$\alpha^{VII} = 4\ 58.6$$
$$\alpha^{VIII} = 7\ 37.6 \qquad \theta^{VIII} = 9\ 7.5$$
$$\alpha^{IX} = 8\ 8.7$$
$$\alpha^{X} = 12\ 31.2$$
$$k^{IX} = +2.574$$

Zur leichteren Uebersicht sollen die Einfalls- und Brechungswinkel dieser Lichtstrahlen hier zusammengestellt werden.

Einfallswinkel.	Brechungswinkel.
Erste Ocularlinse.	
Erste Oberfläche.	
$\alpha'' =$	$\alpha''' =$
$-1^0\ 50'$, $+0^0\ 25'$, $+2^0\ 40'$	$-1^0\ 12'$, $+0^0\ 16'$, $+1^0\ 45'$
Zweite Oberfläche.	
$\alpha''' - \theta''' =$	$\alpha^{IV} - \theta''' =$
$-10\ 49$, $-10\ 43$, $-10\ 35$	$-16\ 41$, $-16\ 31$, $-16\ 18$
Zweite Ocularlinse.	
Erste Oberfläche.	
$\alpha^{IV} =$	$\alpha^{V} =$
$-7\ 4$, $-5\ 32$, $-3\ 58$	$-4\ 37$, $-3\ 37$, $-2\ 36$

Zweite Oberfläche.

$\alpha^{v} - \theta^{v} =$	$\alpha^{vi} - \theta^{v} =$
$+ 0^0\ 33'$, $- 2^0\ 35'$, $- 5^0\ 48'$	$+ 0^0\ 51'$, $- 3^0\ 58'$, $- 8^0\ 53'$

Dritte Ocularlinse.

Erste Oberfläche.

$\alpha^{vi} - \theta^{vi} =$	$\alpha^{vii} - \theta^{vi} =$
$- 27\ 55$, $- 27\ 35$, $- 27\ 20$	$- 17\ 49$, $- 17\ 37$, $- 17\ 28$

Zweite Oberfläche.

$\alpha^{vii} =$	$\alpha^{viii} =$
$+ 5\ 47$, $+ 4\ 59$, $+ 4\ 11$	$+ 8\ 52$, $+ 7\ 38$, $+ 6\ 24$

Vierte Ocularlinse.

Erste Oberfläche.

$\alpha^{viii} - \theta^{viii} =$	$\alpha^{ix} - \theta^{viii} =$
$+ 2\ 4$, $- 1\ 30$, $- 5\ 4$	$+ 1\ 21$, $- 0\ 59$, $- 3\ 18$

Zweite Oberfläche.

$\alpha^{ix} =$	$\alpha^{x} =$
$+ 8\ 9$, $+ 8\ 9$, $+ 8\ 10$	$+ 12\ 32$, $+ 12\ 31$, $+ 12\ 33$

Da alle terrestrischen Oculare mit geringen Veränderungen dieselbe Einrichtung haben, so giebt die vorstehende Zusammenstellung zu erkennen, dass in denselben grosse Einfallswinkel, namentlich an der dritten Ocularlinse, vorkommen; bei dem hier untersuchten Ocular reichen sie bis an 28^0, bei welchem Bogen der Sinus schon mehr als Ein Grad kleiner ist. Demohngeachtet bieten die aus der letzten Linse ausfahrenden Lichtstrahlen in ihrer Neigung zur Abscissenachse so geringe Verschiedenheit dar, dass sie für parallel angesehen werden dürfen. Auch ist diese Neigung sehr nahe dieselbe, die durch die Berechnung, in welcher sie als Centralstrahlen behandelt wurden, gefunden wurde. Im Art. 91 wurde $\epsilon^{v} = \alpha^{x} = 12^0\ 38'.4$ gefunden, während wir hier im Mittel $\alpha^{x} = 12^0\ 31'.9$ erhalten haben. Die hier erhaltenen Werthe für k^{ix} weichen mehr von jenen ab, da sich hier

$k^{ix} =$	Diff.
1.827	
	0.747
2.574	
	0.754
3.328	

während im Art. 91, wenn man durch die Gleichung

$$k'^{x} = l^{v} + (e_{,}^{v} - q'^{x})\,\varepsilon^{v}$$

reducirt

$k'^{x} =$	Diff.
2.74	
	0.70
3.44	
	0.70
4.14	

erhalten wurde. Ihre Unterschiede zeigen aber, wie man sieht, weit grössere Uebereinstimmung.

Zum Zweck etwaiger weiteren Vergleichungen bemerke ich, dass für jede ganze und positive Zahl π, die Null eingeschlossen,

$$\alpha^{2\pi} = \varepsilon^{\pi}$$

$$\alpha^{2\pi+1} = \frac{e^{\pi} - q^{2\pi}}{q^{2\pi+1} - q^{2\pi}}\,\varepsilon^{\pi} - \frac{e_{,}^{\pi} - q^{2\pi+1}}{q^{2\pi+1} - q^{2\pi}}\,\varepsilon^{\pi+1}$$

sind, so wie dass

$$k^{\pi} = (p^{\pi} - q^{\pi}) \sin\theta^{\pi}$$

wenn nicht etwa $(p^{\pi} - q^{\pi})$ unendlich gross ist, in welchem Falle man

$$k^{\pi} = -(p^{\pi-1} - q^{\pi-1})\,\frac{\sin(\alpha^{\pi} - \theta^{\pi-1})}{\cos\alpha^{\pi}} + (p^{\pi-1} - q^{\pi})\,\mathrm{tg}\,\alpha^{\pi}$$

bekommt.

95.

Untersuchen wir auch den Gang von Lichtstrahlen anderer Brechung durch dasselbe Ocular. Setzen wir

$$N = 1.518$$

so wird dieses Brechungsverhältniss den rothen Lichtstrahlen angehören, wenn das vorher angewandte den mittleren angehört. Sei zuerst wie oben

$$\varepsilon = \tfrac{5}{12}^{0}, \quad l = 21.2$$

dann werden wieder

$$\varepsilon' = 2^{0}67, \quad l' = -4.52$$
$$k'' = -4.435$$

und hieraus folgen jetzt

$\alpha'' = 2^\circ 40'$

$\alpha''' = 1\ 45.4 \qquad \theta''' = 12^\circ 20'.1$

$\alpha^{iv} = -3\ 50.6$

$\alpha^{v} = -2\ 31.9 \qquad \theta^{v} = 3\ 25.9$

$\alpha^{vi} = -5\ 38.5 \qquad \theta^{vi} = 21\ 12.3$

$\alpha^{vii} = 3\ 53.5$

$\alpha^{viii} = 5\ 54.8 \qquad \theta^{viii} = 12\ 19.6$

$\alpha^{ix} = 8\ 6.4$

$\alpha^{x} = 12\ 21.6$

$$k^{ix} = 3.606$$

Seien ferner

$$\varepsilon = \tfrac{5}{12}{}^\circ, \quad l = -21.2$$
$$\varepsilon' = -1^\circ 83, \quad l' = -3.52$$
$$k'' = -3.578$$

dann werden

$\alpha'' = -1^\circ 50'$

$\alpha''' = -1\ 12.5 \qquad \theta''' = 9^\circ 37'.3$

$\alpha^{iv} = -6\ 56.9$

$\alpha^{v} = -4\ 34.3 \qquad \theta^{v} = -4\ 56.4$

$\alpha^{vi} = -4\ 22.9 \qquad \theta^{vi} = 23\ 40.0$

$\alpha^{vii} = 5\ 37.2$

$\alpha^{viii} = 8\ 32.9 \qquad \theta^{viii} = 7\ 50.7$

$\alpha^{ix} = 8\ 18.5$

$\alpha^{x} = 12\ 40.2$

$$k^{ix} = 2.156$$

Seien auch

$$\varepsilon = \tfrac{5}{12}{}^\circ, \quad l = 0$$
$$\varepsilon' = 0^\circ 42, \quad l' = -4.02$$
$$k'' = -4.007$$

dann erhalten wir

$\alpha'' = 0^\circ 25'$

$\alpha''' = 0\ 16.5 \qquad \theta''' = 10^\circ 59'.2$

$\alpha^{iv} = -5\ 23.9$

$\alpha^{v} = -3\ 33.2 \qquad \theta^{v} = -0\ 45.6$

$\alpha^{vi} = -5\ 0.2 \qquad \theta^{vi} = 22\ 23.1$

$\alpha^{vii} = 4\ 44.4$

$$\alpha^{VIII} = 7\ 12.4 \qquad \theta^{VIII} = 10\ \ 4.6$$
$$\alpha'^{X} = 8\ 11.2$$
$$\alpha^{X} = 12\ 28.9$$
$$k'^{X} = 2.879$$

Aus den eben erhaltenen Werthen von α^{X}, nemlich

$$12^0\ 40'.2,\ 12^0\ 28'.9,\ 12^0\ 21'.6$$

erkennt man, dass für die rothen Lichtstrahlen der Parallelismus der ausfahrenden Strahlen weniger vollständig ist, als der der mittleren, und es lässt sich erwarten, dass die violetten Lichtstrahlen ein ähnliches Verhalten zeigen werden. Besser stimmen die Werthe des Ausfallspunkts k'^{X}, für welchen erhalten wurde

	Diff.
2.156	
	0.723
2.879	
	0.727
3.606	

und die nahe $0^{mm}3$ grösser sind, als die den mittleren Lichtstrahlen zukommenden.

96.

Das eben untersuchte terrestrische Ocular ist ein sogenanntes pankratisches; es besitzt nemlich die Einrichtung, dass man durch Verschiebung eines besonderen Rohrs die Entfernung zwischen der zweiten und dritten Ocularlinse innerhalb gewisser Grenzen verändern kann, während die Entfernungen zwischen der ersten und zweiten, so wie die zwischen der dritten und vierten Ocularlinse unverändert bleiben. Die im Vorhergehenden angeführten und angewandten Dimensionen beziehen sich auf das Minimum der veränderlichen Entfernung; betrachten wir einen Augenblick das Maximum derselben.

Das Maximum der Verschiebung beträgt 111 Millimeter, und die Entfernung der zweiten von der dritten Ocularlinse wird um eben so viel vergrössert. Es wird daher bei Anwendung der ganzen möglichen Verschiebung $d'' = 220.0$. Aber für das deutliche Sehen müssen jetzt alle Ocularlinsen dem Objectiv etwas genähert werden, und zwar, wie man leicht findet, um 5.857, weshalb jetzt $d' = 541.193$ wird. Die Abscissen q'', q''', etc. nebst den Haupt-

und den Brennpunkten erleiden entsprechende Veränderungen, jene werden für die einzelnen Linsen

$$
\begin{array}{llll}
q = 0\,, & e = 1.923 & & \\
q' = 9.7\,, & e_{,} = 5.468 & & \Delta = 547.255 \\
q'' = 550.893\,, & e' = 552.723 & & \\
q''' = 553.693\,, & e'_{,} = 553.693 & & \Delta' = 45.473 \\
q^{iv} = 597.793\,, & e'' = 599.166 & & \\
q^{v} = 599.893\,, & e''_{,} = 599.893 & & \Delta'' = 220.0 \\
q^{vi} = 819.893\,, & e''' = 819.893 & & \\
q^{vii} = 824.093\,, & e'''_{,} = 821.348 & & \Delta''' = 55.045 \\
q^{viii} = 876.393\,, & e^{iv} = 876.393 & & \\
q^{ix} = 878.893\,, & e^{iv}_{,} = 877.259 & &
\end{array}
$$

97.

Es sollen jetzt nur die nun stattfindende Vergrösserung des Fernrohrs, nebst dem Orte des Auges und dessen Gegenpunkt berechnet werden. Die Gesammtbrennweiten der beiden ersten, so wie der beiden letzten Ocularlinsen sind selbstverständlich dieselben wie vorher, und die dazu gehörigen Haupt- und Brennpunkte sind von den vorhergehenden nur um den Unterschied der jetzigen Werthe der betreffenden e verschieden. Letztere werden hier nicht alle gebraucht, und wir führen daher nur die betreffenden Werthe nach dem Art. 88, mit Berücksichtigung des neuen Werthes von e' an. Diese sind

$$\Phi'_{,,} = 45.570\,, \quad E'_{,,} = 598.978$$
$$\Phi'''_{,v} = 58.813\,.$$

Zufolge des Art. 55 bekommen wir nun schon die Gesammtbrennweite des Objectivs und der beiden ersten Ocularlinsen durch die Gleichung

$$\Phi^0_{,,} = \frac{\varphi\,\Phi'_{,,}}{\varphi + \Phi'_{,,} - (E'_{,,} - e_{,})}$$

woraus

$$\Phi^0_{,,} = -\,3099.2$$

folgt. Die jetzige, oder die grösste, Vergrösserung des Fernrohrs wird daher

$$-\frac{\Phi^0_{,,}}{\Phi'''_{iv}} = 52.72$$

und verhält sich also zu der im Vorhergehenden erhaltenen kleinsten nahe wie 5 : 3.

Von den anderen Verfahrungsarten die Vergrösserung zu erhalten wollen wir hier, der Kürze wegen, absehen.

98.

Zur Berechnung des Ortes des Auges und dessen Gegenpunkts soll das Verfahren des Art. 59 angewandt werden. Dieses giebt

$$\begin{array}{ll} a = 1.923 & \alpha = -1.930 \\ a' = 549.185 & \alpha' = 42.91 \\ a'' = 2.56 & \alpha'' = -2.715 \\ a''' = 222.715 & \alpha''' = 63.99 \\ a^{\prime\prime\prime\prime} = -8.94 & \alpha^{\prime\prime\prime\prime} = 7.10 \end{array}$$

woraus

$$J_{,} = 884.36$$

folgt. Dieser Punkt ist also wieder reel, und liegt 5mm47 hinter der letzten Ocularlinse.

Für den Gegenpunkt bekommt man

$$\begin{array}{ll} \gamma^{\prime\prime\prime\prime} = 1.634 & c^{\prime\prime\prime\prime} = -1.676 \\ \gamma''' = 56.721 & c''' = 401.52 \\ \gamma'' = -181.52 & c'' = 35.932 \\ \gamma' = 9.541 & c' = -12.549 \\ \gamma = 559.804 & c = 15264. \end{array}$$

und hieraus

$$J = -15262.$$

Der Gegenpunkt liegt also jetzt nahe 15½ Meter vor dem Objectiv.

99.

Seit der Erfindung der Photographie haben die bis dahin gebräuchlichen dioptrischen Instrumente einen Zuwachs erhalten. Zur *Camera obscura*, durch deren Hülfe die Aufnahme von irdischen Gegenständen bewirkt wird, bedarf der Photograph ein Objectiv, welches anderen Forderungen genügen muss, als das achromatische Objectiv eines Fernrohrs, und da diese Forderungen ausgedehnter sind, so müssen die zur Photographie anzuwendenden Objective verschiedenartig construirt werden, je nachdem sie zur Aufnahme der einen oder anderen Gattung von Gegenständen dienen sollen. Im All-

gemeinen bestehen die Objective der *Camera obscura* aus zwei in mässiger Entfernung von einander befindlichen Linsen, deren jede eine aus Flint- und Kronglas zusammengesetzte Doppellinse ist, und man findet auch sogar bei Objectiven, die, zu einem und demselben Zwecke dienend, von verschiedenen Optikern angefertigt sind, Verschiedenheiten in der Einrichtung derselben. Ich habe eine ziemliche Anzahl solcher Objective gesehen, aber noch nie Gelegenheit oder Veranlassung zur näheren Untersuchung derselben gehabt.

Eine andere Gattung von dioptrischen Instrumenten hat die Astrophotographie hervorgerufen, nemlich besonders zu diesem Zwecke construirte Oculare. Um einen cölestischen Gegenstand photographisch abzubilden, bedarf es vor Allem eines Objectivs von grosser Brennweite, welches wie bei einem Fernrohr an dem einen Ende eines Rohrs von angemessener Länge anzubringen ist, und entweder ganz oder nahe ebenso construirt werden kann wie das eines Fernrohrs; besondere Constructionen des Objectivs, wenn sie in der That mehr leisten als das eines Fernrohrs, sollen durch das Vorstehende nicht ausgeschlossen werden. Das Bild des Gegenstandes, welches in dem zweiten Brennpunkt des Objectivs entsteht, könnte schon zur photographischen Aufnahme benutzt werden, wenn man nicht grösserer bedürfte, oder solche wenigstens wünschte. Auch ist die Anwendung des Focalbildes jedenfalls unbrauchbar, wenn man auf der Photographie Messungen vornehmen will, bei welchen man von festen, nicht zum Bilde gehörigen, graden Linien ausgehen muss. Aus diesen Gründen sieht man sich veranlasst, in dem Instrument ein zweites Bild herzustellen, welches eine angemessene Vergrösserung des Focalbildes gewährt, und dieses kann nur dadurch bewirkt werden, dass man hinter dem Brennpunkt des Objectivs ein auf angemessene Weise construirtes Ocular anbringt, durch welches dieses zweite Bild erzeugt wird. Zugleich wird man dadurch in den Stand gesetzt, sich die eben erwähnten Linien auf dem photographischen Bilde zu verschaffen, die zu Ausgangspunkten für die anzustellenden Messungen dienen sollen, und die am Einfachsten dadurch hergestellt werden, dass man in der Ebene des Focalbildes Spinnefäden einzieht.

Bei der Berechnung dieser Instrumente müssen strenge genommen die chemischen Strahlen statt der optischen in Betracht gezogen

werden, jedoch scheinen die Brechungen dieser von denen jener nur sehr wenig verschieden zu sein.

Die Vornahme von Messungen auf einem solchen photographischen Bilde setzt voraus, dass Bild und Gegenstand einander in allen ihren Theilen proportional seien, aber man wird wohl kein Ocular construiren können, welches dieser Bedingung in gewünschter Strenge Gnüge leistet, wenn gleich dieses von dem hier anzuwendenden Objectiv, oder vielmehr dessen Focalbilde, vorausgesetzt werden kann. Ich habe aber vor einiger Zeit ein Verfahren entwickelt, durch welches man solchen Mangel an Proportionalität, nach vorangegangenen, darauf hingerichteten Versuchen, vermittelst einer einfachen Rechnung berücksichtigen, und völlig unschädlich machen kann. Ich werde dieses Verfahren in einem besonderen Aufsatze veröffentlichen.

Es darf wohl als selbstverständlich betrachtet werden, dass man zur Erlangung von genauen Resultaten der vorzunehmenden Abmessungen sich keiner Copien des photographischen Bildes, sondern nur des ursprünglich auf der Glasplatte erhaltenen negativen Bildes bedienen darf. Aber auch selbst in diesem Falle findet bei dem gewöhnlichen Verfahren ein Umstand statt, von welchem eine nachtheilige Wirkung nicht in den Bereich der Unmöglichkeit gestellt werden kann, der Umstand nemlich, dass die vorbereitete Glasplatte, während die Belegung derselben noch feucht ist, der Einwirkung des Lichts ausgesetzt wird. Es können hiedurch nach der Aufnahme sehr wohl Verschiebungen einzelner Theile des Bildes, oder wenigstens Undeutlichkeiten in den Umrissen der einzelnen Theile desselben hervorgebracht werden. Undeutliche Darstellungen von an sich scharf begrenzten Linien, die sich auf einigen mir vorgelegten photographischen Bildern befanden, meine ich diesem Umstande zuschreiben zu müssen, obgleich man andererseits geneigt war, ihre Ursache in einer Unvollkommenheit des angewandten Instruments zu suchen.

Die Anwendung der sogenannten Trockenbilder lässt hoffen, von diesem Uebelstande befreit zu bleiben, da hiebei nur bei der Hervorrufung des Bildes Feuchtigkeit in Anwendung kommt, und die Glasplatte hiebei in horizontaler Lage erhalten werden kann; mehr aber darf man erwarten, durch die Anwendung der Daguerrotypie statt der Photographie reine und scharfe, unveränderte Bilder zu erhalten, da hiebei gar keine Feuchtigkeiten während der Aufnahme

und der Hervorrufung der Bilder mitwirken. Es möchte daher sich sehr empfehlen, Versuche dieser Art anzustellen.

100.

Von solchen photographischen Ocularen ist mir Eins näher bekannt, und zwar dasjenige, welches der Astronomischen Gesellschaft gehört. Dieses Ocular habe ich, soweit die Umstände es zuliessen, untersucht, und werde die Ergebnisse derselben hier anführen.

Das genannte Ocular besteht aus zwei Doppellinsen (wahrscheinlich aus einer Flint- und einer Kronglaslinse), die in einem und demselben Rohr so angebracht sind, dass ihre Entfernung unveränderlich ist. Dieses Rohr ist von einem zweiten umgeben, worin eine Blendung sich befindet, und wird mit dem einen Ende an das Rohr des Objectivs angeschraubt, wogegen am anderen Ende die zur Aufnahme der vorbereiteten Glasplatte dienende *Camera obscura* angeschraubt wird. Die Linsen lassen sich zwar aus ihren Fassungen heraus nehmen, aber sie sind an einander gekittet, weshalb ich ihre inneren Halbmesser nicht habe untersuchen können, und jede derselben in den folgenden Untersuchungen als eine einfache Linse betrachten muss.

Die äusseren Halbmesser sind je zwei einander so nahe gleich, dass meine Apparate gar keinen Unterschied angegeben haben, es ist aber die erste Linse Ein Millimeter dicker als die zweite. Ob die inneren Halbmesser der einen Linse denen der anderen auch gleich sind, kann ich aus der angeführten Ursache nicht bestimmen, jedoch habe ich Grund anzunehmen, dass sie verschieden seien.

Den einer grösst möglichen Sehne angehörigen Pfeil des ersten Halbmessers der ersten, und des zweiten Halbmessers der zweiten Linse fand ich im Mittel aus mehreren Versuchen $= 2^{mm}039$, und den derselben Sehne angehörigen Pfeil der beiden anderen Halbmesser $= 2^{mm}542$. Die Brennweite der ersten Linse ergab sich $= 88.98$ und ihre Dicke $= 16.2$, die Brennweite der zweiten Linse $= 89.12$ und ihre Dicke $= 15.2$; die Entfernung der einander zugekehrten Oberflächen der beiden Linsen $= 35.6$.

Nimmt man den Satz zu Hülfe, dass bei kleinen Krümmungen die Pfeile, die auf derselben Sehne stehen, sich sehr nahe umgekehrt

zu einander verhalten, wie die Halbmesser der Kreise, denen sie angehören, so kommt man auf die folgenden Gleichungen. Wenn q den Pfeil bezeichnet, welcher zum Halbmesser r, oder dessen Substitut ϱ, und q' den Pfeil, welcher zu r' oder $\varrho_{,}$ gehört, so werden

$$\varrho^2 - \varrho \frac{q+q'}{q} \varphi + \delta \frac{q'}{q} \varphi = 0$$

$$\varrho_{,} = \frac{q}{q'} \varrho$$

Hiemit erhielt ich die folgenden Daten

$$\varrho' = 194.2\,,\quad \varrho_{,}' = 155.8\,,\quad \delta' = 10.23\,,\quad \varphi' = 88.98$$
$$\varrho'' = 156.2\,,\quad \varrho_{,}'' = 194.7\,,\quad \delta'' = 9.68\,,\quad \varphi'' = 89.12$$

die nebst dem Brechungsverhältniss $N = 1.57$ den folgenden Untersuchungen zu Grunde gelegt worden sind.

Ich habe hier bei den Bezeichnungen der Grössen, die der ersten Linse angehören, Einen Strich angewandt, weil weiter unten dieses Ocular mit einem Objectiv in Verbindung gebracht werden soll.

101.

Aus den Angaben des vor. Art. erhält man

$$d'' = 16.2 \qquad q'' = 0$$
$$d''' = 35.6 \qquad q''' = 16.2$$
$$d^{\text{IV}} = 15.2 \qquad q^{\text{IV}} = 51.8$$
$$q^{\text{V}} = 67.0$$

und hiemit die Hauptpunkte der einzelnen Linsen

$$e' = 5.844$$
$$e_{,}' = 11.512 \qquad \varDelta' = 44.720\,.$$
$$e'' = 56.232$$
$$e_{,}'' = 61.476$$

Durch die Gleichungen des Art. 68 u. f. ergeben sich

$$\alpha_{,}' = 88.98 \qquad\qquad \beta'' = 89.12$$
$$a_{,}'' = -44.26\,,\quad \alpha_{,}'' = 29.57 \qquad b' = -44.40\,,\quad \beta' = 29.62$$

$$\Phi_{,,}' = 59.46$$

$$F_{,,}' = -23.78 \qquad\qquad F_{,}'' = 91.05$$

Die Hauptpunkte werden nicht gebraucht. Man kann jetzt durch die Anwendung der Gleichungen (54) die Abscisse des Gegenstandes

$\xi - q''$, so wie die des Bildes $\xi'' - q^{v}$ berechnen, die irgend einer im Voraus bestimmten Vergrösserung des Focalbildes durch dieses Ocular entspricht. Unter Annahme mehrerer verschiedener Vergrösserungen habe ich die folgenden Werthe dieser Abscissen erhalten. Für

	$\xi - q''$	$\xi'' - q^{v}$
2malige Vergrösserung	— 53.52	143.0
3 — —	— 43.61	202.5
4 — —	— 38.66	261.9
5 — —	— 35.68	321.4
6 — —	— 33.70	380.9

In wie fern das in Rede stehende Ocular durch seine Construction befähigt ist, bei diesen Vergrösserungen deutliche und scharfe Bilder zu geben, kann ich freilich hier nicht theoretisch untersuchen, da die innere Construction der beiden Linsen mir nicht zugänglich ist, aber durch Versuche habe ich in Erfahrung gebracht, dass dasselbe bei einer fünfmaligen Vergrösserung sehr scharf begrenzte Bilder giebt.

102.

Das Objectiv des heliophotographischen Instruments, von welchem das hier betrachtete Ocular ein Theil ist, hat ohngefähr acht Fuss Brennweite, weiter ist mir aber von demselben nicht viel mehr bekannt. Da das oben analysirte Königsberger Objectiv auch ohngefähr acht Fuss Brennweite besitzt, so will ich dieses mit dem Ocular in Verbindung bringen, und die Oeffnungen u. s. w. der Linsen bestimmen, die für den Durchgang des Sonnenbildes durch dasselbe erforderlich sind.

Betrachten wir dieses Objectiv als die erste Linse des Instruments, nehmen wir die erforderlichen Data aus dem Art. 71, und verwandeln sie in Millimeter, so ergeben sich

$$\begin{aligned} \varphi &= 2551.56 \\ e &= 6.02 \\ e_{,} &= 14.06 \\ f_{,} &= 2565.62 \\ d &= 22.56 \end{aligned}$$

von welchen aber e, $e_{,}$, $f_{,}$ voraussetzen, dass der Anfangspunkt der Abscissen in dem Durchschnittspunkt der ersten Oberfläche des Objectivs mit der Abscissenachse liege. Ich werde nun zuerst die Rechnungen in der Annahme, dass das Ocular das Focalbild des Objectivs

3 mal

vergrössern soll, durchführen. Die Entfernung der letzten Oberfläche des Objectivs von der ersten der ersten Ocularlinse ist nun augenscheinlich gleich der Entfernung des Brennpunkts $f_{,,}$ von der erst genannten Oberfläche, oder $f_{,} - d$, vergrössert um den Abstand des Gegenstandes von der letzt genannten Oberfläche bei einer dreimaligen Vergrösserung, also

$$\begin{aligned} d' &= 2565.62 - 22.56 + 43.61 \\ &= 2586.67 \end{aligned}$$

Mit Beibehaltung des Anfangspunkts der Abscissen im Punkt q'', werden also

$$\begin{aligned} q &= -2609.23 \\ q' &= -2586.67 \\ q'' &= 0 \end{aligned}$$

etc.

es bleiben nemlich die übrigen q so wie sie oben waren. Es werden ausserdem

$$\begin{aligned} e &= -2603.21 \\ e_{,} &= -2595.17 \qquad f = 2601.01 \\ e' &= +5.84 \end{aligned}$$

etc.

Rechnen wir nun die Vereinigungsweiten, so bekommen wir

	$\alpha = 2551.56$		$\beta'' = 89.12$
$a' = 49.45$,	$\alpha' = -111.33$	$b' = -44.40$,	$\beta' = 29.62$
$a'' = 156.05$,	$\alpha'' = 207.75$	$b = 2571.39$,	$\beta = 330600.$
	$\alpha_{,}' = 88.98$		$\beta_{,}' = 88.98$
$a_{,}'' = -44.26$,	$\alpha_{,}'' = 29.57$	$b_{,} = 2512.03$,	$\beta_{,} = -162200.$

von welchen die, welche sich blos auf die Ocularlinsen beziehen, dieselben sind wie oben. Ferner werden

$$\Phi^0_{,} = 5744.$$

$$F^0_{,} = 159597. \qquad F'_0 = -99.82$$

$$\Phi^0_{,,} = -7648.$$

$$F^0_{,,} = -333203. \qquad F''_0 = 269.23$$

$$\Phi'_{,,} = 59.46$$

$$F_{,,} = -23.78 \qquad F'_{,} = 91.05$$

wovon die letzten wieder dieselben sind wie oben. Hiemit werden

$$\log C = 8.3513$$

$$-C' = 7.9989 \qquad \log D'' = 1.4507n$$

$$-C^{\prime v} = 7.8745n \qquad -D^{\prime\prime} = 1.3688n$$

$$\log C' = 8.2874n \qquad \log D' = 1.6571n$$

$$-C''' = 8.4340n \qquad -D''' = 1.3688n$$

also durch die Gleichungen (48)

$$\epsilon' = \epsilon + 0.0225l, \quad l' = -45.40\epsilon - 0.0194l$$

$$\epsilon'' = -28.23\epsilon + 0.0100l, \quad l'' = -23.38\epsilon - 0.0272l$$

$$\epsilon''' = -43.24\epsilon - 0.0075l,,$$

in welchen wie früher die Einheit der Winkel ϵ, ϵ', etc. Ein Grad ist.

103.

Die halbe Oeffnung des benutzten Objectivs beträgt 79 Millimeter. Nehmen wir nun den Sonnenhalbmesser $= 16' = \frac{40}{15}$ an, und denken uns den Sonnenmittelpunkt in der Verlängerung der Abscissenachse, so erhalten wir für

$$\epsilon = \tfrac{4}{15} \text{ und } l = 0$$

$$\epsilon' = +0^\circ 27 \qquad l' = -12.11$$

$$\epsilon'' = -7.53 \qquad l'' = -6.23$$

$$\epsilon''' = -11.53$$

$$\epsilon = 0 \text{ und } l = 79$$

$$\epsilon' = +1.78 \qquad l' = -1.53$$

$$\epsilon'' = +0.79 \qquad l'' = -2.15$$

$$\epsilon''' = -0.59$$

und hieraus folgt für

$$\varepsilon = \frac{4}{15} \text{ und } l = 79$$

$$\varepsilon' = +\ 2^{\circ}05 \qquad l' = -\ 13.64$$
$$\varepsilon'' = -\ 6.74 \qquad l'' = -\ 8.38$$
$$\varepsilon''' = -\ 12.12$$

$$\varepsilon = \frac{4}{15} \text{ und } l = -\ 79$$

$$\varepsilon' = -\ 1^{\circ}51 \qquad l' = -\ 10.58$$
$$\varepsilon'' = -\ 8.32 \qquad l'' = -\ 4.08$$
$$\varepsilon''' = -\ 10.94$$

Die grösste Oeffnung, die erforderlich ist, um alle vom concentrischen Sonnenbilde auf das Objectiv fallende Lichtstrahlen durchzulassen, beträgt also für die erste Ocularlinse sehr nahe 27.3, und für die zweite 16.8 Millimeter. Jede dieser Linsen hat eine Oeffnung von ohngefähr 40 Millimeter, und ist also weit mehr als hinreichend gross. Wenn man sich das Sonnenbild in excentrischer Lage zum Instrument denkt, so muss ε angemessen vergrössert werden, und die Folge davon ist, dass etwas grössere Oeffnungen der Ocularlinsen in Anspruch genommen werden. Es kann sich jeder leicht diese Oeffnungen für verschiedene Annahmen über die Lage des Sonnenbildes aus den numerischen Gleichungen des vor. Art. berechnen. Es ist aber aus anderen Gründen von entschiedenem Vortheil, bei den photographischen Aufnahmen der Sonne diese möglichst concentrisch im Instrumente zu erhalten, wozu Hülfsmittel vorhanden sind.

104.

Es ist von Interesse die Einfalls- und Brechungswinkel wenigstens annähernd kennen zu lernen, die in diesem Ocular vorkommen.

Es dienen dazu die folgenden Gleichungen,

$$\sin\theta'' = \frac{k''}{p'' - q''} \qquad \alpha'' = \varepsilon'$$

$$\sin\theta''' = \frac{k'''}{p''' - q'''} \qquad \alpha^{iv} = \varepsilon''$$

etc. etc.

in welchen hier statt der Sinusse die Bögen gesetzt werden dürfen.

$$k'' = l + (e' - q'')\varepsilon'$$
$$k''' = l' + (e_{,}' - q''')\varepsilon''$$
$$k^{IV} = l'' + (e'' - q^{IV})\varepsilon''$$
$$k^{V} = l'' + (e_{,}'' - q^{V})\varepsilon'''$$
etc.

und vermöge der zweiten Fundamentalgleichung des Art. 36,

$$\alpha''' = \frac{k'' - k'''}{q''' - q''}$$
$$\alpha^{V} = \frac{k^{IV} - k^{V}}{q^{V} - q^{IV}}$$
etc.

Es bekommen hierauf die Einfallswinkel die Ausdrücke

$$\alpha'' - \theta'',\ \alpha''' - \theta''',\ \alpha^{IV} - \theta^{IV},\ \text{etc.}$$

und die Brechungswinkel die Ausdrücke

$$\alpha''' - \theta'',\ \alpha^{IV} - \theta''',\ \alpha^{V} - \theta^{IV},\ \text{etc.}$$

Für das in Rede stehende Ocular sind

$$\log(p'' - q'') = 2.0441 \qquad q''' - q'' = 16.2$$
$$- (p''' - q''') = 1.9484n \qquad q^{V} - q^{IV} = 15.2$$
$$- (p^{IV} - q^{IV}) = 1.9496$$
$$- (p^{V} - q^{V}) = 2.0452n$$

hiemit, und mit den übrigen oben gegebenen Daten, findet sich für $\varepsilon = \frac{1}{15}$ und $l = 79$

$$\theta'' = -6^{0}95,\ k'' = -13{,}431,\ \alpha'' = +2^{0}05$$
$$\theta''' = +8.47,\ k''' = -13.128,\ \alpha''' = -1.08$$
$$\theta^{IV} = -5.70,\ k^{IV} = -8.864,\ \alpha^{IV} = -6.74$$
$$\theta^{V} = +3.75,\ k^{V} = -7.221,\ \alpha^{V} = -6.19$$
$$\alpha^{VI} = -12.12$$

und es werden also für die

		Einfallswinkel	Brechungswinkel
1. Linse	1. Oberfl.	$\alpha'' - \theta'' = +9^{0}0$	$\alpha''' - \theta'' = +5^{0}9$
	2. „	$\alpha''' - \theta''' = -9.6$	$\alpha^{IV} - \theta''' = -15.2$
2. Linse	1. „	$\alpha^{IV} - \theta^{IV} = -1.0$	$\alpha^{V} - \theta^{IV} = -0.5$
	2. „	$\alpha^{V} - \theta^{V} = -9.9$	$\alpha^{VI} - \theta^{V} = -15.9$

Man sieht hieraus, dass für den äussersten Lichtstrahl die grössten Brechungen in beiden Ocularlinsen einander nahe gleich sind, so

wie dass die Brechung durch die erste Oberfläche der zweiten Ocularlinse sehr klein ist.

105.

Es ist in diesem Ocular noch ein merkwürdiger Punkt zu betrachten, nemlich das Bild des Objectivs, welches nach dem Durchgange der Lichtstrahlen durch alle drei Linsen entsteht, hinter der letzten Linse liegt, und folglich reel wird. Es ist dieses Bild dem im Orte des Auges bei Fernröhren liegenden Bilde analog.

Man findet die Coordinaten desselben durch die Gleichungen (54), nachdem darin q, $F_{''}^{0}$, F''_{0}, $\Phi_{''}^{0}$ bez. statt ξ, F, $F_{,}$, Φ substituirt, und statt η die halbe Oeffnung des Objectivs gesetzt worden sind. Die Rechnung giebt

$$\xi''' - q^{v} = + 25.28$$
$$q''' = - 1.83$$

Dieses Bild liegt also nahe 25 Millimeter hinter der letzten Ocularlinse, und hat einen Durchmesser von 3.7 Millimeter. Am Orte dieses Bildes ist der Durchmesser des Strahlenkegels, welcher überhaupt, und ohne Rücksicht auf das Gesichtsfeld, das Instrument durchlaufen kann, ein Minimum, und alle Lichtstrahlen, die die photographische Platte treffen können, müssen durch diesen kleinen Kreis gehen. Der Ort desselben eignet sich daher vorzüglich zur Anbringung einer Blendung, deren Oeffnung den Durchmesser dieses Kreises zu erhalten hat.

106.

Um den Weg der Lichtstrahlen durch dieses Instrument auch kennen zu lernen, wenn das Ocular auf eine andere Vergrösserung eingestellt worden ist, soll die Berechnung auch für eine

5malige Vergrösserung

desselben Oculars kurz durchgeführt werden.

Es wird zuerst zufolge des Vorhergehenden

$$d' = 2565.62 - 22.56 + 35.68$$
$$= 2578.74$$

also

$$q = -2601.30$$
$$q' = -2578.74$$
$$q'' = 0$$
etc.

$$e = -2595.28$$
$$e_, = -2587.24 \qquad \Delta = 2593.08$$
$$e' = 5.84$$
etc.

und die Vereinigungsweiten, die von den vorhergehenden verschieden werden, sind

$$a' = 41.52, \quad \alpha' = -77.84 \qquad b = 2563.46, \quad \beta = 549600.$$
$$a'' = 122.56, \quad \alpha'' = 326.8 \qquad b_, = 2504.10, \quad \beta_, = -134620.$$

woraus

$$\Phi_,^0 = 4784.$$
$$F_,^0 = 132025. \qquad F'_0 = -66.33$$
$$\Phi_{,,}^0 = -12753.$$
$$F_{,,}^0 = -552195. \qquad F''_0 = 388.3$$

$$\log C = 8.3513$$
$$- C'' = 8.0783 \qquad \log D'' = 1.4493n$$
$$- C^{IV} = 7.6525n \qquad - D^{IV} = 1.6345n$$
$$\log C' = 8.2114n \qquad \log D' = 1.6557n$$
$$- C''' = 8.4086n \qquad - D''' = 1.3674n$$

folgen. Also

$$\varepsilon' = \varepsilon + 0.0225\, l, \quad l' = -45.26\,\varepsilon - 0.0163\, l$$
$$\varepsilon'' = -28.14\,\varepsilon + 0.0120\, l, \quad l'' = -23.30\,\varepsilon - 0.0256\, l$$
$$\varepsilon''' = -43.10\,\varepsilon - 0.0045\, l$$

und für

$$\varepsilon = \tfrac{4}{15} \text{ und } l = 79$$
$$\varepsilon' = +2{^\circ}05 \qquad l' = -13.36$$
$$\varepsilon'' = -6.56 \qquad l'' = -8.24$$
$$\varepsilon''' = -11.85$$

$$\varepsilon = \tfrac{4}{15} \text{ und } l = -79$$
$$\varepsilon' = -1{^\circ}51 \qquad l' = -10.78$$
$$\varepsilon'' = -8.45 \qquad l'' = -4.18$$
$$\varepsilon''' = -11.14$$

ferner für $\varepsilon = \frac{1}{15}$ und $l = 79$

$$\begin{aligned}
\theta'' &= -6^{\circ}81, & k'' &= -13.151, & \alpha'' &= +2^{\circ}05 \\
\theta''' &= +8.29, & k''' &= -12.838, & \alpha''' &= -1.11 \\
\theta^{IV} &= -5.62, & k^{IV} &= -8.734, & \alpha^{IV} &= -6.56 \\
\theta^{V} &= +3.67, & k^{V} &= -7.106, & \alpha^{V} &= -6.14 \\
& & & & \alpha^{VI} &= -11.85
\end{aligned}$$

und es werden also jetzt für die

		Einfallswinkel	Brechungswinkel
1. Linse	1. Oberfl.	$\alpha'' - \theta'' = +8^{\circ}9$	$\alpha''' - \theta'' = +5^{\circ}7$
	2. Oberfl.	$\alpha''' - \theta''' = -9.4$	$\alpha^{IV} - \theta''' = -14.9$
2. Linse	1. Oberfl.	$\alpha^{IV} - \theta^{IV} = -0.9$	$\alpha^{V} - \theta^{IV} = -0.5$
	2. Oberfl.	$\alpha^{V} - \theta^{V} = -9.8$	$\alpha^{VI} - \theta^{V} = -15.5$

Die Coordinaten des Bildes des Objectivs werden

$$\xi''' - q^{V} = +25.4$$
$$\eta''' = -1.83$$

Vergleicht man diese Zahlenwerthe mit denen, die im vor. Art. für eine dreimalige Vergrösserung dieses Oculars gefunden wurden, so geben sich nur kleine Unterschiede zu erkennen, und man kann daraus schliessen, dass ein solches Ocular, wenn es für eine bestimmte Vergrösserung zweckmässig construirt wird, sich auch mit Erfolg auf Vergrösserungen anwenden lässt, die eine Einheit und mehr grösser oder kleiner sind.

Ich komme auf die oben erwähnte, in diesem Ocular in der Gegend, in welcher das reelle Bild des Objectivs liegt, befindliche Blendung zurück, deren Oeffnung einen Durchmesser von ohngefähr 9 Millimeter besitzt. Ich habe vor der Zurückgabe desselben vergessen die Entfernung dieser Blendung von der letzten Ocularlinse zu messen, und kann daher nicht angeben, ob sie sich im Orte dieses Bildes befindet. Sollte dieses der Fall sein, so ist ihre Oeffnung jedenfalls viel zu gross, das Ocular muss durch Einziehung einer richtig berechneten Blendung auf jeden Fall an Güte gewinnen.

BESTIMMUNG DER LÄNGENDIFFERENZ

ZWISCHEN LEIPZIG UND WIEN

AUF TELEGRAPHISCHEM WEGE AUSGEFÜHRT

VON

PROF. C. BRUHNS UND PROF. E. WEISS.

HERAUSGEGEBEN

VON

C. BRUHNS

DIRECTOR DER STERNWARTE IN LEIPZIG UND MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº III.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL

1872.

Vom Verfasser übergeben den 18. September 1871.
Der Abdruck vollendet den 25. November 1871.

BESTIMMUNG

DER

LÄNGENDIFFERENZ

ZWISCHEN LEIPZIG UND WIEN

AUF TELEGRAPHISCHEM WEGE AUSGEFÜHRT

VON

PROF. C. BRUHNS UND PROF. E. WEISS

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. C. BRUHNS
DIRECTOR DER STERNWARTE IN LEIPZIG,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

I. Einleitung.

Schon auf der allgemeinen Conferenz der Mitteleuropäischen Gradmessung im Jahre 1864 in Berlin wurde zwischen dem Director der Wiener Sternwarte Herrn von Littrow und mir die Vereinbarung getroffen, im Jahre 1865 eine Längenbestimmung zwischen Wien und Leipzig auszuführen.

Wegen der grossen Entfernung, auf welcher nach den Erfahrungen früherer Jahre öfter telegraphische Störungen bei solchen Arbeiten zu vermuthen waren, kamen wir überein, die Zeitbestimmungen in Wien und Leipzig nach der Auge- und Ohrmethode anzustellen und zwischen den beiden an jedem Abende stattfindenden Zeitbestimmungen auf telegraphischem Wege durch Coincidenzen die Uhren mit einander zu vergleichen. Die Beobachter sollten nicht wechseln, aber vor und nach den telegraphischen Längenbestimmungen mit den eigenen Instrumenten den Betrag der persönlichen Gleichung ermitteln. Die Beobachtungen wurden ausgeführt auf dem Laaer Berge bei Wien von Herrn Dr. Weiss, in Leipzig auf der Sternwarte von mir selbst. Die Instrumente waren beide vollständig gleich: es waren Passagen-Instrumente mit gebrochenem Fernrohr von 30 Par. Linien Objectivöffnung und 30 Zoll Brennweite, (die angewandte Vergrösserung 90fach,) aus der Werkstatt von Pistor & Martins in Berlin.

Die Beobachtungen zur eigentlichen Längenbestimmung wurden ausgeführt 1865 vom 29. Juni bis zum 19. Juli. Zur Ermittelung der persönlichen Gleichung kam Herr Dr. Weiss im Mai nach Leipzig, ich selbst begab mich im August nach Wien und dem Laaer Berge und die persönliche Gleichung ist ermittelt vom 20—29. Mai und vom 7—11. August.

Zur eigentlichen Längenbestimmung wurde nach dem folgenden Programm beobachtet.

Beobachtungs-Programm.

Sterne zur ersten Zeitbestimmung.

Nr.	Namen	Grösse	AR 1865.0			Decl. 1865.0	
			Nivelliren.				
1	B. A. C. 5181	6	15h	34m	38s	+50°	51.'9
2	α Serpentis	2.3		37	36	6	51.1
3	B. A. C. 5214	4.5		39	54	7	46.8
4	,, 5245	3		44	5	4	53.2
5	,, 5271	6		47	59	42	49.7
	Carrington 580	5.6	3	57	14	+83	28.0
			Umlegen.				
	Carrington 580	5.6	3h	57m	14s	+83°	28.'0
6	δ Ophiuchi	3	16	7	15	— 3	20.6
7	Radcliffe 3525	6.7		12	7	+40	22.0
8	B. A. C. 5463	4		15	44	46	37.8
9	,, 5490	5		19	10	14	20.8
10	,, 5523	5		24	12	42	10.9
			Nivelliren.				

Sterne zur zweiten Zeitbestimmung.

Nr.	Namen	Grösse	AR 1865.0			Decl. 1865.0	
			Nivelliren.				
11	ζ Herculis	3	16h	36m	11s	+31°	50.'8
12	B. A. C. 5621	5		39	22	8	50.0
13	,, 5644	5		43	1	42	28.9
14	,, 5692	4		47	37	10	23.4
15	κ Ophiuchi	4		51	17	9	35.4
	ε Ursae minoris	4.5		59	55	+82	15.3
			Umlegen.				
	ε Ursae minoris	4.5	16	59	55	+82	15.3
16	α Herculis	3.4	17	8	29	14	32.8
17	B. A. C. 5841	6		12	16	11	0.8
18	,, 5871	6		16	32	46	22.5
19	,, 5894	6.5		19	48	7	43.0
20	,, 5911	5.6		23	10	48	22.5
21	β Draconis	2.3		27	20	+52	24.1

Telegraphische Arbeiten.

— An dem einen Abende beginnt Wien, an dem andern Leipzig und so abwechselnd. — Zuerst erfolgt Verständigung und Mittheilung über die beobachteten Sterne.

1. Wien (Leipzig) lässt 10 Minuten seine Coincidenzuhr gehen.

Coincidenzen werden an beiden Stationen beobachtet zwischen den Schlägen der Relais und der Normaluhren.

2. Leipzig (Wien) lässt 10 Minuten seine Coincidenzuhr gehen.
3. Wien (Leipzig) giebt 20 Signale in Intervallen von 9—11 Secunden.
4. Leipzig (Wien) giebt 20 Signale in Intervallen von 9—11 Secunden.
5. Leipzig (Wien) lässt 10 Minuten seine Coincidenzuhr gehen.
6. Wien (Leipzig) lässt 10 Minuten seine Coincidenzuhr gehen.

Sterne zur letzten Zeitbestimmung.

Nr.	Namen	Grösse	AR 1865.0			Decl. 1865.0	
22	δ Aquilae	3.4	19ʰ	18ᵐ	41ˢ	+ 2°	40′.8
			Nivelliren.				
23	B. A. C. 6697	4	19	26	17	+51°	26′.6
24	„ 6717	6		29	57	48	58.1
25	„ 6729	5		32	32	5	5.9
26	„ 6745	5.6		35	3	42	30.5
	1127 Carrington	5.6	7	44	13	+84	26.2
			Umlegen.				
	1127 Carrington	5.6	7	44	13	+84	26.2
27	B. A. C. 6928	5.6	20	2	39	52	45.8
28	„ 6952	5		7	56	14	17.3
29	α² Capricorni	3.4		10	33	—12	58.7
30	B. A. C. 6996	5.6		13	18	+10	18.7
31	„ 7014	6		16	30	+ 4	54.7
32	„ 7046	6		21	19	— 3	48.1
			Nivelliren.				

Es wurden vor den telegraphischen Arbeiten zwei Zeitbestimmungen gewählt, falls durch Ungunst des Wetters oder durch telegraphische Störungen eine der Zeitbestimmungen ausfallen sollte.

II. Ermittelung der Instrumental-Correctionen.

Die Zenithdistanzen der südlichen Sterne (Zeitsterne) sind so gewählt, dass die Hälfte derselben in jeder Zeitbestimmung zwischen —13° und 14°, die andere Hälfte zwischen 40° und 52° Declination fällt und die erstern Declinationen entsprechen im Mittel sehr nahe

denselben Zenithdistanzen nach Süden, als die Polsterne sie nach Norden haben, während die nördlichern Sterne in der Nähe des Zeniths gewählt sind, um die Azimuthalfehler der Instrumente unschädlicher zu machen. In denselben Zenithdistanzen mit den Zeitsternen wurden auch die Sterne zur Ermittelung der persönlichen Gleichung gewählt, so dass dadurch die von der Zenithdistanz abhängige Variabilität der persönlichen Gleichung sich bestimmen und an die Beobachtungen anbringen lässt.

1. Das Instrument in Leipzig.

a. *Die Neigung.*

Die Neigung wurde durch die sehr guten Niveaus an jedem Instrumente nach dem Programm jeden Abend mehrmals (bis zu sieben Mal) bestimmt. Die Blase wurde, da die Libelle ein Reservoir hat, ziemlich immer auf dieselbe Länge zwischen 16^p und 20^p gehalten und für diese Länge der Blase

$$1^p = 0\overset{s}{.}120$$
$$0.116$$
$$0.118$$

also im Mittel

$$1^p = 0\overset{s}{.}118 \pm 0\overset{s}{.}001$$

ermittelt und angenommen.

Die Correction für Ungleichheit der Zapfen war früher durch Beobachtungen zu

$$0\overset{p}{.}0486 \pm 0\overset{p}{.}00333$$

gefunden, während sie aus den unten stehenden Nivellirungen sich zu

$$0\overset{p}{.}056, \text{ Gewicht} = 51.9,$$

also genügend übereinstimmend, ergibt. Angenommen wurde

$$0\overset{p}{.}050$$

und zur Reduction des Niveau Ost-Ende auf West-Ende die Correction

$$-0\overset{p}{.}20$$

angebracht. Die angestellten Nivellirungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

1865.	Zeit	Kreis	Erhebung des Westendes	Reduction auf West	Angenommen		O — W	Gewicht
Juni 29.	13ʰ0	W	+3ᵖ00	+3ᵖ00	14ʰ8	+3ᵖ14	+0ᵖ380	2.7
	15.4	W	+3.16	+3.16				
	16.1	O	+3.46	+3.26				
Juli 4.	15.5	O	−0.04	−0.24	17.3	0.04	−0.195	2.7
	16.5	W	+0.30	+0.30				
	20.0	O	+0.25	+0.05				
» 5.	13.0	O	+0.26	+0.06	15.6	+0.09	+0.180	2.7
	16.0	W	+0.10	+0.10				
	17.7	O	+0.30	+0.10				
» 6.	15.5	O	0.00	−0.20	17.7	−0.16	+0.175	4.8
	16.5	W	−0.20	−0.20				
	17.5	W	+0.02	+0.02				
	19.2	O	+0.05	−0.15				
	19.9	W	−0.27	−0.27				
» 7.	13.8	W	−0.65	−0.65	15.2	−0.67	−0.020	2.7
	15.4	W	−0.55	−0.55				
	16.5	O	−0.62	−0.82				
» 9.	15.5	W	−0.36	−0.36	15.5	−0.36		
» 12.	15.8	W	+0.57	+0.57	16.4	+0.66	+0.565	2.7
	16.5	O	+1.10	+0.90				
	17.0	W	+0.50	+0.50				
» 13.	15.0	W	+0.87	+0.87	16.1	+0.81	+0.323	3.0
	15.5	W	+0.25	+0.25				
	16.5	O	+1.10	+0.90				
	17.5	W	+1.21	+1.21				
» 14.	13.3	W	+0.34	+0.34	16.1	+0.40	−0.190	3.0
	15.5	W	+0.34	+0.34				
	16.5	O	+0.31	+0.11				
	19.2	W	+0.82	+0.82				
» 15.	13.2	O	+0.25	+0.05	17.6	+0.42	+0.038	6.9
	15.5	O	+0.62	+0.42				
	16.5	W	+0.77	+0.77				
	18.0	O	+0.77	+0.57				
	19.3	O	+0.66	+0.46				
	20.3	W	+0.20	+0.20				
	20.4	W	+0.49	+0.49				
» 16.	15.5	W	+0.56	+0.56	17.9	+0.51	+0.249	6.9
	15.9	O	+0.79	+0.59				
	16.8	O	+0.40	+0.20				
	17.6	W	+0.45	+0.45				
	19.3	W	+0.44	+0.44				
	19.7	O	+1.00	+0.80				
	20.4	O	+0.74	+0.54				

1865.	Zeit	Kreis	Erhebung des Westendes	Reduction auf West	Angenommen		O — W	Gewicht
Juli 17.	13h3	W	+0p09	+0p09				
	15.6	O	+1.04	+0.84				
	16.5	W	+0.51	+0.51				
	17.6	O	+1.10	+0.90	17p0	+0p56	+0p797	6.0
	19.0	O	+1.30	+1.10				
	20.0	W	+0.45	+0.45				
» 18.	15.5	W	+0.22	+0.22				
	16.5	O	+0.57	+0.37				
	18.0	W	+0.49	+0.49	17.7	+0.50	+0.265	4.8
	19.0	W	+0.70	+0.70				
	19.7	O	+0.90	+0.70				
» 19.	15.5	O	+0.55	+0.35				
	16.5	W	+0.50	+0.50	17.6	+0.41	+0.080	3.0
	18.0	O	+0.59	+0.39				
	20.5	O	+0.60	+0.40				

Man erkennt hier deutlich eine der Zeit proportionale Aenderung der Neigung und aus den zu Anfang und Ende angestellten Nivellirungen an jedem Tage ist die stündliche Variation der Neigung abgeleitet. Es ergibt sich:

Aenderung der Neigung.

1865.	Zeit	Aenderung
Juni 29.	in 3h1	+0s26
Juli 4.	» 4.5	+0.19
» 5.	» 4.7	+0.04
» 6.	» 4.4	−0.07
» 7.	» 2.7	−0.17
» 12.	» 1.2	−0.07
» 13.	» 2.5	+0.34
» 14.	» 5.9	+0.48
» 15.	» 7.2	+0.44
» 16.	» 4.9	−0.02
» 17.	» 6.7	+0.36
» 18.	» 4.2	+0.48
» 19.	» 5.0	+0.05

in 57 Stunden = + 2s31

daher stündliche Aenderung . . . . . + 0s04

Mit dieser stündlichen Aenderung sind für die Zeiten der beobachteten Polsterne an jedem Abend aus den obigen Neigungen die folgenden Werthe abgeleitet:

Neigung für die Polsterne.

1865.	α Ursae minoris $13^{h}.2$		Polstern I. $16^{h}.0$		Polstern II. $17^{h}.0$		Polstern III. $19^{h}.7$	
	Kr. West	Kr. Ost	Kr. West	Kr. Ost	Kr. West	Kr. Ost	Kr. West	Kr. Ost
Juni 29.	$+0^{s}.369$	$+0^{s}.381$	$+0^{s}.379$	$+0^{s}.391$	$+0^{s}.383$	$+0^{s}.395$	$+0^{s}.392$	$+0^{s}.404$
Juli 4.	−0.009	+0.003	+0.001	+0.013	+0.005	+0.017	+0.014	+0.026
» 5.	+0.008	+0.020	+0.018	+0.030	+0.022	+0.034	+0.031	+0.043
» 6.	−0.029	−0.017	−0.019	−0.007	−0.015	−0.003	−0.006	+0.006
» 7.	−0.081	−0.069	−0.071	−0.059	−0.067	−0.055	−0.058	−0.046
» 9.	−0.045	−0.033	−0.035	−0.023	−0.031	−0.019	−0.022	−0.010
» 12.	+0.073	+0.085	+0.083	+0.095	+0.087	+0.099	+0.096	+0.108
» 13.	+0.091	+0.103	+0.101	+0.113	+0.105	+0.117	+0.114	+0.126
» 14.	+0.044	+0.056	+0.054	+0.066	+0.058	+0.070	+0.067	+0.079
» 15.	+0.040	+0.052	+0.050	+0.062	+0.054	+0.066	+0.063	+0.075
» 16.	+0.049	+0.061	+0.059	+0.071	+0.063	+0.075	+0.072	+0.084
» 17.	+0.059	+0.071	+0.069	+0.081	+0.073	+0.085	+0.082	+0.094
» 18.	+0.049	+0.061	+0.059	+0.071	+0.063	+0.075	+0.072	+0.084
» 19.	+0.038	+0.050	+0.048	+0.060	+0.052	+0.064	+0.061	+0.073

b. *Der Collimationsfehler.*

Um die Collimationsfehler zu bestimmen, wurden an die Polsterne die Correctionen für die Neigung angebracht, die so für Kreis Ost und Kreis West corrigirten Beobachtungszeiten von einander abgezogen und durch die Coefficienten der Collimationsfehler ($2 \sec \delta$) dividirt. Zur Berechnung der Collimationsfehler haben sich aus den Beobachtungen folgende Werthe ergeben.

Polsterne	1865	Kreis West Durchgangszeit	Kreis West Correct. für i	Kreis Ost Durchgangszeit	Kreis Ost Correct. für i	Durchgangszeit West	Durchgangszeit Ost	West minus Ost	Collimationsfehler
580 Carringt.	Juni 29.	$15^{h}56^{m}59^{s}.92$	$-2^{s}.35$	$57^{m}\ 5^{s}.20$	$-2^{s}.42$	$57^{s}.57$	$62^{s}.78$	$5^{s}.21$	$+0^{s}.297$
	Juli 4.	57 21.95	−0.01	28.31	−0.08	21.94	28.23	6.29	+0.358
	» 6.	22.45	+0.12	30.47	+0.04	22.57	30.51	7.95	+0.453
	» 7.	23.52	+0.44	31.74	+0.36	23.96	32.10	8.15	+0.464
	» 13.	29.86	−0.62	36.18	−0.69	29.24	35.49	6.25	+0.356
	» 14.	30.22	−0.33	36.44	−0.41	29.89	36.03	6.15	+0.350
	» 15.	29.92	−0.31	37.06	−0.38	29.61	36.68	7.07	+0.403
	» 16.	29.82	−0.36	38.72	−0.43	29.46	38.29	8.83	+0.503
	» 17.	30.43	−0.42	39.90	−0.49	30.01	39.41	9.40	+0.535
	» 18.	31.37	−0.36	40.96	−0.43	31.01	40.53	9.52	+0.542
	» 19.	32.03	−0.29	42.04	−0.37	31.74	41.67	9.94	+0.566
ε Ursae min.	Juli 4.	17 0 6.62	+0.03	0 1.74	+0.11	6.65	1.85	4.80	+0.325
	» 5.	7.62	+0.14	0.62	+0.22	7.76	0.84	6.92	+0.466
	» 6.	8.14	−0.10	2.21	−0.02	8.04	2.19	5.85	+0.394
	» 7.	10.40	−0.43	3.10	−0.35	9.97	2.75	7.22	+0.486

Polstern	1865	Kreis West Durchgangszeit	Kreis West Correct. für i	Kreis Ost Durchgangszeit	Kreis Ost Correct. für i	Durchgangszeit West	Durchgangszeit Ost	West minus Ost	Collimationsfehler
ε Ursae min.	Juli 12.	17^h 0^m $10^s.65$	$+0^s.55$	0^m $3^s.84$	$+0^s.63$	$11^s.20$	$4^s.47$	$6^s.73$	$+0^s.454$
	» 13.	11.06	+0.67	2.90	+0.75	11.73	3.65	8.08	+0.544
	» 15.	11.54	+0.34	4.38	+0.42	11.88	4.80	7.08	+0.477
	» 16.	14.01	+0.40	5.16	+0.48	14.41	5.64	8.77	+0.590
	» 17.	14.00	+0.47	4.20	+0.54	14.47	4.74	9.72	+0.655
	» 18.	16.05	+0.40	5.37	+0.48	16.45	5.85	10.60	+0.712
	» 19.	6.32	+0.41	15.99	+0.33	6.73	16.32	9.59	+0.646
α Ursae min.	Juli 5.	13 10 14.04	−0.25	10 33.04	−0.62	13.79	32.42	18.63	+0.230
	» 14.	22.84	−1.37	51.00	−1.74	21.47	49.26	27.79	+0.343
	» 15.	23.80	−1.24	53.42	−1.61	22.56	51.81	29.25	+0.361
	» 17.	22.05	−1.83	62.85	−2.20	20.22	60.65	40.43	+0.498
1127 Carringt.	Juli 6.	19 44 9.60	+0.05	44 18.59	−0.05	9.65	18.54	8.89	+0.432
	» 15.	13.78	−0.47	27.06	−0.57	13.31	26.49	13.18	+0.639
	» 16.	14.92	−0.53	27.91	−0.63	14.39	27.28	12.89	+0.625
	» 17.	15.92	−0.61	28.50	−0.71	15.31	27.79	12.48	+0.605
	» 18.	15.74	−0.53	29.81	−0.63	15.21	29.18	13.97	+0.677

Auch in diesen Werthen ist eine der Zeit proportionale Aenderung wahrzunehmen, und um die stündliche Aenderung der Collimation zu berechnen, ist zuerst ohne Rücksicht auf die Gewichte für jeden Tag das Mittel aus den einzelnen Collimationsfehlern abgeleitet. Es hat sich ergeben

Juli 4.	$16^h.48$	$+0^s.341$
» 5.	15.08	+0.349
» 6.	17.57	+0.426
» 7.	16.48	+0.475
» 13.	16.48	+0.450
» 14.	14.56	+0.347
» 15.	16.46	+0.470
» 16.	17.57	+0.573
» 17.	16.46	+0.573
» 18.	17.57	+0.643
» 19.	16.48	+0.606

und damit ergibt sich als Aenderung der Collimation:

Juli 4.	in $0^h.52$	$-0^s.016$	Juli 7.	in $0^h.52$	$+0^s.011$
» 4.	» 0.52	−0.017	» 7.	» 0.52	+0.011
» 5.	» 1.92	+0.118	» 13.	» 0.52	+0.094
» 5.	» 1.92	+0.118	» 13.	» 0.52	+0.094
» 6.	» 1.61	−0.027	» 14.	» 1.40	+0.003
» 6.	» 0.57	+0.032	» 14.	» 1.40	+0.004
» 6.	» 2.17	+0.006	» 15.	» 3.30	+0.109

Juli 15. in $0^h.50$ +0ˢ.067		Juli 17. in $0^h.54$ +0ˢ.082	
» 15. » 0.54 +0.007		» 17. » 3.28 +0.032	
» 15. » 3.28 +0.169		» 18. » 1.61 +0.091	
» 16. » 1.61 −0.070		» 18. » 0.57 −0.069	
» 16. » 0.57 +0.017		» 18. » 2.17 +0.034	
» 16. » 2.17 +0.052		» 19. » 0.52 +0.040	
» 17. » 3.50 +0.075		» 19. » 0.52 +0.040	
» 17. » 0.50 +0.038		Summe in $39^h.09$ +1ˢ.251	

also stündliche Aenderung +0ˢ.032.

Aus frühern Resultaten war +0ˢ.034 gefunden und dieser Werth ist bei den Rechnungen angewandt worden.

Der Collimationsfehler ist vom 4. bis 19. Juli ziemlich regelmässig grösser geworden, weil die Temperatur in dieser Zeit zunahm. Um nun zu untersuchen, ob bei den Umlegungen des Instruments von Kreis Ost nach Kreis West und umgekehrt dieselben Collimationsfehler herauskommen (was zugleich eine Prüfung für die Richtigkeit der Fädenintervalle ist) habe ich für die verschiedenen Polsterne für Kreis Ost und Kreis West beginnend, die Mittel gebildet. Zieht man Juli 4 und 6 als gültig für Juli 5 zusammen, so hat man (Alles reducirt auf 17^h Sternzeit) im Mittel aus

Carr. 580	Kr. O	$c =$ +0ˢ.514	(aus Juli 4, 6, 15, 17, 19)
	» W	+0.500	(» » 7, 13, 16, 18)
ε Ursae min.	» W	+0.510	(» » 4, 6, 15, 17, 19)
	» O	+0.537	(» » 7, 13, 16, 18)
Carr. 1127	» O	+0.566	(» » 15, 17)
	» W	+0.590	(» » 16).

Im Mittel bei Kreis Ost beginnend ist $c =$ +0ˢ.539, bei Kreis West = +0ˢ.533, also bei den wenigen Beobachtungen genügend übereinstimmend.

c. *Das Azimuth.*

Zur Bestimmung des Azimuths wurden die scheinbaren Positionen von α Ursae minoris aus dem Berliner Jahrbuche entnommen und die Correction von +0ˢ.60 angebracht, welche sich aus vielen Beobachtungen als die wahrscheinlichste ergeben hat; ε Ursae wurde erst aus dem Nautical Almanac mit der Correction von −0ˢ.38 in AR entnommen, doch zeigte sich, wenn man das Azimuth aus den beiden nachfolgenden Carringtonsternen allein mit der daraus folgenden der Zeit proportionalen Aenderung annahm

für die Leipziger Beobachtungen eine Correction
des Azimuthes aus ε Ursae min. von +0ˢ.089 ± 0ˢ.022
für die Wiener Beobachtungen eine Correction
des Azimuthes aus ε Ursae min. von +0.155 ± 0.021

Im Mittel wurde daher als Correction des ursprünglichen Azimuthes aus ε Urs. min. +0ˢ.127
angenommen, welches einer Correction der Rectascension für ε Urs. min. von noch nahe —0ˢ.57
also im Ganzen von —0ˢ.95 entspricht.

Die Sterne 580 und 1127 Carrington sind von Hrn. Romberg am Berliner Meridiankreis bestimmt und die mittlern Oerter für 1865.0 angenommen:

580 Carr. AR. = 3^h 57^m $14^s.45$, δ = 83° 28′ 5″.0
1127 Carr. AR. = 7 44 10.15, δ = 84 26 11.2

Für die bei Ableitung der Azimuthe benutzten Zeitsterne sind angewandt als Correctionen, inclusive der täglichen Aberration

für	α Serpentis	aus dem	Berliner Jahrbuch 1865:	—0ˢ.01
»	δ Ophiuchi	»	Nautical Almanac 1865:	—0.01
»	ζ Herculis	»	» » » :	+0.18
»	$\varkappa$ Ophiuchi	»	» » » :	+0.02
»	α Herculis	»	Berliner Jahrbuch 1865:	—0.01
»	β Draconis	»	Nautical Almanac 1865:	+0.06
»	δ Aquilae	»	» » » :	+0.05
»	α_1 Capricorni	»	Berliner Jahrbuch 1865:	—0.01
»	α_2 Capricorni	»	» » » :	—0.01

und damit die scheinbaren Oerter der Sterne wie folgt gefunden:

	Carrington 580.	Carrington 1127.	ε Ursae minoris
Juni 30.	AR = 3^h 57^m $16^s.46$	AR = 7^h 44^m $4^s.31$	AR = 16^h 59^m $58^s.23$
Juli 5.	57 17.28	44 4.31	59 57.77
10.	57 18.17	44 4.41	59 57.26
15.	57 19.10	44 4.60	59 56.69
20.	57 20.08	44 4.87	59 56.07

	η Ursae majoris.	α Serpentis.	δ Ophiuchi.
Juni 30.	AR = 13^h 42^m $14^s.67$	AR = 15^h 37^m $40^s.12$	AR = 16^h 7^m $19^s.48$
Juli 10.	14.43	37 40.05	7 19.44
20.	14.17	37 39.95	7 19.36

	ζ Herculis.	κ Ophiuchi.	α Herculis.
Juni 30.	AR = $16^h\ 36^m\ 14^s.80$	AR = $16^h\ 51^m\ 19^s.88$	AR = $17^h\ 8^m\ 32^s.69$
Juli 10.	36 14.73	51 19.86	8 32.68
20.	36 14.62	51 19.80	8 32.62

	β Draconis.	δ Aquilae.	α_1 Capricorni.
Juni 30.	AR = $17^h\ 27^m\ 25^s.93$	AR = $19^h\ 18^m\ 44^s.79$	AR = $20^h\ 10^m\ 13^s.22$
Juli 10.	27 25.84	18 44.90	10 13.38
20.	27 25.69	18 44.97	10 13.51

	α_2 Capricorni.
Juni 30.	AR = $20^h\ 10^m\ 37^s.16$
Juli 10.	10 37.32
20.	10 37.45

An die Polsterne wurden ausser der täglichen Aberration noch die von 2☾ abhängigen Glieder angebracht.

Mit diesen Sternpositionen wurde für jeden Tag aus den Polsternen und aus den zunächst liegenden Fundamentalsternen das Azimuth berechnet, und die folgende Tafel enthält die Gleichungen zur Ableitung des Azimuthes und die Werthe der gefundenen Correctionen für dasselbe.

1865	Sterne	Gleichung zur Bestimmung der Azimuthe	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juni 29.	α Ursae min. U.	$+8^s.75 = \Delta t + 26.11\,k$	$13^h.2$	$-0^s.370$
	η Ursae maj.	$+18.40 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$+18.10 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	−0.368
	Carr. 580 U.	$+15.93 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$+17.79 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$+19.37 = \Delta t + 0.42\,k$		
Juli 4.	α Serpentis	$-7.77 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	−0.076
	Carr. 580 U.	$-8.14 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$-7.91 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-7.47 = \Delta t + 0.42\,k$	17.0	−0.308
	κ Ophiuchi	$-7.56 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-6.25 = \Delta t - 3.82\,k$		
	α Herculis	$-7.78 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-7.45 = \Delta t - 0.03\,k$		
Juli 5.	α Ursae min. U.	$-13.66 = \Delta t + 26.11\,k$	13.2	−0.219
	η Ursae maj.	$-7.94 = \Delta t + 0.04\,k$		
	ζ Herculis	$-7.73 = \Delta t + 0.42\,k$	17.0	−0.342
	κ Ophiuchi	$-7.95 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-6.44 = \Delta t - 3.82\,k$		
	β Draconis	$-7.80 = \Delta t - 0.03\,k$		

1865	Sterne	Gleichung zur Bestimmung der Azimuthe	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 6.	α Ursae min. U.	$-14.58 = \Delta t + 26.11\,k$	$13^h.2$	$-0^s.250$
	η Ursae maj.	$-8.02 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$-8.52 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	-0.124
	Carr. 580 U.	$-9.24 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$-8.60 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-8.19 = \Delta t + 0.42\,k$	17.0	-0.231
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-8.38 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-7.34 = \Delta t - 3.82\,k$		
	α Herculis	$-8.50 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-8.11 = \Delta t - 0.03\,k$		
	δ Aquilae	$-8.82 = \Delta t + 0.77\,k$	19.7	-0.210
	Carr. 1127 U.	$-9.93 = \Delta t + 7.19\,k$		
	α_1 Capricorni	$-8.36 = \Delta t + 0.92\,k$		
	α_2 »	$-8.62 = \Delta t + 0.92\,k$		
Juli 7.	α Ursae min. U.	$-14.47 = \Delta t + 26.11\,k$	13.2	-0.213
	η Ursae maj.	$-8.91 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$-8.97 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	-0.285
	Carr. 580 U.	$-10.58 = \Delta t + 6.23\,k$		
	ζ Herculis	$-8.85 = \Delta t + 0.42\,k$	17.0	-0.056
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-8.99 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-8.65 = \Delta t - 3.82\,k$		
Juli 12.	α Ursae min. U.	$-16.45 = \Delta t + 26.11\,k$	13.2	-0.206
	η Ursae maj.	$-11.06 = \Delta t + 0.04\,k$		
	δ Ophiuchi	$-11.87 = \Delta t + 0.81\,k$	17.0	-0.225
	ζ Herculis	$-11.47 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-11.78 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-10.70 = \Delta t - 3.82\,k$		
Juli 13.	α Serpentis	$-12.03 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	-0.292
	580 Carr. U.	$-13.77 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$-12.31 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-11.74 = \Delta t + 0.42\,k$	17.0	-0.315
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-11.97 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-10.67 = \Delta t - 3.82\,k$		
	α Herculis	$-11.22 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-11.01 = \Delta t - 0.03\,k$		
Juli 14.	α Ursae min. U.	$-18.27 = \Delta t + 26.10\,k$	13.2	-0.217
	η Ursae maj.	$-12.61 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$-12.83 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	-0.250
	580 Carr. U.	$-14.19 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$-12.82 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-12.26 = \Delta t + 0.42\,k$		
	δ Aquilae	$-11.68 = \Delta t + 0.77\,k$		
Juli 15.	α Ursae min. U.	$-19.18 = \Delta t + 26.10\,k$	13.2	-0.224
	η Ursae maj.	$-13.31 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$-13.39 = \Delta t + 0.72\,k$	16.0	-0.146
	580 Carr. U.	$-14.18 = \Delta t + 6.23\,k$		
	δ Ophiuchi	$-13.38 = \Delta t + 0.81\,k$		

1865	Sterne	Gleichung zur Bestimmung der Azimuthe	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 15.	ζ Herculis	$-13^s.20 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-13.01 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-11.55 = \Delta t - 3.82\,k$	$17^h.0$	$-0^s.404$
	α Herculis	$-13.33 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-13.37 = \Delta t - 0.03\,k$		
	δ Aquilae	$-13.22 = \Delta t + 0.77\,k$		
	1127 Carr. U.	$-15.51 = \Delta t + 7.19\,k$	19.7	-0.333
	α_1 Capricorni	$-13.60 = \Delta t + 0.92\,k$		
	α_2 »	$-13.37 = \Delta t + 0.92\,k$		
Juli 16.	α Serpentis	$-13.84 = \Delta t + 0.72\,k$		
	580 Carr. U.	$-14.72 = \Delta t + 6.23\,k$	16.0	-0.157
	δ Ophiuchi	$-13.88 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-13.41 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-13.77 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-13.36 = \Delta t - 3.82\,k$	17.0	-0.102
	α Herculis	$-13.95 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-13.89 = \Delta t - 0.03\,k$		
	δ Aquilae	$-14.18 = \Delta t + 0.77\,k$		
	1127 Carr. U.	$-16.40 = \Delta t + 7.19\,k$	19.7	-0.377
	α_1 Capricorni	$-13.90 = \Delta t + 0.92\,k$		
	α_2 »	$-13.87 = \Delta t + 0.92\,k$		
Juli 17.	α Ursae min. U.	$-20.51 = \Delta t + 26.10\,k$	13.2	-0.237
	η Ursae maj.	$-14.33 = \Delta t + 0.04\,k$		
	α Serpentis	$-14.51 = \Delta t + 0.72\,k$		
	580 Carr. U.	$-15.37 = \Delta t + 6.23\,k$	16.0	-0.130
	δ Ophiuchi	$-14.82 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-14.27 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-14.37 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-13.06 = \Delta t - 3.82\,k$	17.0	-0.289
	α Herculis	$-14.23 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-14.18 = \Delta t - 0.03\,k$		
	δ Aquilae	$-14.82 = \Delta t + 0.77\,k$		
	1127 Carr. U.	$-17.07 = \Delta t' + 7.19\,k$	19.7	-0.366
	α_1 Capricorni	$-14.64 = \Delta t + 0.92\,k$		
	α_2 »	$-14.69 = \Delta t + 0.92\,k$		
Juli 18.	α Serpentis	$-15.40 = \Delta t + 0.72\,k$		
	580 Carr.	$-16.23 = \Delta t + 6.23\,k$	16.0	-0.142
	δ Ophiuchi	$-15.50 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-15.14 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-15.20 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-14.73 = \Delta t - 3.82\,k$	17.0	-0.141
	α Herculis	$-15.53 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-15.33 = \Delta t - 0.03\,k$		
	1127 Carr. U.	$-17.67 = \Delta t + 7.19\,k$		
	α_1 Capricorni	$-15.57 = \Delta t + 0.92\,k$	19.7	-0.345
	α_2 »	$-15.46 = \Delta t + 0.92\,k$		

1865	Sterne	Gleichung zur Bestimmung der Azimuthe	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 19.	α Serpentis	$-15.96 = \Delta t + 0.71\,k$		
	580 Carr. U.	$-16.99 = \Delta t + 6.23\,k$	17ʰ0	−0ˢ170
	δ Ophiuchi	$-16.17 = \Delta t + 0.81\,k$		
	ζ Herculis	$-15.89 = \Delta t + 0.42\,k$		
	$\varkappa$ Ophiuchi	$-16.01 = \Delta t + 0.69\,k$		
	ε Ursae min.	$-15.24 = \Delta t - 3.81\,k$	19.7	−0.166
	α Herculis	$-15.88 = \Delta t + 0.63\,k$		
	β Draconis	$-15.86 = \Delta t - 0.03\,k$		

In diesen Azimuthwerthen ist, wenn auch nicht so klar, doch eine der Zeit proportionale Aenderung ausgedrückt. Bildet man, das Azimuth von α Ursae minoris wegen zu weiter Entfernung von den Zeitsternen ausschliessend, aus den übrigen Azimuthen die Mittel, so hat man

1865	Sternzeit	Azimuth	1865	Sternzeit	Azimuth
Juli 4.	16ʰ48	−0ˢ192	Juli 15.	17ʰ57	−0ˢ294
			» 16.	17.57	−0.212
» 6.	17.57	−0.188			
			» 17.	17.57	−0.262
» 7.	16.48	−0.170			
			» 18.	17.57	−0.209
» 13.	16.48	−0.303	» 19.	16.48	−0.168

und damit die Aenderung des Azimuths:

1865	in	Aenderung	1865	in	Aenderung
Juli 4.	0ʰ52	−0ˢ116	Juli 16.	1ʰ61	−0ˢ055
	0.52	−0.116		0.57	−0.110
				2.17	−0.165
» 6.	1.61	−0.064			
	0.57	+0.043	» 17.	1.61	−0.132
	2.17	−0.022		0.57	+0.027
				2.17	−0.104
» 7.	0.52	+0.115			
	0.52	−0.114	» 18.	1.61	−0.067
				0.57	−0.068
» 13.	0.52	−0.011		2.17	−0.136
	0.52	−0.012			
			» 19.	0.52	−0.002
» 15.	1.61	−0.148		0.52	−0.002
	0.57	+0.110			
	2.17	−0.039			

Das Resultat gibt als Aenderung

$$\text{in } 25^h\!.91 = -0^s\!.952$$

also

$$\text{in } 1^h = -0^s\!.037.$$

Diese stündliche Aenderung wurde bei den Reductionen berücksichtigt.

Die zur Reduction der Beobachtungen angewandten Werthe der Instrumentalcorrectionen sind daher die folgenden:

1865	Stern-Zeit	i_w	i_o	c_w	c_o	k
Juni 29.	13^h	+0ˢ.369	+0ˢ.381	−0ˢ.197	+0ˢ.197	−0ˢ.259
	14	+0.372	+0.384	−0.231	+0.231	−0.296
	15	+0.375	+0.387	−0.265	+0.265	−0.333
	16	+0.379	+0.391	−0.299	+0.299	−0.370
	17	+0.382	+0.394	−0.233	+0.233	−0.407
Juli 4.	15	−0.002	+0.010	−0.290	+0.290	−0.137
	16	+0.001	+0.013	−0.324	+0.324	−0.174
	17	+0.004	+0.016	−0.358	+0.358	−0.211
	18	+0.007	+0.019	−0.392	+0.392	−0.248
	20	+0.015	+0.027	−0.460	+0.460	−0.322
	21	+0.018	+0.030	−0.494	+0.494	−0.359
Juli 6.	13	−0.029	−0.017	−0.271	+0.271	−0.019
	14	−0.026	−0.014	−0.305	+0.305	−0.056
	15	−0.023	−0.011	−0.339	+0.339	−0.093
	16	−0.019	−0.007	−0.373	+0.373	−0.130
	17	−0.015	−0.003	−0.407	+0.407	−0.167
	18	−0.012	0.000	−0.441	+0.441	−0.204
	19	−0.019	+0.003	−0.475	+0.475	−0.241
	20	−0.005	+0.007	−0.509	+0.509	−0.278
	21	−0.002	+0.010	−0.513	+0.543	−0.315
Juli 13.	13	+0.091	+0.103	−0.332	+0.332	−0.211
	15	+0.098	+0.110	−0.400	+0.400	−0.248
	16	+0.101	+0.113	−0.434	+0.434	−0.285
	17	+0.105	+0.117	−0.468	+0.468	−0.322
	18	+0.108	+0.120	−0.502	+0.502	−0.359
Juli 14.	13	+0.044	+0.056	−0.294	+0.294	−0.141
	14	+0.047	+0.059	−0.328	+0.328	−0.178
	15	+0.050	+0.062	−0.362	+0.362	−0.215
	16	+0.054	+0.066	−0.396	+0.396	−0.252
	17	+0.058	+0.070	−0.430	+0.430	−0.289
	18	+0.062	+0.074	−0.464	+0.464	−0.326
	19	+0.067	+0.079	−0.498	+0.498	−0.363

1865	Stern-Zeit	i_w	i_o	c_w	c_o	k
Juli 15.	13^h	+0^{s}040	+0^{s}052	−0^{s}352	+0^{s}352	−0^{s}125
	14	+0.043	+0.056	−0.386	+0.386	−0.162
	15	+0.046	+0.059	−0.420	+0.420	−0.199
	16	+0.050	+0.062	−0.454	+0.454	−0.236
	17	+0.054	+0.066	−0.488	+0.488	−0.273
	18	+0.057	+0.069	−0.522	+0.522	−0.310
	19	+0.061	+0.073	−0.556	+0.556	−0.347
	20	+0.064	+0.076	−0.590	+0.590	−0.384
Juli 16.	15	+0.056	+0.068	−0.486	+0.486	−0.117
	16	+0.059	+0.071	−0.520	+0.520	−0.154
	17	+0.063	+0.075	−0.554	+0.554	−0.191
	18	+0.066	+0.078	−0.588	+0.588	−0.228
	19	+0.070	+0.082	−0.622	+0.622	−0.265
	20	+0.073	+0.085	−0.656	+0.656	−0.302
	21	+0.076	+0.088	−0.690	+0.690	−0.339
Juli 17.	13	+0.059	+0.071	−0.456	+0.456	−0.093
	14	+0.062	+0.074	−0.490	+0.490	−0.130
	15	+0.066	+0.078	−0.524	+0.524	−0.167
	16	+0.069	+0.081	−0.558	+0.558	−0.204
	17	+0.073	+0.085	−0.592	+0.592	−0.241
	18	+0.076	+0.088	−0.626	+0.626	−0.278
	19	+0.079	+0.091	−0.660	+0.660	−0.315
	20	+0.083	+0.095	−0.694	+0.694	−0.352
	21	+0.087	+0.099.	−0.728	+0.728	−0.389
Juli 18.	15	+0.056	+0.068	−0.556	+0.556	−0.114
	16	+0.059	+0.071	−0.590	+0.590	−0.151
	17	+0.063	+0.075	−0.624	+0.624	−0.188
	18	+0.066	+0.078	−0.658	+0.658	−0.225
	19	+0.069	+0.081	−0.692	+0.692	−0.262
	20	+0.073	+0.085	−0.726	+0.726	−0.299
	21	+0.076	+0.088	−0.760	+0.760	−0.336
Juli 19.	15	+0.045	+0.057	−0.556	+0.556	−0.113
	16	+0.048	+0.060	−0.590	+0.590	−0.150
	17	+0.052	+0.064	−0.624	+0.624	−0.187
	18	+0.055	+0.067	−0.658	+0.658	−0.224
	19	+0.058	+0.070	−0.692	+0.692	−0.261
	20	+0.062	+0.074	−0.726	+0.726	−0.298
	21	+0.065	+0.077	−0.760	+0.760	−0.335

2. Das Instrument in Wien.

a. *Die Neigung.*

An dem Wiener Instrumente sprengte der Aether durch die sehr grosse Hitze, welche Juli 5 und 6 herrschte, den verkitteten Deckel von der Libelle los, sodass eine schnelle Verdunstung des

Aethers eintrat und Juli 7 eine neue Libelle in die Fassung gelegt werden musste.

Ein Niveautheil der ersten Libelle war = 0ˢ1005
der zweiten = 0.0907

Die Ungleichheit der Zapfen folgt aus allen Nivellirungen sowohl mit der neuen als mit der alten Libelle fast vollständig identisch. Es war

Längenbestimmung Leipzig-Wien Kr. O—W = — 0ᵖ21, Gewicht 82.7
» Berlin-Wien » = — 0.20, » 69.8

Sämmtliche Nivellirungen, die weiter unten zusammengestellt sind, wurden zunächst nach der Zeitfolge geordnet, und obwohl niemals die Sternzeit im Beobachtungsjournal hinzugefügt ist, so lässt sich, da die Nivellirungen nach den Culminationen der einzelnen Sterne angestellt sind, die Zeit doch sofort ermitteln und ist selbige in der Tabelle angegeben. Alle Nivellirungen sind auf Kreis West reducirt und zwar wenn Kreis Ost nivellirt war, mit den Werthen +0ᵖ20 bei der alten, +0ᵖ21 bei der neuen Libelle.

Für unsere Zwecke genügt es, nur die Nivellirungen während der Längenbestimmung Leipzig-Wien anzugeben und in der folgenden Tabelle erkennt man sofort, dass (mit Ausnahme von Juli 14 I, Juli 17 II und Juli 18 I) keine bemerkenswerthe Veränderung der Neigung angedeutet ist und eine der Zeit proportionale Veränderung mit Entschiedenheit nicht angenommen werden kann. Es ist daher an jedem Abend für jede Zeitbestimmung ein Generalmittel genommen und dasselbe zur Reduction angewandt.

Auch ist zu bemerken, dass die von Mai 22—27 angestellten Nivellirungen keine der Zeit proportionale Variation der Neigung gezeigt haben, und wenn in den Nivellirungen von September 12 bis October 2 während der Längenbestimmung Berlin-Wien eine ziemlich deutliche Variation der Neigung ausgesprochen zu sein scheint, so ist dies doch wieder nur an einzelnen Abenden der Fall. September 12, 13, 22 und October 2 zeigt zwar eine Abnahme, September 16 dagegen eine Zunahme, Septbr. 21, 23 und 26 scheint aus den Nivellirungen während der ersten Zeitbestimmung ein Gang hervorzugehen, der durch die Nivellirungen während der zweiten Zeitbestimmung nicht bestätigt wird; endlich ist September 18, 19, 20 und 24 überhaupt kein Gang in der Neigung zu erkennen und in der schon

publicirten Längenbestimmung Berlin-Wien ist daher auch für jede Zeitbestimmung einfach das Mittel aus den verschiedenen Nivellirungen genommen.

Wenn man noch die Nivellirungen bei der ersten und zweiten Sterngruppe mit einander vergleicht, so ist die Differenz zwischen denselben bald positiv, bald negativ und trägt daher ganz den Charakter von Beobachtungsfehlern. Es findet sich als Differenz der Neigungen zwischen der ersten und letzten Sterngruppe im Mittel bei der Längenbestimmung Leipzig-Wien I — II = + 0^p12 Gewicht 34.3

Berlin-Wien I — II = — 0.02 » 54.6

also im Mittel + 0.03 » 88.9

eine Grösse, welche zu vernachlässigen ist. Die Nivellirungen in Wien ergeben:

1865	Zeit	Kreis-lage	Erhebung des Westendes	Reduction auf West	Angenommen		O — W	Gewicht
Juni 29.	$15^h.4$	W	$+1^p70$	$+1^p70$				
	16.4	O	+1.35	+1.55				
	16.6	O	+1.43	+1.63	$+1^p62$	16^h5	-0^p260	4.0
	17.5	W	+1.60	+1.60				
Juli 4.	16.4	W	−1.20	−1.20				
	16.6	W	−0.78	−0.78	−1.40	16.8	−1.440	2.7
	17.5	O	−2.43	−2.23				
Juli 6.	16.0	O	−1.90	−1.70				
	16.4	W	−1.63	−1.63	−1.68	16.5	−0.210	4.0
	16.6	W	−1.73	−1.73				
	17.1	O	−1.88	−1.68				
	19.0	O	−1.95	−1.75				
	19.2	O	−2.80	−2.60	−2.28	19.6	+0.015	4.0
	20.0	W	−2.48	−2.48				
	20.4	W	−2.30	−2.30				
Juli 8.	15.8	W	+0.65	+0.65				
	15.9	O	−0.43	−0.22				
	16.5	O	+1.65	+1.86	+1.23	16.6	−0.316	6.0
	16.9	O	+1.68	+1.89				
	17.0	W	+1.30	+1.30				
	17.5	W	+1.90	+1.90				
Juli 11.	16.9	W	+3.50	+3.50	+3.40	17.0	−0.420	2.0
	17.2	O	+3.08	+3.29				
Juli 13.	15.8	O	+1.23	+1.44				
	15.9	W	+1.78	+1.78	+1.73	16.3	−0.515	4.0
	16.5	W	+1.98	+1.98				
	16.9	O	+1.50	+1.71				

1865	Zeit	Kreis-lage	Erhebung des Westendes	Reduction auf West	Angenommen		O — W	Ge-wicht
Juli 13.	19^h4	O	$+2^p53$	$+2^p74$				
	19.7	W	+2.40	+2.40	$+2^p51$	19^h8	$+0^p140$	2.7
	20.4	W	+2.38	+2.38				
Juli 14.	15.7	W	+4.00	+4.00				
	15.8	W	+3.95	+3.95				
	16.0	O	+3.63	+3.84				
	16.5	O	+2.95	+3.16	+3.25	16.5	−0.180	6.9
	16.8	O	+2.60	+2.81				
	16.9	W	+2.43	+2.43				
	17.5	W	+2.58	+2.58				
	19.2	W	+3.05	+3.05				
	19.6	W	+3.23	+3.23				
	19.8	O	+2.43	+2.64	+2.82	19.7	−0.850	4.0
	20.4	O	+2.15	+2.36				
Juli 15	15.7	O	+3.45	+3.66				
	16.0	W	+3.20	+3.20				
	16.5	W	+2.70	+2.70				
	16.8	W	+3.03	+3.03	+3.29	16.6	+0.404	6.0
	17.0	O	+3.13	+3.34				
	17.5	O	+3.60	+3.81				
	19.2	O	+3.20	+3.41				
	19.6	O	+3.03	+3.24				
	19.6	W	+3.20	+3.20	+3.11	19.7	+0.215	4.0
	19.8	W	+2.60	+2.60				
Juli 16.	15.7	W	+0.55	+0.55				
	16.0	O	−0.65	−0.44				
	16.4	O	−0.58	−0.37				
	16.8	O	−0.50	−0.29	−0.22	16.6	−0.494	6.0
	17.0	W	−0.60	−0.60				
	17.5	W	−0.20	−0.20				
	19.2	W	−0.48	−0.48				
	19.6	W	−0.40	−0.40				
	19.8	O	−0.20	+0.01	−0.38	19.7	−0.100	4.0
	20.4	O	−0.88	−0.67				
Juli 17.	15.7	O	−0.33	−0.12				
	16.0	W	+0.03	+0.03				
	16.5	W	+0.23	+0.23				
	16.8	W	−0.20	−0.20	+0.08	16.6	−0.090	6.0
	17.0	O	−0.23	−0.02				
	17.5	O	+0.35	+0.56				
	19.2	O	+0.03	+0.24				
	19.6	O	−0.70	−0.49				
	19.8	W	−0.88	−0.88	−0.50	19.7	+0.545	4.0
	20.4	W	−0.88	−0.88				

1865	Zeit	Kreis-lage	Erhebung des Westendes	Reduction auf West	Angenommen		O — W	Ge-wicht
Juli 18.	$15^{h}7$	W	−0^{p}15	−0^{p}15				
	16.0	O	+0.13	+0.34				
	16.4	O	+0.03	+0.24				
	16.7	O	+0.10	+0.34	−0^{p}02	$16^{h}6$	+0^{p}465	6.9
	16.9	O	+0.03	+0.24				
	17.0	W	0.00	0.00				
	17.5	W	−1.03	−1.03				
	19.2	W	+0.23	+0.23				
	19.8	O	+0.30	+0.51	+0.51	19.6	+0.210	2.7
	20.4	O	+0.58	+0.79				
Juli 19.	15.5	O	−0.45	−0.24				
	15.8	O	−1.08	−0.87				
	16.0	W	−0.98	−0.98	−0.77	16.2	+0.200	6.0
	16.4	W	−0.93	−0.93				
	16.7	W	−1.00	−1.00				
	17.0	O	−0.78	−0.57				

In der folgenden Tabelle sind mit Rücksicht auf die Gewichte aus der vorigen Generalmittel genommen und in Bezug auf Kreis Ost und Kreis West, welche um die halbe Grösse Kreis O — W von einander verschieden sind, zusammengestellt.

1865	Kreis Ost	Kreis West
Juni 29.	+0^{s}148	+0^{s}158
Juli 4.	−0.156	−0.146
» 6.	−0.215	−0.205
» 8.	+0.097	+0.106
» 11.	+0.294	+0.303
» 13.	+0.172	+0.181
» 14.	+0.266	+0.275
» 15.	+0.277	+0.286
» 16.	−0.040	−0.031
» 17.	−0.028	−0.019
» 18.	−0.002	+0.007
» 19.	−0.084	−0.075

b. *Der Collimationsfehler.*

Zur Ableitung des Collimationsfehlers sind die Beobachtungen der Polsterne auf den Mittelfaden reducirt und die Correctionen für Neigung aus der letzten Tabelle angebracht, die so corrigirten Beobachtungszeiten von einander abgezogen und durch 2 sec δ dividirt, wodurch

der Collimationsfehler sich findet. Die angewandten Coefficienten für die Neigung sind:

	für i
bei Carrington 580 U. C.	— 5.836
» ε Ursae minoris O. C.	+ 6.147
» Carrington 1127 U. C.	— 6.977.

Polsterne	1865	Kreis West Durchgangszeit	Kreis West Correct. für i	Kreis Ost Durchgangszeit	Kreis Ost Correct. für i	Durchgangszeit West	Durchgangszeit Ost	West min. Ost	Collimationsfehler
580 Carrington	Juni 29.	15ʰ 57ᵐ 33ˢ79	—0ˢ92	15ʰ 57ᵐ 31ˢ50	—0ˢ86	32ˢ87	30ˢ64	2ˢ23	+0ˢ126
	Juli 6.	55.11	+1.20	51.34	+1.25	56.31	52.59	3.72	+0.210
	» 8.	56 36.87	—0.62	56 33.90	—0.57	36.25	33.33	2.92	+0.165
	» 13.	40.81	—1.06	38.15	—1.00	39.75	37.15	2.60	+0.147
	» 14.	42.66	—1.60	41.14	—1.55	41.06	39.59	1.47	+0.083
	» 15.	42.67	—1.67	40.63	—1.62	41.00	39.01	1.99	+0.112
	» 16.	42.26	+0.19	39.80	+0.24	42.45	40.04	2.41	+0.136
	» 17.	42.31	+0.11	40.03	+0.16	42.42	40.19	2.23	+0.126
	» 18.	42.21	—0.04	39.66	+0.01	42.17	39.67	2.50	+0.141
	» 19.	42.05	+0.44	39.53	+0.49	42.49	40.02	2.47	+0.140
ε Ursae minoris	Juni 29.	16 60 14.84	+0.97	16 60 17.54	+0.91	15.81	18.45	2.64	+0.178
	Juli 4.	30.04	—0.90	32.02	—0.96	29.14	31.06	1.92	+0.129
	» 6.	34.00	—1.26	37.00	—1.32	32.74	35.68	2.94	+0.198
	» 8.	59 13.05	+0.65	59 14.75	+0.60	13.70	15.35	1.65	+0.111
	» 11.	12.51	+1.86	14.69	+1.81	14.37	16.50	2.13	+0.143
	» 13.	16.00	+1.11	17.60	+1.06	17.11	18.66	1.55	+0.104
	» 14.	17.01	+1.69	18.26	+1.64	18.70	19.90	1.20	+0.081
	» 15.	16.71	+1.76	18.19	+1.70	18.47	19.89	1.42	+0.096
	» 16.	17.84	—0.19	19.26	—0.25	17.65	19.01	1.36	+0.092
	» 17.	16.32	—0.12	18.38	—0.17	16.20	18.21	2.01	+0.135
	» 18.	16.33	+0.04	17.57	—0.01	16.37	17.56	1.19	+0.080
	» 19.	16.51	—0.46	16.66	—0.52	16.05	16.14	0.09	+0.006
1127 Carrington	Juli 6.	19 44 41.93	+1.43	19 44 38.16	+1.50	43.36	39.66	3.70	+0.179
	» 13.	43 27.52	—1.26	25.50	—1.20	26.26	24.30	1.96	+0.095
	» 14.	29.00	—1.92	27.25	—1.86	27.08	25.39	1.69	+0.082
	» 15.	29.04	—2.00	26.71	—1.93	27.04	24.78	2.26	+0.110
	» 16.	28.96	+0.22	25.35	+0.29	29.18	25.64	3.54	+0.172
	» 17.	27.48	+0.13	25.04	+0.20	27.61	25.24	2.37	+0.115
	» 18.	27.90	—0.05	25.83	+0.01	27.85	25.84	2.01	+0.099

Die Unterschiede der Collimationsfehler sind mit Ausnahme einiger Tage so gering, dass sie wohl schwerlich als reell angesehen werden können. Wenn man, um von zufälligen Fehlern unabhängiger zu sein, an den Tagen, wo alle drei Polsterne beobachtet sind (Juli 6, 13, 14, 15, 16, 17, 18), die Mittel der Collimationsfehler für jeden einzelnen Stern nimmt, so muss, wenn jeden Abend

eine der Zeit proportionale Aenderung vorhanden ist, diese im Mittel sich zeigen. Es ist jedoch:

für 580 Carr. um $15^h 57^m$ $c = +0^s.138$
» ε Urs. min. » 17 0 +0.113
» 1127 Carr. » 19 44 +0.122

also so nahe gleich, dass man wohl annehmen kann, eine regelmässige Aenderung des Collimationsfehlers im Laufe eines Abends habe nicht stattgefunden. Es ist deshalb bei Ausführung der Reductionen an jedem Tage das Mittel genommen, mit Ausnahme von Juli 19, wo wegen der constatirten Aenderung des Collimationsfehlers zwei Mittel gebildet sind. Es ist demnach angenommen für Kreis West:

1865	c	1865	c	1865	c
Juni 29.	+0ˢ.152	Juli 13.	+0ˢ.115	Juli 18.	+0ˢ.107
Juli 4.	+0.129	» 14.	+0.082	» 19.I	+0.140
» 6.	+0.196	» 15.	+0.106	» II	+0.006
» 8.	+0.138	» 16.	+0.133		
» 11.	+0.143	» 17.	+0.125		

c. *Das Azimuth.*

Das Azimuth wurde, um es möglichst genau zu erhalten, aus dem Polsterne und allen beobachteten Fundamentalsternen abgeleitet. Den Fundamentalsternen ist zusammen immer dasselbe Gewicht gegeben als dem Polstern, indem aus den Gleichungen für die Fundamentalsterne einfach das Mittel genommen wurde. Die strenge Auflösung nach der Methode der kleinsten Quadrate würde im Allgemeinen dieselben Werthe ergeben haben. Die folgende Tabelle enthält die Gleichungen zur Ableitung der Azimuthalwerthe.

1865	Sterne	Gleichungen zur Bestimmung des Azimuths	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juni 29.	580 Carr. U.	$-15.65 = \Delta t + 6.57\,k$	16^h0	$+0^s.406$
	δ Ophiuchi	$-18.00 = \Delta t + 0.78\,k$		
	ζ Herculis	$-17.65 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$-17.80 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$-18.71 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	+0.225
	α Herculis	$-17.49 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$-17.87 = \Delta t - 0.12\,k$		

1865	Sterne	Gleichungen zur Bestimmung des Azimuths	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 4.	ζ Herculis	$-32^s51 = \Delta t + 0^s33\,k$		
	κ Ophiuchi	$-32.57 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$-32.24 = \Delta t - 4.16\,k$	17^h0	-0^s080
	α Herculis	$-32.63 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$-32.70 = \Delta t - 0.12\,k$		
Juli 6.	α Serpentis	$-37.05 = \Delta t + 0.66\,k$		
	580 Carr. U.	$-37.15 = \Delta t + 6.57\,k$	16.0	-0.010
	δ Ophiuchi	$-37.13 = \Delta t + 0.78\,k$		
	ζ Herculis	$-36.82 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$-37.21 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$-36.44 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	-0.146
	α Herculis	$-37.24 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$-37.14 = \Delta t - 0.12\,k$		
	δ Aquilae	$-37.51 = \Delta t + 0.71\,k$		
	1127 Carr. U.	$-37.34 = \Delta t + 7.59\,k$	19.7	$+0.031$
	α_2 Capricorni	$-37.58 = \Delta t + 0.90\,k$		
Juli 8.*	α Serpentis	$+42.72 = \Delta t + 0.66\,k$		
	580 Carr.	$+42.88 = \Delta t + 6.57\,k$	16.0	$+0.027$
	κ Ophiuchi	$+42.64 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+43.03 = \Delta t - 4.16\,k$		
	α Herculis	$+42.86 = \Delta t + 0.57\,k$	17.0	-0.060
	β Draconis	$+42.73 = \Delta t - 0.12\,k$		
Juli 11.*	ζ Herculis	$+42.03 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+41.88 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+41.81 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	$+0.092$
	β Draconis	$+42.50 = \Delta t - 0.12\,k$		
Juli 13.	580 Carr. U.	$+40.14 = \Delta t + 6.57\,k$		
	δ Ophiuchi	$+39.08 = \Delta t + 0.78\,k$	16.0	$+0.183$
	ζ Herculis	$+39.28 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+39.27 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+39.13 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	$+0.020$
	α Herculis	$+39.09 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+39.22 = \Delta t - 0.12\,k$		
	1127 Carr. U.	$+39.07 = \Delta t + 7.59\,k$		
	α_2 Capricorni	$+39.01 = \Delta t + 0.90\,k$	19.7	$+0.009$
Juli 14.	α Serpentis	$+38.45 = \Delta t + 0.66\,k$		
	580 Carr. U.	$+38.44 = \Delta t + 6.57\,k$	16.0	$+0.031$
	δ Ophiuchi	$+38.07 = \Delta t + 0.78\,k$		
	ζ Herculis	$+38.24 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+38.22 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+37.57 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	$+0.136$
	α Herculis	$+38.14 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+38.23 = \Delta t - 0.12\,k$		

* An den beiden Tagen Juli 8 und 11 wurden, um vom Collimationsfehler und einer etwaigen Aenderung der persönlichen Gleichung zwischen Kr. O. und Kr. W. möglichst frei zu sein, zuerst das Mittel der zwei in der einen Kreislage beobachteten Zeitsterne genommen und dieser Werth mit dem in der andern Kreislage beobachteten Sterne zu einem Mittel verbunden.

1865	Sterne	Gleichungen zur Bestimmung des Azimuths	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 14.	δ Aquilae	$+38^s.22 = \Delta t + 0^s.71\,k$		
	1127 Carr. U.	$+38.15 = \Delta t + 7.59\,k$	$19^h.7$	$-0^s.009$
	α_2 Capricorni	$+38.17 = \Delta t + 0.90\,k$		
Juli 15.	580 Carr. U.	$+38.96 = \Delta t + 6.57\,k$		
	δ Ophiuchi	$+37.88 = \Delta t + 0.78\,k$	16.0	+0.187
	ζ Herculis	$+38.31 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+37.93 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+37.61 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	+0.109
	α Herculis	$+38.17 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+37.98 = \Delta t - 0.12\,k$		
	1127 Carr. U.	$+38.48 = \Delta t + 7.59\,k$		
	α_2 Capricorni	$+38.20 = \Delta t + 0.90\,k$	19.7	+0.042
Juli 16.	580 Carr. U.	$+37.90 = \Delta t + 6.57\,k$		
	δ Ophiuchi	$+38.04 = \Delta t + 0.78\,k$	16.0	−0.024
	ζ Herculis	$+38.44 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+38.31 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+38.34 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	−0.006
	α Herculis	$+38.23 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+38.26 = \Delta t - 0.12\,k$		
	δ Aquilae	$+38.22 = \Delta t + 0.71\,k$		
	1127 Carr. U.	$+37.03 = \Delta t + 7.59\,k$	19.7	−0.173
	α_2 Capricorni	$+38.17 = \Delta t + 0.90\,k$		
Juli 17.	α Serpentis	$+38.60 = \Delta t + 0.66\,k$		
	580 Carr. U.	$+38.04 = \Delta t + 6.57\,k$	16.0	−0.091
	δ Ophiuchi	$+38.53 = \Delta t + 0.78\,k$		
	ζ Herculis	$+38.68 = \Delta t + 0.33\,k$		
	κ Ophiuchi	$+38.58 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+39.34 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	−0.148
	α Herculis	$+38.67 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+38.74 = \Delta t - 0.12\,k$		
	δ Aquilae	$+38.66 = \Delta t + 0.71\,k$		
	1127 Carr. U.	$+38.05 = \Delta t + 7.59\,k$	19.7	−0.086
	α_2 Capricorni	$+38.61 = \Delta t + 0.90\,k$		
Juli 18.*	580 Carr. U.	$+38.62 = \Delta t + 6.57\,k$		
	δ Ophiuchi	$+38.71 = \Delta t + 0.78\,k$	16.0	−0.016
	κ Ophiuchi	$+38.79 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+39.45 = \Delta t - 4.16\,k$	17.0	−0.130
	α Herculis	$+38.97 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+38.81 = \Delta t - 0.12\,k$		
	1127 Carr. U.	$+37.69 = \Delta t + 7.59\,k$		
	α_2 Capricorni	$+38.97 = \Delta t + 0.90\,k$	19.7	−0.191
Juli 19.	α Serpentis	$+39.43 = \Delta t + 0.66\,k$		
	580 Carr. U.	$+38.43 = \Delta t + 6.57\,k$	16.0	−0.147
	δ Ophiuchi	$+39.15 = \Delta t + 0.78\,k$		

* Hier wurde dasselbe Verfahren angewendet, wie Juli 8 und 11.

1865	Sterne	Gleichungen zur Bestimmung des Azimuths	Sternzeit der Beob.	Azimuth
Juli 19.	ζ Herculis	$+39^{s}61 = \Delta t + 0^{s}33\,k$		
	ϰ Ophiuchi	$+39.40 = \Delta t + 0.63\,k$		
	ε Ursae min.	$+40.22 = \Delta t - 4.16\,k$	$17^{h}0$	$-0^{s}163$
	α Herculis	$+39.44 = \Delta t + 0.57\,k$		
	β Draconis	$+39.48 = \Delta t - 0.12\,k$		

Die abgeleiteten Azimuthe sind als gültig angenommen für die Zeiten der Culmination der Polsterne. Selbige ist für 580 Carrington $15^{h}96$, für ε Urs. min. $17^{h}0$, für 1127 Carrington $19^{h}74$; daher sind die Mittel aus den beiden ersten Zeiten $16^{h}48$, aus allen drei Zeiten $17^{h}57$.

Um eine der Zeit proportionale Aenderung im Azimuth zu finden, wurde in gleicher Weise wie bei dem Leipziger Instrument aus den Azimuthen das Mittel genommen und es findet sich:

1865	Sternzeit	Azimuth	1865	Sternzeit	Azimuth
Juni 29.	$16^{h}48$	$+0^{s}316$	Juli 15.	17.57	+0.113
Juli 6.	17.57	−0.042	» 16.	$17^{h}57$	$-0^{s}068$
» 8.	16.48	−0.046	» 17.	17.57	−0.108
» 13.	17.57	+0.071	» 18.	17.57	−0.112
» 14.	17.57	+0.053	» 19.	16.48	−0.155

und damit die Aenderung des Azimuths

1865	in	Aenderung	1865	in	Aenderung
Juni 29.	$0^{h}52$	$-0^{s}090$	Juli 16.	$1^{h}61$	$-0^{s}044$
	0.52	−0.091		0.57	−0.062
Juli 6.	1.61	−0.032		2.17	−0.105
	0.57	+0.104	» 17.	1.61	−0.017
	2.17	+0.073		0.57	+0.040
» 8.	0.52	−0.043		2.17	+0.022
	0.52	−0.044	» 18.	1.61	−0.096
» 13.	1.61	−0.112		0.57	+0.018
	0.57	+0.051		2.17	−0.079
	2.17	−0.062	» 19.	0.52	−0.008
» 14.	1.61	+0.022		0.52	−0.008
	0.57	−0.083			
	2.17	−0.062			
» 15.	1.61	−0.074			
	0.57	+0.004			
	2.17	−0.071			

Das Endresultat ergibt als Aenderung

in $33^h.6 = -0^s.849$

also in $1^h = -0.025$

welcher Werth mit dem für das Leipziger Instrument gefundenen nahe identisch ist. Die gefundenen Mittelwerthe für das Azimuth sind mit der erhaltenen Variation auf die Sternzeit 18^h reducirt und zu den Reductionen auf den Meridian sind daher bei den Wiener Beobachtungen an den einzelnen Tagen die folgenden Werthe der Neigung, der Collimation und des Azimuths angewandt:

1865	i_w	i_o	c_w	c_o	k_o für 18^h
Juni 29.	$+0^s.158$	$+0^s.148$	$+0^s.152$	$-0^s.152$	$+0^s.278$
Juli 4.	-0.146	-0.156	$+0.129$	-0.129	-0.105
» 6.	-0.205	-0.215	$+0.196$	-0.196	-0.053
» 8.	$+0.106$	$+0.097$	$+0.138$	-0.138	-0.054
» 11.	$+0.303$	$+0.294$	$+0.143$	-0.143	$+0.067$
» 13.	$+0.181$	$+0.172$	$+0.115$	-0.115	$+0.060$
» 14.	$+0.275$	$+0.266$	$+0.082$	-0.082	$+0.042$
» 15.	$+0.286$	$+0.277$	$+0.106$	-0.106	$+0.102$
» 16.	-0.031	-0.040	$+0.133$	-0.133	-0.089
» 17.	-0.019	-0.028	$+0.125$	-0.125	-0.119
» 18.	$+0.007$	-0.002	$+0.107$	-0.107	-0.123
» 19.	-0.075	-0.084	$+0.140$ $+0.006$	-0.140 -0.006	-0.193

$k = k_o - 0^s.025\ (t - 18^h)$, t in Stunden Sternzeit ausgedrückt.

III. Ermittelung der Uhrdifferenzen.

a. *Die Signale.*

Um die Differenz der Leipziger mit der Wiener Uhr zu finden, wurden zwei Methoden angewandt, die der Signale und die der Coincidenzen. Die Signale wurden in nahe regelmässigen Intervallen von 10 zu 10 Secunden gegeben und es hat sich bei denselben eine beträchtliche persönliche Gleichung herausgestellt.

In den folgenden Tabellen sind die in Leipzig und Wien beobachteten Signale zusammengestellt, daraus die Mittel genommen und damit die Uhrdifferenzen ermittelt.

Gehörte Signale.

1865	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Leipzig	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Wien	Differenz	Gegeben in Wien. Beobachtet in Leipzig	Gegeben in Wien. Beobachtet in Wien	Differenz
Juli 4.	$19^h 40^m 13^s.4$	$19^h 56^m 41^s.3$	$16^m 27^s.9$	$19^h 35^m 51^s.7$	$19^h 52^m 20^s.1$	$16^m 28^s.4$
	23.8	51.4	27.6	36 10.9	39.6	28.7
	34.5	57 2.0	27.5	22.3	50.4	28.1
	44.0	11.6	27.6	31.8	53 0.4	28.6
	53.9	21.4	27.5	41.6	10.0	28.4
	41 3.8	31.0	27.2	51.3	19.3	28.0
	14.3	41.7	27.4	37 2.7	30.2	27.5
	35.0	58 2.4	27.4	22.9	50.3	27.4
	44.4	12.0	27.6	31.3	59.2	27.9
	54.9	22.1	27.2	42.0	54 10.3	28.3
	42 4.8	32.	27.7	52.3	20.2	27.9
	14.7	42.5	27.8	38 2.4	29.7	27.3
	24.0	51.7	27.7	12.2	39.6	27.4
	34.9	59 3.0	28.1	22.7	50.2	27.5
	45.8	13.4	27.6	31.7	58.8	27.1
	54.9	22.6	27.7			
	43 15.8	43.0	27.2			
Juli 6.	$18^h 12^m 45^s.5$	$18^h 29^m 16^s.2$	$16^m 30^s.7$	$18^h 16^m 58^s.8$	$18^h 33^m 29^s.7$	$16^m 30^s.9$
	55.7	26.5	30.8	17 8.9	40.0	31.1
	13 16.2	47.1	30.9	18.6	49.5	30.9
	26.0	56.8	30.8	29.9	34 0.9	31.0
	35.9	30 7.0	31.1	39.0	10.1	31.1
	46.2	16.8	30.6	48.9	19.8	30.9
	55.2	26.3	31.1	58.0	29.2	31.2
	14 6.1	37.2	31.1	18 8.6	39.6	31.0
	15.4	36.4	31.0	18.7	49.5	30.8
	25.7	56.6	30.9	28.8	35 0.2	31.4
	35.4	31 6.4	31.0	39.0	10.3	31.3
	45.3	16.5	31.2	48.3	19.4	31.1
	56.3	26.5	30.2	58.5	29.3	30.8
	15 5.8	36.4	30.6	19 8.9	40.1	31.2
	26.2	56.6	30.4	19.1	50.2	31.1
	35.9	32 6.4	30.5	28.6	59.6	31.0
	46.0	16.7	30.7	39.0	36 10.1	31.1
	56.3	26.7	30.4	48.6	19.8	31.2
				58.3	29.6	31.3
				20 9.0	39.9	30.9
				19.1	50.2	31.1
				29.0	60.3	31.3
Juli 14.	$19^h 17^m 0^s.6$	$19^h 32^m 11^s.7$	$15^m 11^s.1$	$19^h 12^m 18^s.3$	$19^h 27^m 30^s.0$	$15^m 11^s.7$
	10.3	21.3	11.0	28.5	40.3	11.8
	20.5	31.6	11.1	38.4	49.7	11.3
	30.6	42.0	11.4	48.6	28 0.3	11.7
	40.7	51.8	11.1	57.9	9.6	11.7
	49.8	33 0.7	10.9	13 8.5	20.0	11.5
	18 0.0	11.0	11.0	28.9	40.4	11.5
	10.6	21.5	10.9	38.0	49.3	11.3

Gehörte Signale.

1865.	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Leipzig	in Wien	Differenz	Gegeben in Wien. Beobachtet in Leipzig	in Wien	Differenz
Juli 14.	$19^h\ 18^m\ 20^s.5$	$19^h\ 33^m\ 31^s.8$	$15^m\ 11^s.3$	$19^h\ 13^m\ 48^s.0$	$19^h\ 28^m\ 59^s.2$	$15^m\ 11^s.2$
	29.9	41.8	11.1	58.5	29 10.4	11.9
	40.0	51.2	11.2	14 8.2	19.6	11.4
	50.3	34 1.1	10.8	17.9	29.2	11.3
	19 0.6	11.7	11.1	28.6	40.5	11.9
	10.4	21.9	11.5	38.1	49.0	11.9
	19.7	31.0	11.3	48.0	59.3	11.3
	30.4	41.7	11.3	58.7	30 9.6	10.9
	40.3	51.8	11.5	15 8.2	19.9	11.7
	50.2	35 1.4	11.2	18.6	30.0	11.4
	20 6.0	11.2	11.2	28.3	40.8	12.5
	10.6	21.7	11.1	37.9	50.0	12.1
				48.0	31 0 7	11.7
Juli 15.	$18^h\ 7^m\ 19^s.6$	$18^h\ 22^m\ 30^s.3$	$15^m\ 10^s.7$	$18^h\ 11^m\ 14^s.0$	$18^h\ 26^m\ 24^s.8$	$15^m\ 10^s.8$
	30.4	41.2	10.8	22.9	34.0	11.1
	40.2	51.4	11.2	12 4.0	27 14.9	10.9
	50.3	23 1.4	11.1	13.3	24.0	10.7
	8 0.2	10.7	10.5	24.0	35.2	11.2
	10.6	21.3	10.7	33.9	45.0	11.1
	20.5	31.2	10.7	43.2	54.6	11.4
	30.3	41.4	11.1	53.9	28 4.9	11.0
	40.4	51.5	11.1	13 3.0	14.2	11.2
	50.3	24 1.3	11.0	14.0	24.8	10.8
	9 0.8	11.5	10.7	23.9	35.1	11.2
	10.5	21.4	10.9	34.0	45.2	11.2
	21.0	31.8	10.8	44.0	55.3	11.3
	30.6	41.7	11.1	53.9	29 5.0	11.1
	40.4	51.3	10.9	14 3.3	14.9	11.6
	50.6	25 1.6	11.0	13.1	25.0	11.9
	10 0.4	11.4	11.0	23.5	34.5	11.0
	10.8	21.5	10.7	33.7	44.3	10.6
	20.0	31.3	11.3			
	30.3	41.5	11.2			
Juli 16.	$18^h\ 31^m\ 30^s.4$	$18^h\ 46^m\ 40^s.8$	$15^m\ 10^s.4$	$18^h\ 23^m\ 20^s.0$	$18^h\ 38^m\ 30^s.1$	$15^m\ 10^s.1$
	50.0	47 0.0	10.0	30.2	40.4	10.2
	32 10.0	20.3	10.3	39.4	49.6	10.2
	20.4	30.5	10.1	49.7	59.4	9.7
	35 30.4	50 40.3	9.9	59.4	39 9.5	10.1
	40.6	50.0	9.4	24 10.0	20.3	10.3
	49.8	59.8	10.0	19.6	29.2	9.6
	36 0.4	51 10.3	9.9	30.0	40.4	10.4
	20.2	30.4	10.2	39.3	49.2	9.9
	30.3	39.8	9.5	49.0	58.9	9.9
	40.0	49.4	9.4	59.8	40 10.0	10.2
	50.0	59.2	9.2	25 9.7	19.9	10.2
	37 0.5	52 10.4	9.9	20.0	29.8	9.8
	9.9	19.9	10.0	39.6	49.4	9.8

Gehörte Signale.

1865	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Leipzig	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Wien	Differenz	Gegeben in Wien. Beobachtet in Leipzig	Gegeben in Wien. Beobachtet in Wien	Differenz
Juli 16.	$18^h\,37^m\,20^s.0$	$18^h\,52^m\,29^s.7$	$15^m\,9^s.7$	$18^h\,25^m\,49^s.7$	$18^h\,40^m\,59^s.8$	$15^m\,10^s.1$
	30.8	40.6	9.8	59.6	41 9.6	10.0
	40.4	50.0	9.6	26 9.5	19.8	10.3
	50.3	53 0.1	9.8	19.3	29.2	9.9
	38 0.1	10.0	9.9	29.9	39.5	9.6
	9.9	19.6	9.7	40.0	49.9	9.9
				49.6	59.9	10.3
Juli 17.				$18^h\,39^m\,0^s.9$	$18^h\,54^m\,10^s.0$	$15^m\,9^s.1$
				11.0	19.9	8.9
				20.8	30.3	9.5
				31.0	39.8	8.8
				40.4	49.5	9.1
				50.3	59.2	8.9
				40 1.2	55 10.0	8.8
				10.9	20.2	9.3
				21.2	30.0	8.8
				31.2	39.8	8.6
				40.5	49.5	9.0
				50.6	59.5	8.9
				41 30.8	56 40.0	9.2
				40.7	49.8	9.1
				51.0	57 0.3	9.3
Juli 18.	$18^h\,54^m\,50^s.4$	$19^h\,9^m\,58^s.2$	$15^m\,7^s.8$	$18^h\,58^m\,51^s.9$	$19^h\,14^m\,0^s.3$	$15^m\,8^s.4$
	55 0.3	10 8.4	8.1	59 1.3	9.4	8.1
	10.0	18.3	8.3	11.9	20.1	8.2
	20.5	28.4	7.9	21.2	29.3	8.1
	30.2	37.9	7.7	31.7	40.2	8.5
	39.9	48.0	8.1	42.0	50.0	8.0
	50.1	57.8	7.7	51.3	59.5	8.2
	56 0.0	11 8.0	8.0	19 0 2.0	15 10.0	8.0
	10.0	18.2	8.2	11.2	19.7	8.5
	20.6	28.6	8.0	21.1	29.1	8.0
	30.7	38.3	7.6	31.4	39.3	7.9
	40.8	48.4	7.6	41.6	49.5	7.9
	50.0	57.9	7.9	51.0	59.6	8.6
	57 0.0	12 7.8	7.8	1 1.9	16 9.7	7.8
	9.9	18.0	8.1	11.8	20.2	8.4
	19.8	27.6	7.8	22.0	30.0	8.0
	30.4	38.2	7.8	32.0	39.9	7.9
	40.6	48.5	7.9	41.2	49.3	8.1
	50.6	57.9	7.3	41.7	59.5	7.8
Juli 19.	$19^h\,18^m\,10^s.4$	$19^h\,33^m\,16^s.5$	$15^m\,6^s.1$	$19^h\,22^m\,33^s.0$	$19^h\,37^m\,39^s.3$	$15^m\,6^s.3$
	20.3	26.6	6.3	42.8	49.1	6.3
	30.2	36.7	6.5	52.0	59.2	7.2
	40.4	46.5	6.1	23 3.4	38 10.1	6.7
	49.8	56.2	6.4	13.8	20.6	6.8

Gehörte Signale.

1865	Gegeben in Leipzig. Beobachtet in Leipzig	in Wien	Differenz	Gegeben in Wien. Beobachtet in Leipzig	in Wien	Differenz
Juli 19.	$19^h\ 18^m\ 59^s.6$	$19^h\ 34^m\ 6^s.0$	$15^m\ 6^s.4$	$19^h\ 23^m\ 23^s.2$	$19^h\ 38^m\ 30^s.0$	$15^m\ 6^s.8$
	19 10.0	16.3	6.3	33.4	40.2	6.8
	20.5	26.7	6.2	42.2	48.9	6.7
	39.2	45.9	6.7	52.0	58.9	6.9
	50.1	56.5	6.4	24 3.0	39 9.3	6.3
	20 0.2	35 6.4	6.2	12.9	19.8	6.9
	9.9	16.3	6.4	23.2	29.7	6.5
	19.8	26.3	6.5	33.0	39.5	6.5
	30.3	36.4	6.1	42.2	49.3	7.1
	40.0	46.4	6.4	52.0	58.1	6.1
	50.3	56.2	5.9	25 2.7	40 8.5	5.8
	21 0.5	36 6.5	6.0	12.9	19.7	6.8
	10.7	16.8	6.1	22.4	28.8	6.4
	20.8	27.1	6.3	32.7	39.2	6.5
	30.6	36.9	6.3	43.0	50.0	7.0
				51.9	58.8	6.9

Resultate aus den Signalen.

1865	Signale von	Leipziger Zeit	Wiener Zeit	Uhrdifferenz	Anzahl der Beobacht.
Juli 4.	L	$19^h\ 41^m.8$	$19^h\ 58^m.3$	$16^m\ 27^s.571$	17
	W	19 37.4	19 53.9	27.900	15
» 5.	L	18 13.3	18 29.8	16 30.778	18
	W	18 35.3	18 51.8	31.077	22
» 14.	L	19 18.6	19 33.8	15 11.155	20
	W	19 14.2	19 29.4	11.605	21
» 15.	L	18 8.9	18 24.1	15 10.925	20
	W	18 13.0	18 28.2	11.117	18
» 16.	L	18 35.0	18 50.2	15 9.835	20
	W	18 25.0	18 40.2	10.024	21
» 17.	W	18 40.2	18 55.2	15 9.020	15
» 18.	L	18 56.3	19 11.4	15 7.874	19
	W	19 0.3	19 15.4	8.126	19
» 19.	L	19 20.0	19 35.1	15 6.280	20
	W	19 24.2	19 39.5	6.633	21

b. *Die Coincidenzen.*

Bei Anwendung dieser Methode wurden durch Einschaltung von Hilfsuhren Secundenschläge nach beiden Stationen gegeben und die Coincidenzen dieser Schläge mit den astronomischen Pendeluhren beobachtet. Aus der Gesammtheit der während der Längenbestimmung beobachteten Coincidenzen hat sich ergeben, dass

128 Secunden der Wiener Hilfsuhr = 127 Sternzeit-Secunden,

also

1 » » » = 0.99219 »

und

109.5 » » Leipziger Hilfsuhr = 108.5 Sternzeit-Secunden,

also

1 » » » » = 0.99087 »

Das Verzeichniss der beobachteten Coincidenzen ist folgendes:

Gehörte Coincidenzen.

1865	Leipziger Uhr		Wiener Uhr	
	in Leipzig	in Wien	in Leipzig	in Wien
Juni 29.	$18^h\ 51^m\ 51^s$	$19^h\ 11^m\ 27^s$	$17^h\ 52^m\ 50^s$	$18^h\ 10^m\ 7^s$
	53 50	13 35	54 46	12 12
	55 45	15 41	59 52	14 17
	57 40	17 48	18 1 48	16 25
	0 0(?)	19 54		18 32
		22 1		20 42
		24 8		
Juli 4.	$19^h\ 22^m\ 43^s$	$19^h\ 38^m\ 26^s$	$19^h\ 11^m\ 7^s$	$19^h\ 24^m\ 36^s$
	24 35	40 16	13 11	26 41
	26 25	42 8	15 17	28 45
	28 10	43 58		30 50
	29 56	45 50		32 57
	31 46	47 36		
			19 57 50	20 13 32
	19 52 24	20 8 17	59 56	15 41
	54 14	10 6	20 2 3	17 47
	56 2	11 54		19 54
Juli 6.	$17^h\ 46^m\ 50^s$	$18^h\ 5^m\ 32^s$	$17^h\ 58^m\ 5^s$	$18^h\ 18^m\ 58^s$
	48 37	7 19	18 0 11	21 6
	50 26	9 11	2 19	23 13
	52 13	10 59	4 24	25 19
	54 1	12 41	6 32	27 26
	55 49		8 35	
			10 40	

Gehörte Coincidenzen.

1865	Leipziger Uhr		Wiener Uhr	
	in Leipzig	in Wien	in Leipzig	in Wien
Juli 6.	$18^h\,35^m\,55^s$	$18^h\,53^m\,2^s$	$18^h\,22^m\,27^s$	$18^h\,39^m\,12^s$
	37 45	54 48	24 34	41 20
	39 33	56 34	26 40	43 27
	41 24	58 23	28 47	45 35
	43 12	19 0 10	30 53	47 42
	45 0	1 58	32 59	49 48
Juli 14.	$19^h\,1^m\,33^s$	$19^h\,16^m\,4^s$	$18^h\,49^m\,25^s$	$19^h\,3^m\,39^s$
	3 22	17 53	51 31	5 46
	5 10	19 42	53 37	7 54
	6 59	21 30	55 44	10 1
	10 34	23 17	57 50	12 8
		25 4		14 14
	19 22 6	19 38 21	19 35 46	19 49 55
	23 56	40 8	37 52	52 4
	25 43	41 58	40 0	54 14
	27 32	43 48	42 4	56 21
	29 22	45 39	44 9	58 28
	31 11			60 33
Juli 15.	$17^h\,43^m\,44^s$	$17^h\,57^m\,39^s$	$17^h\,56^m\,4^s$	$18^h\,9^m\,38^s$
	45 32	59 26	58 8	11 45
	47 20	18 1 15	18 0 14	13 53
	49 8	3 3	2 20	16 0
	50 55	4 53	4 27	18 7
	52 45			20 13
	18 30 50	18 44 43	18 17 4	18 32 50
	32 37	46 31	19 12	34 57
	34 23	48 19	21 17	37 4
	36 12	50 6	23 23	39 12
	38 0	51 54	25 28	41 17
	39 48	53 41	27 34	43 25
Juli 16.	$18^h\,12^m\,29^s$	$18^h\,26^m\,30^s$	$17^h\,43^m\,44^s$	$18^h\,14^m\,43^s$
	14 17	28 14	45 32	16 51
	16 7	30 2	47 20	18 58
	17 54	31 51	49 8	21 4
	19 43	33 38	50 55	23 10
	21 31	35 27	52 45	25 18
	18 41 10	18 55 7	18 30 50	19 6 8
	42 57	56 56	32 37	8 15
	44 48	58 43	34 23	10 21
	46 36	19 0 29	36 12	12 26
	48 25	2 17	38 0	14 33
		4 5	39 48	16 38

Gehörte Coincidenzen.

1865	Leipziger Uhr in Leipzig	Leipziger Uhr in Wien	Wiener Uhr in Leipzig	Wiener Uhr in Wien
Juli 17.	$17^h\ 51^m\ 30^s$	$18^h\ 8^m\ 55^s$	$18^h\ 4^m\ 58^s$	$18^h\ 22^m\ 38^s$
	53 20	10 38	7 5	24 45
	55 8		9 10	26 53
	56 56		11 17	28 59
	58 46		13 23	31 4
	18 0 38		15 28	33 11
			17 32	
	18 22 37	18 36 6		
	24 23	39 55	18 56 51	19 12 16
	26 11	41 42	58 54	14 23
	27 59	43 34	19 1 0	16 30
	29 50	45 24	3 8	18 37
	31 38	47 13	5 13	20 44
			7 16	22 50
	18 44 25	19 0 47		
	46 14	2 40		
	48 2	4 32		
	49 51	6 18		
	51 38	8 9		
	53 28	(+ 1^m?)		
Juli 18.	$17^h\ 38^m\ 45^s$		$18^h\ 40^m\ 43^s$	$18^h\ 58^m\ 18^s$
	40 33		42 47	19 0 23
	42 20		44 46	2 30
	44 9		46 54	4 36
	45 57		48 58	6 43
	47 46			
	49 35		19 5 59	19 19 24
			8 1	21 34
	18 29 55	$18^h\ 43^m\ 45^s$		23 38
	31 45	45 33		
	33 35	47 24		
	35 23	49 13		
	37 13	51 2		
	19 16 58	19 28 48		
	18 47	30 37		
	20 33	32 25		
		34 13		
Juli 19.	$18^h\ 52^m\ 46^s$	$19^h\ 9^m\ 32^s$	$19^h\ 8^m\ 8^s$	$19^h\ 22^m\ 49^s$
	54 34	11 21	10 11	— —
	56 24	13 10	12 17	27 2
	58 12		14 25	29 8
	60 0		16 30	31 13
	19 37 30	19 52 15	19 28 8	19 42 28
	39 16	54 3	30 16	44 53
	41 5	55 52	32 20	47 0
	42 54	57 42	34 26	49 5
	44 41	59 31	36 33	51 12
	46 30	20 1 19		

Die Berechnung der Coincidenzen ist in gleicher Weise erfolgt, wie bei der Längenbestimmung Berlin-Wien. Ausgegangen wurde von einem genäherten, auf ganze Secunden abgerundeten Werthe der Uhrdifferenzen und aus je zwei einander entsprechenden Coincidenzen beider Stationen die Verbesserung dieses Werthes abgeleitet. Als Beispiel diene die Berechnung der Coincidenzen für Juli 4.

Juli 4.

Annahme der Uhrdifferenz $16^m\ 28^s.0 - x$.

Leipziger Hilfsuhr

Coincidenzen in Wien: Wiener Uhrzeit beobachtet	Coincidenzen in Wien: Leipz. Uhrzeit	in Leipzig: Leipz. Uhrzeit beobachtet
Erste Reihe		
$19^h 38^m 26^s =$	$19^h 21^m 58^s + x$	$19^h\ 22^m\ 43^s$
40 16 =	23 48 $+x$	24 35
42 8 =	25 40 $+x$	26 25
43 58 =	27 30 $+x$	28 10
45 50 =	29 22 $+x$	29 56
47 36 =	31 8 $+x$	31 46
Mittel	19 26 34.3 $+x$	19 27 15.8

Daher mit obigen Werthen der Secunde der Hilfsuhr

$41^s.5 = 41^s.5 - x \quad x = 0^s.379$

Coincidenzen in Wien: Wiener Uhrzeit beobachtet	Coincidenzen in Wien: Leipz. Uhrzeit	in Leipzig: Leipz. Uhrzeit beobachtet
Zweite Reihe		
$20^h\ 8^m 17^s =$	$19^h 51^m 49^s + x$	$19^h\ 52^m\ 24^s$
10 6 =	53 38 $+x$	54 14
11 54 =	55 26 $+x$	56 2
Mittel	19 53 37.7 $+x$	19 54 13.3

daher

$35^s.6 = 34^s.6 - x \quad x = 0^s.326$

Wiener Hilfsuhr

Coincidenzen in Wien: Wiener Uhrzeit beobachtet	Coincidenzen in Wien: Leipz. Uhrzeit	in Leipzig: Leipz. Uhrzeit beobachtet
Erste Reihe		
$19^h 24^m 36^s =$	$19^h\ 8^m\ 8^s + x$	
26 41 =	10 13 $+x$	$19^h\ 11^m\ 7^s$
28 45 =	12 17 $+x$	13 11
30 50 =	14 22 $+x$	15 17
32 57 =	16 29 $+x$	
Mittel	19 12 17.6 $+x$	19 13 11.6

Daher mit obigen Werthen der Secunde der Hilfsuhr

$54^s.0 = 54^s.0 - x \quad x = 0^s.421$

Coincidenzen in Wien: Wiener Uhrzeit beobachtet	Coincidenzen in Wien: Leipz. Uhrzeit	in Leipzig: Leipz. Uhrzeit beobachtet
Zweite Reihe.		
$20^h 13^m 32^s =$	$19^h\ 57^m\ 4^s + x$	$19^h\ 57^m\ 50^s$
15 41 =	19 59 13 $+x$	59 56
17 47 =	20 1 20 $+x$	20 2 3
19 54 =	20 3 26 $+x$	
Mittel	20 0 15.6 $+x$	19 59 56.3

daher

$19^s.3 = 19^s.3 + (x - \frac{1}{2}) \quad x = 0^s.35$

Anm. Bei der letzten Reihe kommt $\frac{1}{2}$ zu x hinzu, weil einmal 4, das andere Mal 3 Coincidenzen beobachtet sind.

Die auf solche Weise erhaltenen Resultate aus den Coincidenzen sind in folgender Tabelle gegeben:

Resultate aus den Coincidenzen.

1865	Coincid. von	Leipziger Zeit	Wiener Zeit	Uhr-Differenz	Gewicht	Leipziger Zeit	Wiener Zeit	Uhr-Differenz	Bemerkungen
Juni 29.	W.	$17^h\ 57^m.3$	$18^h\ 13^m.9$	$16^m\ 38^s.668$	9.60	$17^h\ 57^m.3$	$18^h\ 13^m.9$	$16^m\ 38^s.668$	aus W. Uhr
	L.	18 55.8	19 12.4	38.945	11.67	18 55.8	19 12.4	38.945	» L. »
Juli 4.	L.	19 27.3	19 43.8	16 27.621	12.00	19 51.4	20 7.9	16 27.613	» W. »
	W.	19 28.8	19 45.3	27.579	7.50				
	L.	19 54.2	20 10.7	27.674	6.00	19 36.3	19 52.8	27.639	» L. »
	W.	20 16.1	20 32.6	27.650	6.86				
» 6.	L.	17 51.3	18 7.8	16 31.213	10.91	18 15.0	18 31.5	16 31.244	» L. »
	W.	18 4.4	18 20.9	31.076	11.67				
	W.	18 27.7	18 44.2	31.128	12.00	18 15.0	18 31.5	31.102	» W. »
	L.	18 40.5	18 57.1	31.274	12.00				
» 14.	W.	18 53.6	19 8.8	15 11.567	10.91	19 16.5	19 31.7	15 11.560	» W. »
	L.	19 6.1	19 21.3	11.623	12.00				
	L.	19 26.6	19 41.8	11.582	10.91	19 16.5	19 31.7	11.611	» L. »
	W.	19 40.0	19 55.2	11.553	10.91				
» 15.	L.	17 48.2	18 3.4	15 11.301	10.91	18 13.6	18 28.8	15 11.294	» L. »
	W.	18 0.2	18 15.4	11.265	10.91				
	W.	18 22.3	18 37.5	11.288	12.00	18 11.3	18 26.5	11.284	» W. »
	L.	18 35.3	18 50.5	11.288	12.00				
» 16.	W.	18 5.3	18 20.5	15 10.303	10.91	18 30.5	18 45.7	15 10.275	» W. »
	L.	18 17.0	18 32.2	10.323	12.00				
	L.	18 44.8	19 0.0	10.302	10.91	18 31.7	18 46.9	10.312	» L. »
	W.	18 55.7	19 10.9	10.246	12.00				
» 17.	L.	17 56.0	18 11.2	15 9.210	6.00				
	W.	18 5.3	18 20.5	9.206	12.92	18 5.8	18 19.0	15 9.181	» W. »
	L.	18 27.1	18 42.3	9.217	12.00				
	L.	18 48.9	19 4.1	9.167	10.91	18 24.0	18 39.2	9.253	» L. »
	W.	19 2.1	19 17.3	9.157	12.00				
» 18.	L.	18 18.6	18 33.7	15 8.271	10.00	18 58.0	19 13.1	15 8.224	» L. »
	W.	18 44.8	18 59.9	8.198	10.00				
	W.	19 7.0	19 22.1	8.207	4.80	18 55.0	19 10.1	8.208	» W. »
	L.	19 18.8	19 33.9	8.178	6.86				
» 19.	L.	18 56.4	19 11.5	15 6.916	7.50	19 19.3	19 34.4	15 6.870	» L. »
	W.	19 12.3	19 27.4	6.815	8.89				
	W.	19 32.3	19 47.4	6.781	10.00	19 22.3	19 37.4	6.673	» W. »
	L.	19 42.0	19 57.1	6.824	12.00				

Aus den Uhrdifferenzen sieht man, dass zwischen Juli 6 und 14 der Uhrstand sich geändert hat, am 1. Juli wurde das Pendel der Hauptuhr in Wien um zwei Theilstriche verlängert. Die Aenderung der Uhrdifferenz (Differenz der Uhrgänge in Leipzig und Wien) ist aus Juli 4 und 6 abgeleitet und derselbe Gang für Juni 29 als

nahe übereinstimmend angenommen, von Juli 14—19 ist er täglich aus den Differenzen interpolirt. Angenommen wurde:

1865	Stündl. Aenderung der Diff. der Uhrgänge	1865	Stündl. Aenderung der Diff. der Uhrgänge
Juni 29.	+0.076	Juli 16.	−0.044
Juli 4	+0.076	» 17.	−0.050
» 6.	+0.076	» 18.	−0.056
» 14.	−0.010	» 19.	−0.062
» 15.	−0.027		

Damit wurden die Coincidenzen und Signale alle auf ein und dieselbe Zeit reducirt und alsdann die Stromzeit und die Differenz zwischen den Signalen und Coincidenzen abgeleitet. Die Resultate sind:

1865	Zeit	Aus den Coincidenzen					
		Leipziger Uhr	Gewicht	Wiener Uhr	Gewicht	Doppelte Stromzeit	Gewicht
Juni 29.	17h	16m 38s.802		16m 38s.592		0s.210	
Juli 4.	20	16 27.669	18.00	16 27.644	14.40	0.025	32.40
» 6.	18	16 31.223	23.91	16 31.083	23.67	0.140	47.58
» 14.	20	15 11.594	22.91	15 11.553	21.82	0.041	44.73
» 15.	18	15 11.299	22.91	15 11.283	22.91	0.016	45.82
» 16.	19	15 10.291	22.91	15 10.252	22.91	0.039	45.82
» 17.	19	15 9.171	28.91	15 9.162	24.92	0.009	53.83
» 18.	19	15 8.224	16.86	15 8.194	14.80	0.030	31.66
» 19.	19	15 6.895	19.50	15 6.821	18.89	0.074	38.39
			Doppelte Stromzeit im Mittel = 0s.065				

1865	Zeit	Aus den Signalen						Differenz zwischen Coincidenzen u. Signalen
		Leipziger Uhr	Gewicht	Wiener Uhr	Gewicht	Doppelte Stromzeit	Gewicht	
Juni 29.	17h							
Juli 4.	20	16m 27s.593	17	16m 27s.929	15	0s.336	32	+0s.106
» 6.	18	16 30.761	18	16 31.032	22	0.271	40	−0.256
» 14.	20	15 11.155	20	15 11.613	21	0.458	41	−0.190
» 15.	18	15 10.921	20	15 11.111	18	0.190	38	−0.275
» 16.	19	15 9.853	20	15 10.050	21	0.197	41	−0.320
» 17.	19			15 9.037	15			
» 18.	19	15 7.878	19	15 8.126	19	0.248	38	−0.202
» 19.	19	15 6.249	20	15 6.608	21	0.359	41	−0.430
		Doppelte Stromzeit im Mittel = 0s.294						−0s.224

Die grosse Differenz der doppelten Stromzeit, abgeleitet aus den Coincidenzen und Signalen, erklärt sich aus der persönlichen Gleichung bei den letztern, die aus der Differenz der Stromzeiten 0ˢ229 mit dem in der letzten Columne gefundenen Werthe fast absolut übereinstimmt. [1])

Zur Reduction der Längendifferenz wurden, da bei Auffassung der Coincidenzen [2]) sich äusserst kleine persönliche Differenz ergab, die Uhrvergleichungen nur aus den Coincidenzen entnommen und dafür mit Eliminirung der Stromzeit folgende Tafel entworfen:

1) Ueber die Gleichheit der Relais wurden vor und nach der Längenbestimmung Juni 23 und August 10 und 11 Versuche angestellt. Die Dauer der Coincidenzen war bei verschieden starken Strömen mit 8, 40 und 60 Meidinger'schen Elementen und bei Widerständen von 100 bis zu 1100 Siemens'schen Quecksilbereinheiten, die zwischen verschiedenen Reihen von Coincidenzen öfter gewechselt und eingeschaltet wurden, so nahe gleich, dass die kleinen abwechselnd positiven und negativen vorhandenen Differenzen einzig und allein Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden müssen.

2) Am 2. und 3. Juni wurden in Leipzig von Prof. Weiss und mir zur Bestimmung der persönlichen Gleichung Coincidenzbestimmungen angestellt. Es fand sich in der Auffassung der Coincidenz

Juni 2. B — W: —0ˢ2 aus 13 Coincidenzen,
» 3. B — W: —0.6 » 19 »

und da nach je 109 Secunden eine Coincidenz stattfand, ist

Juni 2. die persönliche Gleichung in den Coincidenzen B — W: —0ˢ002
» 3. —0.006

also verschwindend klein.

Bei den Signalen fand sich eine sehr veränderliche persönliche Gleichung. Es wurden Juni 2 10 Sätze, Juni 3 5 Sätze, jeder Satz zu 10 Signalen, beobachtet. Die Signale wurden ganz ebenso gegeben wie während der Längenbestimmung, jeder Beobachter notirte die von ihm beobachtete Zeit und es fand sich

Juni 2.				Juni 3.	
	B — W		B — W		B — W
Satz I.	—0ˢ01	Satz V.	+0ˢ04	Satz I.	—0ˢ06
» II.	+0.11	» VI.	0.00	» II.	—0.20
» III.	+0.04	» VII.	—0.01	» III.	—0.17
» IV.	+0.18	» VIII.	+0.02	» IV.	—0.08
		» IX.	+0.34	» V.	+0.09
		» X.	—0.02		
Mittel.	+0ˢ080		+0ˢ062		—0ˢ022

Obwohl Juni 3 unter weniger günstigen Umständen beobachtet, als Juni 2, genügen doch diese Zahlen, die Unsicherheit der gehörten Signalbeobachtungen zu zeigen und die alleinige Benutzung der Coincidenzen zu rechtfertigen.

Differenzen der Leipziger und Wiener Uhr.

1865	16h	17h	18h	19h	20h	21h
Juni 29.	16m 38s.621	16m 38s.697	16m 38s.773	16m 38s.849	16m 38s.925	16m 39s.001
Juli 4.	27.353	27.429	27.505	27.581	27.657	27.733
6.	31.001	31.077	31.153	31.229	31.305	31.381
14.	15 11.614	15 11.604	15 11.594	15 11.584	15 11.574	15 11.564
15.	11.345	11.318	11.291	11.264	11.237	11.210
16.	10.404	10.360	10.316	10.272	10.228	10.184
17.	9.316	9.266	9.216	9.166	9.116	9.066
18.	8.377	8.321	8.265	8.209	8.153	8.097
19.	7.044	6.982	6.920	6.858	6.796	6.734

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.

1865	Namen der Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
Juni 29.		Kr. West			
	B. A. C. 5271	15h 48m 20s.14	3	+0s.45	20s.59
		Kr. Ost			
	δ Ophiuchi	16 7 37.54	8	+0.13	37.67
	Radcliffe 3525	12 28.87	7	+0.05	28.92
	B. A. C. 5463	16 1.54	9	+0.02	1.56
	,, 5490	19 31.89	8	+0.11	32.00
	,, 5523	24 32.94	9	+0.02	32.96
	ζ Herculis	36 32.47	9	+0.13	32.60
	B. A. C. 5692	47 58.20	8	+0.17	58.37
			5		
		Kr. West			
Juli 4.	Radcl. 3525	16 12 43.61	9	−0.03	43.58
	B. A. C. 5463	16 15.99	9	0.00	15.99
	,, 5490	19 46.65	5	−0.13	46.52
	ζ Herculis	36 47.29	9	+0.18	47.47
	B. A. C. 5621	39 56.79	8	−0.14	56.65
	,, 5644	43 36.06	6	−0.02	36.04
	,, 5692	48 13.02	8	−0.07	12.95
	κ Ophiuchi	51 12.42	8	−0.06	12.36

IV. Die Beobachtungen.

In dem folgenden Verzeichniss der Beobachtungen sind die einzelnen Columnen durch ihre Ueberschriften erklärt. Die Beobachtungen in Wien und Leipzig stehen neben einander Columne 1 enthält das Datum, Col. 2 die Namen der beobachteten Sterne, Col. 3 und 7 Kreislage und Durchgangszeit des Sterns durch den Mittelfaden in Wien und in Leipzig, Col. 4 und 8 die Anzahl der beobachteten Fäden, Col. 5 und 9 die Instrumentalcorrectionen, Col. 6 und 10 den Durchgang des Sterns durch den Meridian, Col. 11 die Differenz der Uhrcorrectionen, endlich Col. 12 die Längendifferenz abgeleitet aus der Differenz der Uhrcorrectionen und den auf der vorigen Seite gegebenen absoluten Differenzen der Uhrzeiten.

Es sind nur die Sterne aufgenommen, die an jedem Abend auf beiden Stationen beobachtet sind, die einseitig beobachteten sind fortgelassen. Die Beobachtungen der Polsterne sind schon bei der Ableitung der Instrumentalfehler aufgeführt und hier daher nicht wiedergegeben.

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correct. des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhr-correct.	Längen-differenz
Kr. West					
$15^h\ 47^m\ 44^s.60$	9	$+0^s.06$	$44^s.66$	$35^s.93$	$16^m\ 2^s.65$
Kr. Ost					
16 7 1.16	9	+0.22	1.38	36.29	16 2.34
11 51.63	9	+0.81	52.44	36.48	2.16
15 24.28	9	+0.96	25.24	36.32	2.32
18 55.41	9	+0.40	55.81	36.19	2.45
23 55.83	9	+0.86	56.69	36.27	2.38
35 54.64	4	+0.64	55.28	36.32	2.33
47 21.47	6	+0.34	21.81	36.56	2.12
Kr. West					
16 12 18.99	9	−0.49	18.50	25.08	16 2.29
15 51.70	9	−0.51	51.19	24.80	2.58
19 22.16	9	−0.48	21.68	24.84	2.54
36 22.62	9	−0.48	22.14	25.33	2.06
39 32.38	9	−0.49	31.89	24.76	2.64
43 11.41	9	−0.52	10.89	25.15	2.25
47 48.49	9	−0.49	48.00	24.95	2.46
51 27.78	9	−0.50	27.28	25.08	2.33

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.

1865	Namen er Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
Juli 4. (Forts.)		Kr. Ost			
	α Herculis	17ʰ 9ᵐ 5ˢ57	9	−0ˢ33	5ˢ24
	B. A. C. 5841	12 52.35	9	−0.33	52.02
	» 5871	17 8.30	7	−0.40	7.90
	» 5894	20 24.32	7	−0.32	24.00
	» 5911	23 45.63	5	−0.41	45.22
	β Draconis	28 59.03	8	−0.04	58.99
Juli 6.		Kr. Ost			
	B. A. C. 5181	15 35 17.45	7	−0.62	16.83
	α Serpentis	38 17.49	8	−0.42	17.07
	B. A. C. 5245	44 45.77	9	−0.42	45.35
	» 5271	48 40.54	9	−0.58	39.96
		Kr. West			
	δ Ophiuchi	16 8 56.52	9	+0.03	56.55
	B. A. C. 5463	16 20.50	9	−0.02	20.48
	» 5523	24 51.99	9	−0.03	51.96
	ζ Herculis	36 51.59	9	−0.04	51.55
	B. A. C. 5621	40 1.28	9	−0.03	1.25
	» 5644	43 40.41	9	−0.01	40.40
	» 5692	48 17.71	7	−0.04	17.67
	ϰ Ophiuchi	51 57.03	8	−0.03	57.00
		Kr. Ost			
	α Herculis	17 9 10.30	9	−0.41	9.89
	B. A. C. 5841	12 57.04	8	−0ˢ40	56.64
	» 5871	17 13.00	9	−0.60	12.40
	» 5894	20 8.82	7	−0.42	8.40
	» 5911	23 50.20	9	−0.61	49.59
	β Draconis	28 3.68	9	−0.66	3.02
	δ Aquilae	19 19 22.72	7	−0.36	22.36
	B. A. C. 6697	26 59.48	9	−0.61	58.87
	» 6717	30 40.13	9	−0.63	39.50
	» 6729	33 13.13	6	−0.40	12.73
	» 6745	35 44.31	7	−0.54	43.77
		Kr. West			
	B. A. C. 6928	20 3 21.60	9	−0.03	21.57
	» 6952	8 42.68	9	−0.01	42.67
	α_2 Capricorni	11 14.74	7	+0.10	14.84
	B. A. C. 6996	14 0.87	5	−0.02	0.85
	» 7014	16 10.19	8	+0.05	10.24
	» 7046	22 1.46	7	+0.07	1.53
Juli 14.		Kr. West			
	α Serpentis	15 37 1.27	9	+0.27	1.54
	B. A. C. 5214	39 17.73	6	+0.28	18.01
	» 5245	43 29.63	9	+0.27	29.90
	» 5271	47 23.83	9	+0.48	24.31

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhrcorrect.	Längen-differenz
Kr. Ost					
17ʰ 8ᵐ 39ˢ99	9	+0ˢ24	40ˢ23	25ˢ01	16ᵐ 2ˢ43
12 26.50	9	+0.22	26.72	25.30	2.14
16 42.02	9	+0.51	42.53	25.37	2.08
19 58.49	8	+0.21	58.70	25.30	2.15
23 19.42	9	+0.57	19.99	25.23	2.23
28 33.09	9	+0.65	33.74	25.25	2.21
Kr. Ost					
15 34 47.48	8	+0.47	47.95	28.88	16 2.09
37 48.25	9	+0.27	48.52	28.55	2.42
44 16.16	9	+0.26	16.42	28.93	2.05
48 10.60	9	+0.46	11.06	28.90	2.09
Kr. West					
16 7 28.45	9	−0.50	27.95	28.60	16 2.44
15 52.58	9	−0.59	51.99	28.49	2.53
24 24.15	9	−0.55	23.60	28.36	2.67
36 23.42	8	−0.53	22.89	28.66	2.38
39 33.17	9	−0.51	32.66	28.59	2.46
43 12.21	9	−0.59	11.62	28.78	2.27
47 49.26	9	−0.52	48.74	28.93	2.13
51 28.67	9	−0.54	28.13	28.87	2.20
Kr. Ost					
17 8 40.76	9	+0.28	41.08	28.81	16 2.28
12 27.18	9	+0.31	27.49	29.15	1.95
16 42.73	9	+0.59	43.32	29.08	2.02
19 59.23	9	+0.30	59.53	28.87	2.23
23 19.99	9	+0.64	20.63	28.96	2.15
28 33.28	10	+0.72	34.00	29.02	2.09
19 18 53.20	9	+0.30	53.50	28.86	2.39
26 29.22	9	+0.79	30.01	28.86	2.40
30 9.63	9	+0.73	10.36	29.14	2.13
32 43.32	9	+0.30	43.62	29.11	2.16
35 14.14	9	+0.63	14.77	29.00	2.27
Kr. West					
20 2 53.50	9	−0.82	52.68	28.89	16 2.42
8 14.38	9	−0.71	13.67	29.00	2.32
10 46.40	9	−0.81	45.59	29.25	2.07
13 32.83	9	−0.76	32.07	28.78	2.54
16 41.88	8	−0.74	41.14	29.10	2.22
21 33.22	9	−0.76	32.46	29.07	2.25
Kr. West					
15 37 53.17	9	−0.51	52.66	51.12	16 2.74
40 9.29	9	−0.52	8.77	50.76	2.38
44 21.17	9	−0.53	20.64	50.74	2.36
48 15.58	9	−0.49	15.09	50.78	2.40

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.

1865	Namen der Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfäden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
Juli 14.		Kr. Ost			
(Forts.)	δ Ophiuchi	16ʰ 6ᵐ 41ˢ25	9	+0ˢ10	41ˢ35
	Radcliffe 3525	11 32.19	9	+0.24	32.43
	B. A. C. 5463	15 4.85	9	+0.28	5.13
	» 5490	18 35.70	8	+0.15	35.85
	ζ Herculis	35 36.23	3	+0.22	56.45
		Kr. West			
	δ Aquilae	19 18 6.44	9	+0.33	6.77
	B. A. C. 6697	25 42.83	8	+0.57	43.40
Juli 15.		Kr. Ost			
	B. A. C. 5245	15 43 30.17	9	+0.13	30.30
	» 5271	47 24.50	9	+0.23	24.73
		Kr. West			
	δ Ophiuchi	16 6 41.23	9	+0.32	41.55
	Radcl. 3525	11 32.34	8	+0.52	32.86
	B. A. C. 5463	15 4.88	9	+0.57	5.45
	» 5490	18 35.75	9	+0.38	36.13
	» 5523	23 36.51	9	+0.53	37.04
	ζ Herculis	35 35.90	3	+0.48	36.38
	B. A. C. 5621	38 45.92	9	+0.38	46.30
	» 5644	42 24.74	8	+0.54	25.28
	» 5692	46 2.04	9	+0.39	2.43
	κ Ophiuchi	50 41.56	8	+0.39	41.95
		Kr. Ost			
	α Herculis	17 7 54.36	9	+0.16	54.52
	B. A. C. 5841	11 41.19	9	+0.16	41.35
	» 5871	15 56.88	9	+0.26	57.14
	» 5894	19 13.14	8	+0.15	13.29
	« 5911	22 34.09	6	+0.25	34.34
	β Draconis	26 47.52	9	+0.27	47.79
	B. A. C. 6717	19 29 23.85	9	+0.26	24.11
	» 6729	31 57.20	8	+0.19	57.39
	» 6745	34 29.10	8	+0.28	29.38
		Kr. West			
	B. A. C. 6928	20 2 5.53	9	+0.62	6.15
	» 6952	7 25.82	9	+0.44	26.26
	α_2 Capricorni	9 58.92	8	+0.39	59.31
	B. A. C. 6996	12 45.22	9	+0.54	45.76
	» 7014	15 54.46	9	+0.43	54.89
	» 7046	20 45.78	9	+0.41	46.19
Juli 16.		Kr. West			
	B. A. C. 5214	15 39 18.02	9	+0.03	18.05
	» 5245	43 29.79	7	+0.00	29.79
	» 5271	47 24.28	9	+0.11	24.39

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhrcorect.	Längen-differenz
Kr. Ost					
16h 7m 31s.76	9	+0s.26	32s.02	50s.67	16m 2s.28
12 22.75	9	+0.54	23.29	50.86	2.47
15 55.27	9	+0s.66	55.93	50.80	2.41
19 26.43	9	+0.30	26.73	50.88	2.49
36 26.39	4	+0.45	26.84	50.39	2.00
Kr. West					
19 18 58.06	3	−0.73	57.33	50.56	16 2.14
26 34.88	6	−0.72	34.16	50.76	2.34
Kr. Ost					
15 44 21.17	9	+0.33	21.50	51.20	16 2.55
48 15.09	9	+0.65	15.74	51.01	2.36
Kr. West					
16 7 33.21	9	−0.62	32.59	51.04	16 2.38
12 24.44	9	−0.62	23.82	50.96	2.30
15 57.26	9	−0.62	56.64	51.19	2.53
19 27.78	9	−0.59	27.19	51.06	2.40
24 28.41	9	−0.60	27.81	50.77	2.11
36 28.37	9	−0.60	27.77	51.39	2.72
39 38.00	9	−0.61	37.39	51.09	2.42
43 17.12	9	−0.63	16.49	51.21	2.54
47 54.17	9	−0.62	53.55	51.12	2.45
51 33.28	9	−0.63	32.65	70.70	2.02
Kr. Ost					
17 8 45.43	9	+0.38	45.81	51.29	16 2.61
12 31.92	9	+0.37	32.29	50.94	2.26
16 47.38	9	+0.78	48.16	51.02	2.33
20 3.80	9	+0.35	4.15	50.86	2.17
23 24.71	9	+0.86	25.57	51.23	2.54
27 38.21	8	+0.95	39.16	51.37	2.68
19 30 14.27	9	+0.96	15.23	51.12	2.37
32 48.02	9	+0.38	48.40	51.01	2.26
35 18.49	9	+0.81	19.30	50.92	2.17
Kr. West					
20 2 58.06	9	−0.86	57.20	51.05	16 2.29
8 18.20	9	−0.82	17.38	51.12	2.36
10 51.32	9	−0.93	50.39	51.08	2.32
13 37.87	9	−0.81	37.06	51.30	2.54
16 46.94	9	−0.85	46.09	51.20	2.44
21 38.45	9	−0.89	37.56	51.37	2.60
Kr. Ost					
15 40 10.43	9	−0.57	9.86	51.81	16 2.23
44 22.32	9	−0.57	21.75	51.96	2.38
48 16.96	9	−0.64	16.32	51.93	2.35

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.

1865	Namen der Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
Juli 16.		Kr. Ost			
(Forts.)	δ Ophiuchi	16h 6m 11s.50	8	−0.24	11s.26
	Radcl. 3525	11 32.85	9	−0.24	32.61
	B. A. C. 5463	15 5.34	9	−0.25	5.09
	» 5490	18 36.06	8	−0.23	35.83
	» 5523	23 37.05	9	−0.25	36.80
	ζ Herculis	35 36.44	7	−0.25	36.19
	B. A. C. 5621	38 46.10	8	−0.23	45.87
	» 5692	47 2.24	9	−0.23	2.01
	ϰ Ophiuchi	50 11.67	9	−0.24	11.43
		Kr. West			
	α Herculis	17 7 54.31	9	+0.04	54.35
	B. A. C. 5841	11 41.10	8	+0.05	41.15
	» 5871	15 56.64	9	+0.15	56.79
	» 5894	19 12.88	9	+0.05	12.93
	» 5911	22 33.94	9	+0.15	34.09
	β Draconis	26 47.32	9	+0.18	47.50
	δ Aquilae	19 18 6.61	4	+0.23	6.84
	B. A. C. 6697	25 53.16	4	+0.17	53.33
	» 6717	29 23.61	9	+0.15	23.76
	» 6729	31 57.05	7	+0.07	57.12
	» 6745	34 27.78	7	+0.13	27.91
		Kr. Ost			
	B. A. C. 6928	20 2 6.09	9	−0.27	5.82
	» 6952	7 27.22	7	−0.19	27.03
	α_2 Capricorni	9 59.38	9	−0.07	59.31
	B. A. C. 6996	13 45.63	9	−0.22	45.41
	» 7014	15 54.76	6	−0.18	54.58
	» 7046	20 46.25	8	−0.18	46.07
Juli 17.		Kr. Ost			
	α Serpentis	15 37 1.53	7	−0.25	1.28
	B. A. C. 5214	39 17.96	7	−0.25	17.71
	» 5245	43 29.76	9	−0.26	29.50
	» 5271	47 24.16	9	−0.23	23.93
		Kr. West			
	δ Ophiuchi	16 6 40.73	9	+0.02	40.75
	Radcl. 3525	11 31.90	9	+0.11	32.01
	B. A. C. 5463	15 4.48	9	+0.15	4.63
	» 5490	18 35.37	9	+0.04	35.41
	» 5523	23 36.12	6	+0.12	36.24
	ζ Herculis	35 35.84	9	+0.08	35.92
	B. A. C. 5621	38 45.55	8	+0.03	45.58
	» 5644	42 24.43	9	+0.12	24.55
	» 5692	47 1.62	7	+0.03	1.65
	ϰ Ophiuchi	50 11.13	9	+0.03	11.16

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhrcorrect.	Längen-differenz
Kr. Ost					
16^h 7^m $32^s.70$	9	$+0^s.45$	33.15	51.89	16^m $2^s.29$
12 23.72	9	+0.74	24.46	51.85	2.25
15 55.99	9	+0.86	56.85	51.76	2.16
19 27.23	9	+0.49	27.72	51.89	2.28
24 27.76	9	+0.79	28.55	51.75	2.24
36 27.36	9	+0.61	27.97	51.78	2.17
39 37.36	9	+0.47	37.8[illegible]	51.96	2.34
47 53.44	6	+0.47	53.91	51.90	2.27
51 32.99	9	+0.47	33.46	52.03	2.40
Kr. West					
17 8 47.11	8	−0.64	46.47	52.12	16 2.48
12 34.13	9	−0.65	33.48	52.33	2.68
16 49.91	8	−0.76	49.15	52.36	2.71
20 6.07	9	−0.66	5.41	52.48	2.83
23 27.05	9	−0.79	26.26	52.17	2.51
27 40.47	9	−0.82	39.65	52.15	2.49
19 18 59.70	9	−0.79	58.91	52.07	2.33
26 36.18	9	−0.90	35.28	51.95	2.21
30 16.79	9	−0.89	15.90	52.14	2.39
32 50.08	9	−0.83	49.25	52.13	2.38
35 20.77	9	−0.89	19.88	51.97	2.22
Kr. Ost					
20 2 56.93	9	+1.23	58.16	52.34	16 2.57
8 18.34	9	+0.56	18.90	51.87	2.10
10 50.56	9	+0.42	50.98	51.67	1.90
13 36.58	9	+0.90	37.48	52.07	2.29
16 46.06	9	+0.50	46.56	51.98	2.20
21 37.50	9	+0.46	37.96	51.89	2.11
Kr. West					
15 37 53.89	9	+0.46	54.35	53.07	16 2.40
40 10.17	5	+0.47	10.64	52.93	2.26
44 21.85	1	+0.46	22.31	52.81	2.14
48 16.07	9	+0.71	16.78	52.85	2.17
Kr. Ost					
16 7 34.72	9	−0.69	34.03	53.28	16 2.59
12 25.80	9	−0.70	25.10	53.09	2.39
15 58.20	9	−0.76	57.44	52.81	2.11
19 29.12	9	−0.66	28.46	53.05	2.35
24 29.82	9	−0.72	29.10	52.86	2.16
36 29.52	9	−0.69	28.83	52.91	2.20
39 39.21	9	−0.69	38.52	52.94	2.22
43 18.49	9	−0.75	17.74	53.19	2.47
47 55.32	9	−0.69	54.63	52.98	2.26
51 34.73	9	−0.71	34.02	52.86	2.13

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.					
1865	Namen der Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
Juli 17.		Kr. Ost			
(Forts.)	α Herculis	17h 7m 54s.12	8	−0s.23	53s.89
	B. A. C. 5841	11 40.92	9	−0.22	40.70
	» 5871	15 56.53	8	−0.22	56.31
	» 5894	19 12.96	9	−0.22	12.74
	» 5911	22 33.82	9	−0.24	33.58
	β Draconis	26 47.24	9	−0.24	47.00
	δ Aquilae	19 18 6.44	9	−0.18	6.26
	B. A. C. 6697	25 43.14	9	−0.25	42.89
	» 6717	29 23.61	9	−0.24	23.37
	» 6729	31 56.84	6	−0.19	56.65
	» 6745	34 27.83	7	−0.22	27.61
		Kr. West			
	B. A. C. 6952	20 7 26.62	8	+0.09	26.71
	α₂ Capricorni	9 58.68	8	+0.09	58.77
	B. A. C. 6996	12 44.72	9	+0.15	44.87
	» 7014	15 53.99	8	+0.09	54.08
	» 7046	20 45.42	7	+0.09	45.51
Juli 18.		Kr. West			
	B. A. C. 5245	15 43 29.22	7	+0.08	29.30
	» 5271	47 23.48	9	+0.24	23.72
		Kr. Ost			
	δ Ophiuchi	16 6 40.78	4	−0.15	40.63
	Radcl. 3525	11 32.00	9	−0.17	31.83
	B. A. C. 5463	15 4.54	9	−0.15	4.39
	» 5490	18 35.33	9	−0.21	35.12
	» 5523	23 36.10	5	−0.17	35.93
	» 5621	38 45.52	6	−0.22	45.30
	» 5692	47 1.57	9	−0.22	1.35
	κ Ophiuchi	50 41.13	8	−0.22	40.91
		Kr. West			
	α Herculis	17 7 53.54	8	+0.03	53.57
	B. A. C. 5841	11 40.31	8	+0.05	40.36
	» 5871	15 55.86	9	+0.13	55.99
	» 5894	19 12.33	8	+0.08	12.41
	β Draconis	27 46.73	8	+0.18	46.91
	B. A. C. 6697	19 25 42.24	4	+0.17	42.41
	» 6729	31 56.38	5	+0.08	56.46
	» 6745	34 27.11	9	+0.14	27.25
		Kr. Ost			
	B. A. C. 6928	20 2 5.12	6	−0.16	4.96
	» 6952	7 26.40	8	−0.08	26.32
	α₂ Capricorni	9 58.56	9	−0.19	58.37
	B. A. C. 6996	12 44.64	9	−0.16	44.48
	» 7014	15 54.04	9	−0.20	53.84
	» 7046	20 45.41	5	−0.18	45.23

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhrcorrect.	Längen-Differenz
Kr. Ost					
17h 8m 46s.19	9	+0s.53	46s.72	52s.83	16m 2s.09
12 33.15	9	+0.52	33.67	52.97	2.23
16 48.40	9	+0.97	49.37	53.06	2.31
20 5.34	9	+0.48	5.82	53.08	2.33
23 25.75	9	+1.02	26.77	53.19	2.44
27 38.77	9	+1.15	39.92	52.92	2.16
19 18 59.05	9	+0.47	59.52	53.26	2.41
26 34.59	7	+1.25	35.84	52.95	2.09
30 15.12	9	+1.15	16.27	52.90	2.04
32 49.23	9	+0.50	49.73	53.08	2.21
35 19.80	9	+0.97	20.77	53.16	2.29
Kr. West					
20 8 20.59	9	−0.88	19.71	53.00	16 2.11
10 52.78	9	−1.01	51.77	53.00	2.11
13 39.00	9	−0.91	38.09	53.22	2.32
16 48.20	9	−0.90	47.30	53.22	2.32
21 39.76	9	−0.95	58.81	53.30	2.40
Kr. West					
15 44 23.79	9	−0.64	23.15	54.85	16 2.24
48 18.53	9	−0.74	17.79	54.07	2.46
Kr. Ost					
16 7 34.25	9	+0.41	34.66	54.03	16 2.40
12 25.31	8	+0.85	26.16	54.33	2.69
15 57.52	8	+0.95	58.47	54.08	2.44
19 28.57	8	+0.58	29.15	54.03	2.39
24 29.28	9	+0.89	30.17	54.24	2.59
39 38.76	6	+0.55	39.31	54.01	2.35
47 54.86	6	+0.55	55.41	54.06	2.39
51 34.33	8	+0.54	34.87	53.96	2.29
Kr. West					
17 8 48.76	9	−0.72	48.04	54.47	16 2.78
12 35.44	1	−0.73	34.71	54.35	2.66
16 51.23	9	−0.87	50.36	54.37	2.67
20 7.27	9	−0.74	6.53	54.12	2.42
27 41.99	9	−0.93	41.06	54.15	2.44
19 26 38.64	6	−1.05	37.59	54.18	2.37
32 51.16	9	−0.89	50.27	53.81	1.99
35 22.57	9	−0.94	21.63	54.38	2.56
Kr. Ost					
20 2 58.11	5	+1.35	59.46	54.50	16 2.65
8 19.68	9	+0.62	20.30	53.98	2.13
10 52.09	9	+0.51	52.60	54.23	2.37
13 37.13	9	+1.24	38.37	53.89	2.03
16 47.68	9	+0.56	48.24	54.40	2.54
21 39.03	9	+0.53	39.56	54.33	2.36

Beobachtungen nach den gehörten

Weiss in Wien.

1865	Namen der Sterne	Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian
		Kr. Ost			
Juli 19.	α Serpentis	15h 37m 0s.74	6	−0s.34	0s.40
	B. A. C. 5214	39 17.35	5	−0.34	17.01
	» 5245	43 28.98	9	−0.34	28.64
	» 5271	47 23.63	9	−0.33	23.30
		Kr. West			
	δ Ophiuchi	16 6 40.13	7	−0.06	40.07
	Radcl. 3525	11 31.28	8	+0.05	31.33
	B. A. C. 5463	15 3.87	9	+0.08	3.95
	» 5490	18 34.74	9	−0.05	34.69
	» 5523	23 35.51	9	+0.06	35.57
	ζ Herculis	35 35.10	9	−0.13	34.97
	B. A. C. 5621	38 44.78	9	−0.16	44.62
	» 5644	42 23.82	9	−0.12	23.70
	» 5692	47 0.95	9	−0.15	0.80
	ϰ Ophiuchi	50 40.46	8	−0.15	40.31
		Kr. Ost			
	α Herculis	17 7 53.28	9	−0.19	53.09
	B. A. C. 5841	11 40.05	9	−0.17	39.88
	» 5894	19 12.10	9	−0.17	11.93
	» 5911	22 32.97	9	−0.15	32.82
	β Draconis	26 46.39	9	−0.14	46.25
	B. A. C. 6928	20 2 4.46	4	−0.15	4.31
	α_2 Capricorni	9 58.11	9	−0.22	57.99
	B. A. C. 6996	12 44.23	8	−0.19	44.04
	» 7014	15 53.50	7	−0.13	53.37
	» 7046	20 44.92	9	−0.15	44.77

V. Ermittelung der persönlichen Gleichung.

Zur Bestimmung der persönlichen Gleichung war im Mai 1865 Herr Professor Weiss mit seinem Instrument nach Leipzig gekommen und es wurden am 20., 21. und 29. Mai Beobachtungen angestellt und zwar von Sternen, deren Declination im Mittel übereinstimmte mit dem Mittel der Sterne zur Längenbestimmung. An ein und demselben Instrumente beobachtete der eine Beobachter den Durchgang des Sternes an der ersten Hälfte der Fäden, der andere Beobachter den Durchgang durch die zweite Hälfte, wobei aber ge-

Pendelschlägen. (Auge und Ohr.)

Bruhns in Leipzig.

Durchgangszeit durch den Mittelfaden	Anzahl der Fäden	Correction des Instruments	Im Meridian	Differenz der Uhrcorrect.	Längen-Differenz
Kr. Ost					
15ʰ 37ᵐ 55ˢ29	9	+0ˢ53	55ˢ82	55ˢ42	16ᵐ 2ˢ49
40 11.60	8	+0.53	12.13	55.42	2.19
44 23.29	9	+0.52	23.81	55.17	2.23
48 17.58	9	+0.85	18.43	55.13	2.18
Kr. West					
16 7 36.11	9	−0.70	35.41	55.34	16 2.37
12 27.54	9	−0.76	26.78	55.45	2.48
16 0.05	9	−0.82	59.23	55.28	2.31
19 30.77	9	−0.68	30.09	55.40	2.42
24 31.53	9	−0.78	30.75	55.18	2.20
36 31.17	9	−0.72	30.45	55.48	2.49
39 40.83	9	−0.69	40.14	55.52	2.52
43 19.94	9	−0.80	19.14	55.44	2.44
47 57.11	9	−0.70	56.41	55.61	2.60
51 36.40	9	−0.71	35.69	55.38	2.37
Kr. Ost					
17 8 47.81	9	+0.52	48.33	55.24	16 2.21
12 34.52	9	+0.55	35.07	55.19	2.16
20 6.55	3	+0.55	7.10	55.17	2.13
23 27.34	9	+1.06	28.40	55.58	2.54
27 40.41	9	+1.17	41.58	55.33	2.28
20 2 58.61	6	+1.37	59.98	55.67	2.46
10 52.76	9	+0.50	53.26	55.27	2.05
13 38.82	9	+0.98	39.80	55.76	2.54
16 48.24	9	+0.55	48.79	55.42	2.20
21 39.64	9	+0.53	40.17	55.40	2.47

wechselt wurde, um auf diese Weise die Fehler der Fädenintervalle zu eliminiren. Im August war ich mit meinem Instrumente in Wien und auf dem Laaer Berge wurden nach derselben Methode am 7., 8., 9., 10. und 11. August ebenfalls Beobachtungen angestellt. Im Ganzen sind beobachtet:

55 Sterne in Kreislage West
68 » » » Ost.

Das Verzeichniss der beobachteten Sterne und die aus denselben abgeleiteten Resultate der persönlichen Gleichung im Sinne Bruhns minus Weiss ist folgendes:

Persönliche Gleichung zwischen Professor Bruhns und Professor Weiss.

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
Mai 20.	B. A. C. 4406	+0^{s}16	Mai 20.	B. A. C. 4721	−0^{s}02
	» 4433	−0.29		» 4729	+0.30
	» 4440	−0.02		» 4741	−0.08
	» 4467	+0.04		» 4753	−0.11
	» 4499	+0.28		» 4785	−0.14
	» 4519	−0.18		» 4805	+0.34
	» 4538	−0.12		» 4827	−0.19
	» 4621	+0.14		» 4841	+0.26
	» 4637	+0.01		» 4853	−0.01
	» 4648	−0.10		» 4873	+0.10
	» 4662	+0.11		» 4903	+0.02
	» 4699	−0.22		» 4926	+0.30
				» 4937	−0.10
				» 4952	+0.24
Mai 21.	B. A. C. 4721	−0.19	Mai 21.	B. A. C. 4467	−0.19
	» 4729	+0.32		» 4499	+0.15
	» 4753	0.00		» 4519	+0.24
	» 4785	−0.25		» 4538	−0.16
	» 4805	−0.12		» 4559	−0.09
	» 4827	+0.09		» 4596	+0.09
	» 4841	−0.01		» 4648	+0.15
	» 4873	−0.13		» 4662	+0.07
	» 4903	+0.19		» 4699	+0.08
	» 4926	−0.04			
	» 4937	−0.21			
	» 4952	+0.26			
	» 4974	−0.19			
Mai 29.	B. A. C. 5315	−0.19	Mai 29.	B. A. C. 5067	−0.12
	» 5338	−0.24		» 5085	−0.12
	» 5359	−0.13		» 5113	+0.08
	» 5388	−0.18		» 5135	−0.04
	» 5417	−0.38		» 5168	−0.07
	» 5463	−0.17		» 5185	−0.05
	» 5490	+0.19		α Serpentis	+0.07
	» 5523	−0.18		B. A. C. 5234	−0.22
	» 5537	−0.18		» 5271	−0.11
	» 5552	−0.08		» 5298	−0.15
August 7.	α_2 Capricorni	+0.34	August 7.	α Cygni	+0.31
	B. A. C. 6996	+0.30			
	» 7014	+0.37			
	» 7046	+0.28			

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
August 7.	B. A. C. 7085	−0^{s}.14			
	» 7107	+0.09			
	» 7137	+0.02			
August 8.	β Draconis	+0.20	August 8.	B. A. C. 5802	−0^{s}.02
	B. A. C. 5975	−0.04		» 5841	−0.12
	» 5991	+0.12		» 5871	+0.15
	» 6013	−0.06		» 5911	−0.15
	α_2 Capricorni	+0.40		» 7233	+0.18
	B. A. C. 6996	−0.05		» 7256	+0.25
	» 7014	+0.26		» 7271	+0.40
	» 7046	+0.33			
	» 7085	+0.12			
	» 7107	+0.33			
	» 7137	−0.12			
	α Cygni	−0.05			
Aug. 10.	B. A. C. 5975	+0.12	Aug. 9.	B. A. C. 7659	+0.17
	» 5991	−0.07		» 7674	+0.03
	» 6013	−0.13		» 7705	+0.02
	» 6030	+0.26		» 7727	+0.31
	» 6056	−0.07		» 7746	+0.40
	α Cygni	+0.32		» 7770	+0.62
	B. A. C. 7198	−0.01		» 7788	+0.17
	» 7233	+0.14		» 7814	0.00
	» 7271	−0.25		» 7832	+0.25
	» 7301	+0.22		» 7850	+0.09
	» 7318	+0.01		» 7868	+0.31
	» 7345	+0.47		» 7888	+0.05
	» 7398	+0.14			
	» 7421	+0.33			
	» 7448	+0.18			
	» 7462	+0.37			
	» 7480	−0.03			
	» 7512	+0.17			
			Aug. 11.	B. A. C. 5975	+0.47
				» 5991	+0.01
				» 6013	+0.06
				» 6030	+0.11
				» 6056	+0.52
				α Cygni	+0.21
				B. A. C. 7198	+0.28
				» 7233	+0.22
				» 7256	+0.17
				» 7271	+0.05
				» 7301	0.00

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
			Aug. 11.	B. A. C. 7318	+0ˢ.12
				» 7345	+0.21
				» 7372	+0.18
				» 7398	+0.16
				» 7421	—0.16
				» 7448	+0.02
				» 7480	+0.14
				» 7512	—0.02

Vereinigt man diese Werthe zu Tagesmitteln, so erhält man:

Tagesmittel der persönlichen Gleichung zwischen Prof. Bruhns und Prof. Weiss.

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	B — W	Zahl der Sterne	1865	B — W	Zahl der Sterne
Mai 20.	—0ˢ.017	12	Mai 20.	+0ˢ.065	14
» 21.	—0.022	13	» 21.	+0.038	9
» 29.	—0.154	10	» 29.	—0.076	10
August 7.	+0.180	7	August 7.	(+0.310)	1
» 8.	+0.118	12	» 8.	+0.099	7
» 10.	+0.121	18	» 9.	+0.202	12
			» 11.	+0.145	19

Aus diesen Tagesmitteln ergibt sich für das Gesammtmittel jeder Beobachtungsperiode (August 7 mit nur 1 Stern ist selbstverständlich ausgeschlossen):

Kreis West.				Kreis Ost.			
1865	B — W	Zahl der Sterne	Wahrsch. F. des Mittels	1865	B — W	Zahl der Sterne	Wahrsch. F. des Mittels
Mai 20–29.	—0ˢ.057	35	±0ˢ.026	Mai 20–29.	+0ˢ.015	33	±0ˢ.026
Aug. 7–10.	+0.131	37	±0.009	Aug. 8–11.	+0.154	38	±0.014

Aus diesen Zahlen ersieht man, dass sich die persönliche Gleichung von Mai bis August beträchtlich geändert hat. Die Differenz zwischen West und Ost liegt innerhalb der Grenze der wahrscheinlichen Fehler; jedoch die Aenderung von Mai bis August scheint reell zu sein und lässt sich vielleicht dadurch erklären, dass in Wien

vor den Beobachtungen jedesmal eine halbe Meile Wegs zurückgelegt wurde, wodurch die Beobachter mehr ermüdet waren als in Leipzig und deshalb würde es vielleicht gerechtfertigt erscheinen, den Beobachtungen der ersten Periode grösseres Gewicht zu geben. Es ist dies nicht geschehen, weil, wenn man eine der Zeit proportionale Aenderung annimmt, die Längenbestimmung selbst viel näher der Zeit der zweiten Periode der Bestimmung der persönlichen Gleichung liegt.

Untersucht man, ob eine Aenderung der persönlichen Gleichung mit der Zenithdistanz der Sterne stattfindet und ordnet dieselben nach den Declinationen, so erhält man folgende Tabelle:

Persönliche Gleichung zwischen Prof. Bruhns und Prof. Weiss geordnet nach der Declination der Sterne.

Kreis West.				Kreis Ost.			
Stern	Declination	B—W	Zahl der Durchgänge	Stern	Declination	B—W	Zahl der Durchgänge
B. A. C. 7046	— 3° 48′	+0ˢ.31	2	B. A. C. 7398	+38° 50′	+0ˢ.14	1
» 7107	+ 3 7	+0.21	2	» 4433	+40 12	—0.29	1
» 7014	+ 4 55	+0.31	2	» 6996	+40 19	+0.12	2
» 7318	+ 4 58	+0.01	1	» 4467	+40 51	+0.04	1
» 7421	+ 6 14	+0.33	1	» 7868	— 0 49	+0.31	1
» 4440	+10 8	—0.02	1	» 7832	— 0 44	+0.25	1
» 5359	+10 15	—0.13	1	» 7844	+ 0 42	0.00	1
» 7271	+10 19	—0.25	1	» 7318	+ 4 55	+0.12	1
» 5537	+10 39	—0.18	1	» 7788	+ 5 7	+0.17	1
» 7137	+12 48	—0.05	2	» 7659	+ 6 4	+0.17	1
» 4721	+13 36	—0.19	1	» 7421	+ 6 11	—0.16	1
» 5490	+14 21	+0.19	1	α Serpentis	+ 6 50	+0.07	1
» 4499	+14 24	+0.28	1	B. A. C. 7372	+ 9 25	+0.18	1
» 4926	+15 0	—0.04	1	» 7271	+10 19	+0.23	2
» 4662	+15 19	+0.11	1	» 7674	+10 44	+0.03	1
» 5991	+16 1	+0.02	2	» 5802	+10 45	—0.02	1
» 4873	+17 32	—0.13	1	» 5135	+11 0	—0.04	1
» 5315	+18 12	—0.19	1	» 5841	+11 1	—0.12	1
» 4406	+18 15	+0.16	1	» 4559	+11 26	—0.09	1
» 4637	+18 36	+0.01	1	» 4853	+12 15	—0.01	1
» 4648	+19 5	—0.10	1	» 5067	+13 3	—0.12	1
» 4621	+19 18	+0.14	1	» 5185	+13 17	—0.05	1
» 6030	+19 19	+0.26	1	» 4721	+13 36	—0.02	1
» 4785	+19 50	—0.25	1	» 4499	+14 30	+0.15	1
» 4729	+19 54	+0.32	1	» 4926	+15 0	+0.30	1
» 4753	+19 56	0.00	1	» 4662	+15 19	+0.07	1
» 7462	+36 32	+0.37	1	» 5085	+15 54	—0.12	1

Kreis West.				Kreis Ost.			
Sterne	Declination	B — W	Zahl der Durchgänge	Sterne	Declination	B — W	Zahl der Durchgänge
B. A. C. 5991	+16° 1′	+0ˢ01	1	B. A. C. 6030	+19° 18′	+0ˢ11	1
» 4873	+17 32	+0.10	1	» 4785	+19 50	+0.14	1
» 4648	+19 5	+0.15	1	» 4729	+19 54	−0.30	1
» 5234	+18 34	−0.22	1	» 4753	+19 56	+0.11	1
» 5523	+42 11	−0.18	1	» 7256	+37 33	−0.21	2
» 4805	+42 25	−0.12	1	» 7398	+38 40	+0.16	1
» 5417	+42 43	−0.38	1	» 5168	+40 48	+0.07	1
» 5552	+42 43	−0.08	1	» 4467	+40 51	−0.19	1
» 4519	+42 48	−0.18	1	» 4596	+41 46	−0.09	1
» 6013	+44 9	−0.10	2	» 7770	+42 17	+0.62	1
» 4841	+44 14	−0.01	1	» 4805	+42 25	+0.34	1
» 4699	+44 30	−0.22	1	» 7850	+42 26	+0.09	1
α Cygni	+44 44	+0.14	2	» 4519	+42 48	+0.24	1
B. A. C. 5388	+45 17	−0.18	1	» 5271	+42 50	−0.14	1
» 7233	+45 34	+0.14	1	» 5298	+43 0	−0.15	1
» 7480	+45 57	−0.03	1	» 6013	+44 9	+0.06	1
» 5338	+46 25	−0.24	1	» 4841	+44 14	+0.26	1
» 5463	+46 38	−0.17	1	» 7705	+44 22	+0.02	1
» 4903	+46 41	+0.19	1	» 4699	+44 30	+0.08	1
» 7198	+46 49	−0.01	1	α Cygni	+44 44	+0.26	2
» 7301	+46 57	+0.22	1	B. A. C. 7233	+45 34	+0.20	2
» 7345	+47 3	+0.47	1	» 7480	+45 57	+0.14	1
» 4827	+47 23	+0.09	1	» 5871	+46 22	+0.15	1
» 4952	+47 49	+0.26	1	» 4903	+46 41	+0.02	1
» 4974	+48 11	−0.19	1	» 4741	+46 42	−0.08	1
» 6056	+48 26	−0.07	2	» 7198	+46 49	+0.28	1
» 7085	+48 27	−0.01	2	» 7301	+46 57	0.00	1
» 5975	+48 40	+0.04	1	» 7345	+47 3	+0.21	1
» 4538	+49 42	−0.12	1	» 7727	+47 16	+0.34	1
» 4937	+50 11	−0.21	1	» 4827	+47 23	−0.19	1
» 7448	+51 0	+0.18	1	» 4952	+47 49	+0.24	1
» 7512	+51 2	+0.17	1	» 5911	+48 23	−0.15	1
β Draconis	+52 23	+0.20	1	» 6056	+48 26	+0.52	1
				» 5975	+48 40	+0.47	1
α_2 Capricorni				» 5113	+49 11	+0.08	1
ist wegen zu				» 4538	+49 42	−0.16	1
tiefenStandes				» 7746	+50 9	+0.40	1
weggelassen.				» 4937	+50 11	−0.10	1
				» 7888	+50 51	+0.05	1
				» 7448	+51 0	+0.02	1
				» 7512	+51 2	−0.02	1

Die daraus erhaltenen Resultate sind die folgenden:

Persönliche Gleichung zwischen Prof. Bruhns und Prof. Weiss für verschiedene mittlere Declinationen.

Kreis West.				Kreis Ost.			
Mittlere Declination	B — W	W. F. des Mittels	Zahl der Durchgänge	Mittlere Declination	B — W	W. F. des Mittels	Zahl der Durchgänge
[illegible]1° 55′	+0ˢ.239	±0ˢ.026	7	+ 3° 32′	+0ˢ.116	±0ˢ.035	8
[illegible] 34	−0.007	±0.044	10	+11 31	+0.017	±0.023	12
+18 1	+0.024	±0.032	14	+17 34	+0.050	±0.035	12
+40 53	−0.051	±0.047	11	+41 5	+0.117	±0.051	12
+45 29	−0.026	±0.032	14	+45 31	+0.132	±0.024	14
+49 6	+0.060	±0.039	14	+49 5	+0.120	±0.041	14

Die persönliche Gleichung ist nur bei den ersten Werthen in Kreislage West bei der grössten Zenithdistanz stark abweichend, die andern Werthe sind sämmtlich nahe innerhalb der wahrscheinlichen Fehler übereinstimmend, und bildet man aus obigen Resultaten zwei Gruppen, so erhält man folgende Werthe:

Kreis West.				Kreis Ost.			
Mittlere Declination	B — W	Wahrsch. F. des Mittels	Zahl der Durchgänge	Mittlere Declination	B — W	Wahrsch. F. des Mittels	Zahl der Durchgänge
+12°.3	+0ˢ.062	±0ˢ.017	31	+11°.7	+0ˢ.054	±0ˢ.017	32
+45°.6	−0.002	±0.022	39	+45°.4	+0.123	±0.018	40

Die Unterschiede zwischen Ost und West haben hier entgegengesetztes Zeichen und überschreiten die wahrscheinlichen Fehler nicht allzu sehr, ebenso werden die Aenderungen der persönlichen Gleichung mit der Declination kaum reell sein. Das Mittel aus Ost- und Westlage ist für die beiden Gruppen vollständig identisch.

Endlich wurde zur Bestimmung der persönlichen Gleichung noch die Methode [1]) angewandt, dass jeder Beobachter an seinem

1) Die Methode, die persönliche Gleichung dadurch zu bestimmen, dass auf eine weisse Fläche das Bild der Sonne und das Fadenkreuz des Instrumentes projicirt wurde, und die Durchgänge der Sonnenflecken durch die Fäden von jedem Beobachter unabhängig nach der Auge- und Ohrmethode notirt wurden, ergab in Wien 1865 August 10 B — W = + 0ˢ.149. Sie ist aber hier nicht zu berücksichtigen, weil diese Beobachtungen von den bei der Längenbestimmung ganz verschieden sind.

Instrumente vollständige Durchgänge von Sternen beobachtete, die Instrumentalfehler jeden Abend bestimmte und damit die Sterne auf den Meridian reducirte. Diese Meridiandurchgänge im Sinne Bruhns-Weiss von einander abgezogen, ergaben folgende Werthe:

Persönliche Gleichung zwischen Prof. Bruhns und Prof. Weiss abgeleitet aus vollständigen Durchgängen von Sternen.

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
Mai 22.	B. A. C. 4637	+0^{s}04	Mai 22.	B. A. C. 4926	−0^{s}21
	» 4699	+0.04		» 4905	−0.43
	» 4721	−0.21		» 4937	−0.50
	» 4753	−0.12		» 4952	+0.01
	» 4785	−0.18		» 4974	−0.07
	» 4805	−0.09		» 5033	−0.69
	» 4827	+0.18		» 5067	−0.57
	» 4870	−0.39		» 5085	−0.43
				» 5135	−0.25
				» 5168	−0.48
				» 5185	−0.61
				» 5234	−0.49
				» 5271	−0.59
» 23.	B. A. C. 4905	+0.12	» 23.	B. A. C. 4637	+0.17
	» 4926	−0.05		» 4662	+0.02
	» 4937	+0.24		» 4699	−0.03
	» 4952	+0.47		» 4721	−0.15
	» 4974	+0.36		» 4753	+0.04
	» 5033	−0.17		» 4785	+0.06
	» 5067	+0.18		» 4805	−0.17
	» 5085	−0.07		» 4827	−0.08
	» 5113	+0.40		» 4841	−0.21
	» 5135	−0.69		» 4870	−0.48
	» 5168	−0.06			
	» 5234	−0.11			
	» 5271	+0.07			
» 26.	B. A. C. 4637	−0.27	» 26.	B. A. C. 4905	+0.43
	» 4662	+0.01		» 4926	−0.12
	» 4699	−0.32		» 4937	+0.49
	» 4721	−0.13		» 4952	+0.63
	» 4753	−0.10		» 4974	+0.42
	» 4785	−0.28		» 5033	−0.07
	» 4805	−0.27		» 5067	+0.06
	» 4827	−0.22		» 5085	+0.15
	» 4841	−0.15		» 5135	+0.02
	» 4870	−0.10		» 5168	+0.20
				» 5185	+0.39
				» 5234	−0.06
				» 5271	+0.11

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
Mai 27.	B. A. C. 4637	$-0^{s}.24$	Mai 27.	B. A. C. 4905	$+0^{s}.58$
	» 4662	−0.04		» 4937	+0.37
	» 4699	−0.14		» 4952	+0.13
	» 4721	−0.23		» 4974	+0.16
	» 4753	0.00			
	» 4785	−0.11			
	» 4805	+0.03			
	» 4827	−0.26			
	» 4841	−0.20			
August 6.	B. A. C. 6379	+0.21	August 6.	B. A. C. 6073	+0.36
	» 6428	+0.27		» 6109	+0.12
	» 6475	+0.25		» 6143	+0.49
	» 6876	−0.16		» 6952	+0.32
	» 6895	+0.20		» 6996	+0.18
	» 6928	−0.12		» 7014	+0.13
				» 7046	+0.20
» 7.	B. A. C. 5802	+0.47	» 7.	B. A. C. 5621	+0.23
	» 5841	+0.57		» 5644	+0.08
	» 5871	+0.01		» 5692	+0.58
	» 5894	+0.50		» 6379	+0.79
	» 5911	−0.07		» 6428	+0.10
	» 6109	+0.20		» 6451	+0.81
	» 6679	−0.15		» 6475	+0.13
	» 6717	−0.43		» 6552	+0.68
	» 6729	+0.72		» 6579	+0.23
	» 6745	+0.27		» 6595	+0.32
	» 6876	+0.05		» 6624	+0.27
	» 6895	−0.25			
» 8.	B. A. C. 6073	+0.54	» 8.	B. A. C. 6379	+1.16
	» 6109	+0.31		» 6428	+0.25
	» 6143	+0.86		» 6451	+1.08
	» 6876	−0.08		» 6475	+1.00
	» 6895	−0.13		» 6624	+0.25
	» 6928	−0.12		» 6679	+0.08
				» 6717	+0.03
				» 6729	+0.87
				» 6745	+0.23
» 9.	B. A. C. 6379	+0.80	» 9.	B. A. C. 6013	+0.33
	» 6428	−0.07		» 6056	+0.09
	» 6451	+0.80		» 6073	+0.47
	» 6475	0.00		» 6109	0.00
	» 6493	+0.28		» 6143	+1.05
	» 6552	+0.85		» 6729	−0.09
	» 6579	+0.16		» 7301	+0.35
	» 6595	+1.09		» 7318	−0.32
	» 6624	−0.01		» 7345	+0.31
	» 6928	−0.28		» 7372	−0.06

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	Sterne	B — W	1865	Sterne	B — W
August 9.	B. A. C. 6952	−0^s.42	August 9.	B. A. C. 7421	+0^s.46
	» 6996	+0.07		» 7448	+0.47
	» 7014	0.00		» 7480	+0.65
	» 7137	−0.20		» 7512	+0.91
	» 7198	+0.42			
	» 7233	+0.13			
» 11.	B. A. C. 6552	−0.71	» 11.	B. A. C. 5802	+0.71
	» 6579	−0.13		» 5841	+0.95
	» 6595	−0.50		» 5871	+0.52
	» 6624	+0.03		» 5894	+1.29
	» 6679	0.00		» 5911	+0.45
	» 6717	−0.22		» 6073	+0.83
	» 6729	−0.38		» 6109	+0.45
	» 6745	−0.33		» 6143	+0.70
				» 6895	+0.50
				» 6928	+0.45
				» 6952	−0.42
				» 6996	−0.17
				» 7014	−0.57
				» 7046	−0.06
				» 7085	−0.06
				» 7107	−0.46
				» 7137	−0.42

Die daraus abgeleiteten Tagesmittel in der folgenden Tabelle weichen stark von einander ab, so dass die Sicherheit dieser Bestimmung sehr gering ist, was theilweise darin seinen Grund hat, dass die ganze Unsicherheit der Instrumentalfehler in den Werthen enthalten ist. Es hat sich gefunden:

Tagesmittel der persönlichen Gleichung aus vollständigen Durchgängen von Sternen.

Kreis West.			Kreis Ost.		
1865	B — W	Zahl der Sterne	1865	B — W	Zahl der Sterne
Mai 22.	−0^s.091	8	Mai 22.	−0^s.408	13
» 23.	+0.076	13	» 23.	−0.083	10
» 26.	−0.183	10	» 26.	+0.204	13
» 27.	−0.132	9	» 27.	+0.310	4
August 6.	+0.108	6	August 6.	+0.257	7
» 7.	+0.158	12	» 7.	+0.384	11
» 8.	+0.230	6	» 8.	+0.550	9
» 9.	+0.226	16	» 9.	+0.330	14
» 11.	−0.280	8	» 11.	+0.276	17

Theilt man diese Tagesmittel in zwei Perioden und gibt jedem Tage gleiches Gewicht, so erhält man

Kreis West.				Kreis Ost.			
1865	B—W	Zahl der Sterne	Wahrsch. F. des Mittels	1865	B—W	Zahl der Sterne	Wahrsch. F. des Mittels
Mai 22—27.	—0ˢ083	40	±0ˢ038	Mai 22—27.	+0ˢ006	40	±0ˢ107
Aug. 6—11.	+0.088	48	±0.064	Aug. 6—11.	+0.359	58	±0.036

welche Werthe die schon oben gefundene starke Aenderung der persönlichen Gleichung und eine beträchtliche Differenz zwischen Kreis Ost und West constatiren. Das Endresultat ist:

$$
\begin{array}{lll}
B - W. \quad \text{Kreis West} & = + 0^s003 & \pm 0^s036 \\
\qquad\quad \text{» Ost} & = + 0.182 & \pm 0.056 \\
\hline
\qquad\quad \text{Mittel} & = + 0^s092 & \pm 0^s030
\end{array}
$$

Da bei der Längenbestimmung Berlin-Wien nur die erste Methode angewandt ist, bei der Längenbestimmung Leipzig-Berlin die Beobachter wechselten, schien es der Conformität wegen nicht rathsam, diese letzten Werthe mit in Betracht zu ziehen. Es wurde daher angenommen als Endwerthe für die persönliche Gleichung aus gemeinschaftlich beobachteten Sterndurchgängen, mit Berücksichtigung der Gewichte nach der Anzahl der Sterne (pag. 256):

$$
\begin{array}{lll}
Bw - Ww \quad \text{Kreis West} & = + 0^s040 & \pm 0^s014 \\
Bo - Wo \quad \text{Kreis Ost} & = + 0.089 & \pm 0.015 \\
\hline
\text{Mittel } \tfrac{1}{2}(Bw - Ww) + \tfrac{1}{2}(Bo - Wo) & = + 0^s065 & \pm 0^s010
\end{array}
$$

VI. Ableitung der Endresultate.

Die aus den Beobachtungen erhaltenen Längendifferenzen sind zunächst nach Kreislagen für jeden Tag zu Mittelwerthen vereinigt, und bezeichnet man die absoluten persönlichen Fehler der Herren Bruhns und Weiss in der West- und in der Ostlage des Instruments mit Bw, Bo, Ww, Wo, so erhält man folgende Uebersicht:

1865	Kreislage		Längendifferenz	Zahl der Sterne
	in Leipzig	in Wien		
Juni 29.	West	West	$16^m\ 2^s.650 + \frac{1}{1}(Ww-Bw)$	1
	Ost	Ost	$2.300 + \frac{7}{7}(Wo-Bo)$	7
Juli 4.	West	West	$16\ 2.394 + \frac{8}{8}(Ww-Bw)$	8
	Ost	Ost	$2.207 + \frac{6}{6}(Wo-Bo)$	6
» 6.	Ost	Ost	$16\ 2.162 + \frac{4}{4}(Wo-Bo)$	4
	West	West	$2.381 + \frac{8}{8}(Ww-Bw)$	8
	Ost	Ost	$2.188 + \frac{11}{11}(Wo-Bo)$	11
	West	West	$2.303 + \frac{6}{6}(Ww-Bw)$	6
» 14.	West	West	$16\ 2.470 + \frac{4}{4}(Ww-Bw)$	4
	Ost	Ost	$2.310 + \frac{5}{5}(Wo-Bo)$	5
	West	West	$2.240 + \frac{2}{2}(Ww-Bw)$	2
» 15.	Ost	Ost	$16\ 2.455 + \frac{2}{2}(Wo-Bo)$	2
	West	West	$2.387 + \frac{10}{10}(Ww-Bw)$	10
	Ost	Ost	$2.377 + \frac{9}{9}(Wo-Bo)$	9
	West	West	$2.425 + \frac{6}{6}(Ww-Bw)$	6
» 16.	West	West	$16\ 2.320 + \frac{3}{3}(Ww-Bw)$	3
	Ost	Ost	$2.267 + \frac{9}{9}(Wo-Bo)$	9
	West	West	$2.475 + \frac{11}{11}(Ww-Bw)$	11
	Ost	Ost	$2.195 + \frac{6}{6}(Wo-Bo)$	6
» 17.	West	Ost	$16\ 2.242 + \frac{4}{4}(Wo-Bw)$	4
	Ost	West	$2.288 + \frac{10}{10}(Ww-Bo)$	10
	Ost	Ost	$2.236 + \frac{11}{11}(Wo-Bo)$	11
	West	West	$2.252 + \frac{5}{5}(Ww-Bw)$	5
» 18.	West	West	$16\ 2.350 + \frac{2}{2}(Ww-Bw)$	2
	Ost	Ost	$2.443 + \frac{8}{8}(Wo-Bo)$	8
	West	West	$2.486 + \frac{8}{8}(Ww-Bw)$	8
	Ost	Ost	$2.347 + \frac{6}{6}(Wo-Bo)$	6
» 19.	Ost	Ost	$16\ 2.272 + \frac{4}{4}(Wo-Bo)$	4
	West	West	$2.418 + \frac{10}{10}(Ww-Bw)$	10
	Ost	Ost	$2.274 + \frac{10}{10}(Wo-Bo)$	10

Die persönliche Gleichung zeigt sich in den beiden Kreislagen etwas verschieden. Bildet man W — O so erhält man Juni 29 und Juli 17 (die erste Hälfte) ausschliessend:

$$W-O = +0^s.081 \pm 0^s.025$$

während derselbe Werth bei der persönlichen Gleichung

$$W-O = -0^s.049 \pm 0^s.021$$

ist. Weder in den Collimationsfehlern, noch in den Fädendistanzen ist ein Fehler wahrscheinlich und obwohl obige Werthe keine grosse

Sicherheit haben, zeugen sie doch von der grossen Veränderlichkeit der persönlichen Gleichung zu verschiedenen Zeiten.

Um nun etwaige Fehler in den Collimationen und den Fädendistanzen zu eliminiren, schien es am vortheilhaftesten, aus je zwei Kreislagen immer die Mittel zu nehmen und die persönliche Gleichung zum Schlusse anzubringen.

Der Fall, dass in Leipzig in einer andern Kreislage als in Wien beobachtet wurde, kommt allein am 17. Juni vor, während an den andern Tagen immer in identischen Kreislagen beobachtet ist. Für diesen Fall ist auch einfach das Mittel genommen. In der folgenden Tabelle ist das Gewicht nach der Formel $\frac{4ab}{a+b}$, wo a die Anzahl der Sterne in der einen Kreislage, b die Anzahl der Sterne in der andern Kreislage bedeutet. Man erhält

1865	Längendifferenz	Gewicht
Juni 29.	$16^m\ 2^s.475 + \frac{1}{2}(Ww - Bw) + \frac{7}{14}(Wo - Bo)$	3.5
Juli 4.	$2.250 + \frac{8}{16}(Ww - Bw) + \frac{6}{12}(Wo - Bo)$	13.8
» 6.	$2.258 + \frac{15}{30}(Wo - Bo) + \frac{14}{28}(Ww - Bw)$	26.8
» 14.	$2.333 + \frac{6}{12}(Ww - Bw) + \frac{5}{10}(Wo - Bo)$	10.9
» 15.	$2.411 + \frac{11}{22}(Wo - Bo) + \frac{16}{32}(Ww - Bw)$	26.1
» 16.	$2.314 + \frac{14}{28}(Ww - Bw) + \frac{15}{30}(Wo - Bo)$	29.0
» 17.	$2.254 + \frac{15}{30}(Ww - Bw) + \frac{15}{30}(Wo - Bo)$	30.0
» 18.	$2.406 + \frac{10}{20}(Ww - Bw) + \frac{14}{28}(Wo - Bo)$	23.3
» 19.	$2.345 + \frac{10}{20}(Ww - Bw) + \frac{14}{28}(Wo - Bo)$	23.3

Nimmt man dagegen das Mittel nach der Anzahl der an jedem Abend beobachteten Sterne ohne Rücksicht auf die Kreislage, so hat man

1865	Längendifferenz	Zahl der Sterne
Juni 29.	$16^m\ 2^s.282 + \frac{1}{8}(Ww - Bw) + \frac{7}{8}(Wo - Bo)$	8
Juli 4.	$2.314 + \frac{8}{14}(Ww - Bw) + \frac{6}{14}(Wo - Bo)$	14
» 6.	$2.261 + \frac{15}{29}(Wo - Bo) + \frac{14}{29}(Ww - Bw)$	29
» 14.	$2.355 + \frac{6}{17}(Ww - Bw) + \frac{5}{11}(Wo - Bo)$	11
» 15.	$2.397 + \frac{11}{27}(Wo - Bo) + \frac{16}{27}(Ww - Bw)$	27
» 16.	$2.336 + \frac{14}{29}(Ww - Bw) + \frac{15}{29}(Wo - Bo)$	29
» 17.	$2.257 + (\frac{15}{30}Ww - \frac{9}{30}Bw) + \frac{15}{30}(Wo - \frac{21}{30}Bo)$	30
» 18.	$2.426 + \frac{10}{24}(Ww - Bw) + \frac{14}{24}(Wo - Bo)$	24
» 19.	$2.334 + \frac{10}{24}(Ww - Bw) + \frac{14}{24}(Wo - Bo)$	24

Das Gesammtmittel aus der ersten dieser Tabellen ist mit Rücksicht auf die Gewichte:

$$L = 16^m\ 2^s.325 + \tfrac{93}{186}\,Ww - \tfrac{93}{186}\,Bw + \tfrac{93}{186}\,Wo - \tfrac{93}{186}\,Bo.$$

Das Gesammtmittel aus der zweiten dieser Tabellen ist mit Rücksicht auf die Zahl der an jedem Abend beobachteten Sterne:

$$L = 16^m\ 2^s.329 + \tfrac{94}{196}\,Ww - \tfrac{88}{196}\,Bw + \tfrac{102}{196}\,Wo - \tfrac{108}{196}\,Bo.$$

Für den wahrscheinlichen Fehler der Längendifferenz aus einem Stern, berechnet aus den Abweichungen der einzelnen Sterne vom Tagesmittel, ergibt sich für beide Arten von Resultaten nahe derselbe Werth; mit Hilfe der Tagesmittel aus der zweiten Tabelle erhält man an den verschiedenen Tagen:

Juni	29. w. F. =	$\pm 0^s.132$
Juli	4.	± 0.122
»	6.	± 0.117
»	14.	± 0.123
»	15.	± 0.115
»	16.	± 0.131
»	17.	± 0.089
»	18.	± 0.133
»	19.	± 0.110

während aus den Abweichungen der Resultate der einzelnen Sterne vom Gesammtmittel sich

$$\pm 0^s.123$$

herausstellt. Richtiger wird es sein, wie bei der Längenbestimmung Berlin-Wien den wahrscheinlichen Fehler des Endresultats auf die Abweichungen der Tagesmittel zurückzuführen; man erhält auf diese Weise den wahrscheinlichen Fehler

eines Tagesmittels aus Tabelle I. $\pm 0^s.055$, aus Tabelle II. $\pm 0^s.039$
des Endresultats » » ± 0.018, » » ± 0.013

Um zu sehen, ob für verschiedene Declinationen die Längendifferenz verschieden herauskömmt, sind dieselben einmal nach der Reihenfolge der einzelnen Sterne, also nach den Rectascensionen, das andere Mal nach den Declinationen geordnet, zusammengestellt:

Sterne	Längen-differenz	Zahl der Durchgänge	Sterne	Längen-differenz	Zahl der Durchgänge
α Serpentis	16ᵐ 2ˢ512	4	α Herculis	16ᵐ 2ˢ411	7
B. A. C. 5181	2.090	1	B. A. C. 5841	2.283	7
» 5214	2.265	4	» 5871	2.353	6
» 5245	2.279	7	» 5894	2.323	7
» 5271	2.332	8	» 5911	2.402	6
δ Ophiuchi	16 2.382	8	β Draconis	16 2.336	7
Radcliffe 3525	2.364	8	δ Aquilae	2.317	4
B. A. C. 5463	2.377	9	B. A. C. 6697	2.282	5
» 5490	2.415	8	» 6717	2.232	4
» 5523	2.336	7	» 6729	2.200	5
			» 6745	2.302	5
ζ Herculis	16 2.294	8	B. A. C. 6928	16 2.478	5
B. A. C. 5621	2.421	7	» 6952	2.206	5
» 5644	2.394	5	α_2 Capricorni	2.137	6
» 5692	2.335	8	B. A. C. 6996	2.377	6
x Ophiuchi	2.249	7	» 7014	2.320	6
			» 7046	2.315	6

Sterne	Decli-nation	Längen-differenz	Zahl der Durchgänge	Sterne	Decli-nation	Längen-differenz	Zahl der Durchgänge
α_2 Capricorni	−12°59′	16ᵐ 2ˢ137	6	ζ Herculis	+31°51′	16ᵐ 2ˢ294	8
B. A. C. 7046	− 3 48	2.315	6	B. A. C. 6996	40 19	2.377	6
δ Ophiuchi	− 3 21	2.382	8	Radcliffe 3525	40 22	2.364	8
δ Aquilae	+ 2 41	2.317	4	B. A. C. 5523	42 11	2.336	7
B. A. C. 5245	4 53	2.279	7	» 5644	42 29	2.394	5
» 7014	4 55	2.320	6	» 6745	42 31	2.302	5
» 6729	5 6	2.200	5	» 5271	42 50	2.332	8
α Serpentis	6 51	2.512	4				
B. A. C. 5894	+ 7 43	16 2.323	7	B. A. C. 5871	+46 23	16 2.353	6
» 5214	7 46	2.265	4	» 5463	46 38	2.377	9
» 5621	8 50	2.421	7	» 5911	48 22	2.402	6
x Ophiuchi	9 35	2.249	7	» 6717	48 58	2.232	4
B. A. C. 5692	10 23	2.335	8	» 5181	50 52	2.090	1
» 5841	11 1	2.283	7	» 6697	51 27	2.282	5
» 6952	14 17	2.206	5	β Draconis	52 24	2.336	7
» 5490	14 21	2.415	8	B. A. C. 6928	52 46	2.478	5
α Herculis	14 33	2.411	7				

Die Resultate dieser Uebersichten sind in folgenden Tabellen gegeben:

Mittel der Längendifferenzen aus Rectascensions-Gruppen.

Sterne	Längendifferenz	Wahrsch. Fehler	Zahl der Durchgänge
1— 5.	16^m 2^s.325	± 0^s.032	24
6—10.	2.376	± 0.007	40
11—15.	2.334	± 0.020	35
16—20.	2.353	± 0.020	33
21—26.	2.282	± 0.015	30
27—32.	2.303	± 0.036	34

Mittel der Längendifferenzen aus Declinations-Gruppen.

Mittlere Declination	Längendifferenz	Wahrsch. Fehler	Zahl der Durchgänge
0° 0′	16^m 2^s.384	± 0^s.025	46
+11 2	2.331	± 0.015	60
+40 3	2.341	± 0.011	47
+49 22	2.351	± 0.020	43

Die Resultate in der ersten Tabelle stimmen untereinander innerhalb der wahrscheinlichen Fehler genügend überein, denn obwohl die letzten beiden Werthe etwas geringer sind als die vorhergehenden, ist doch die Abweichung zu unbedeutend, um definitiv einer Ermüdung oder einer Veränderung der persönlichen Gleichung zugeschrieben werden zu können.

Nach den Resultaten der letzten Tabelle scheint es wirklich, als wenn die Längendifferenz aus den Sternen in der Nähe des Zeniths etwas grösser wäre, wie aus den Sternen in der Nähe des Aequators. In der persönlichen Gleichung hat sich etwas ähnliches bei Kreislage West, bei Kreislage Ost jedoch das Gegentheil gezeigt. Die hier vorhandene Differenz, welche nur wenig die wahrscheinlichen Fehler überschreitet, ist wohl mehr eine zufällige als eine reelle zu nennen. Es scheint mir daher das Beste, als Generalmittel für die Längendifferenz anzunehmen:

$$L = 16^m\ 2^s327\ \{+\ 0.485\ Ww - 0.37\ Bw + 0.515\ Wo - 0.53\ Bo\}$$
$$\pm\ 0^s012$$

Bringt man hieran die persönliche Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\,(Ww - Bw) + \tfrac{1}{2}\,(Bo - Bw) = -\,0^s065$$

an, so erhält man

$$L_0 = 16^m\ 2^s262 \pm 0^s015.$$

In Leipzig wurde im Meridianzimmer auf einem Pfeiler beobachtet, der vom Centrum des grossen Hauptpfeilers 10.4 Meter westlich sich befindet, weshalb an die Längendifferenz eine Reduction von

$$-\ 0^s036$$

anzubringen ist. Die Beobachtungen auf dem Laaer Berge bei Wien sind nach den Angaben des Herrn Director von Littrow (s. Längenbestimmung Berlin — Wien pag. 47) 4ˢ563 östlicher angestellt, als wenn sie am Meridiankreise der Wiener Sternwarte gemacht wären, sodass also als Reduction an den oben gegebenen Werth der Längendifferenz noch

$$-\ 4^s599$$

angebracht werden muss. Es ist daher:

Centrum der Leipziger Sternwarte westlich vom Meridiankreis der Wiener Sternwarte

$15^m\ 57^s663 \pm 0^s015.$

Da zwischen Leipzig und Berlin im April 1864 die Längendifferenz zu $4^m\ 0^s895 \pm 0^s020$ ermittelt wurde, ferner die Längenbestimmung Berlin — Wien im Jahre 1865 $11^m\ 56^s781 \pm 0^s0165$ ergeben hat, sollte jetzt zwischen Leipzig und Wien die Längendifferenz $15^m\ 57^s676 \pm 0^s026$ betragen. Der oben erhaltene Werth ist nur um 0ˢ013 kleiner und die Differenz liegt vollständig innerhalb der wahrscheinlichen Fehler. Obwohl bei der hier vorliegenden Längendifferenz der wahrscheinliche Fehler der kleinste von allen ist, möchte ich doch wegen der Aenderung der persönlichen Glei-

chung dieser Längenbestimmung kein grösseres Gewicht zuschreiben, als den anderen.

Um nun das Dreieck Berlin-Wien-Leipzig in Bezug auf die Längendifferenz vollständig abzuschliessen, scheint es mir am angemessensten, die übrig bleibenden Fehler gleichmässig zu vertheilen, so dass man annehmen kann:

Längendifferenz	Leipzig — Berlin	=	4^m	$0^s.89 \pm 0^s.02$
»	Berlin — Wien	=	11	36.78 ± 0.02
»	Leipzig — Wien	=	15	37.67 ± 0.02

Berichtigungen.

pag.	218	Zeile	2	v. o.	statt	$17^h.0$	lies	$16^h.0$
»	»	»	6	»	»	19.7	»	17.0
»	»	»	6	v. u.	»	—0.114	»	+0.114
»	»	»	2	»	»	—0.002	»	+0.002
»	»	»	1	»	»	—0.002	»	+0.002
»	247	»	4	»	»	Kr. Ost	»	Kr. West.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

NEUNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES SCHWERSPATHES.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ IV.

MIT VIER TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1872.

Vom Verfasser übergeben den 4. November 1871.
Der Abdruck vollendet den 23. December 1871.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

NEUNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES SCHWERSPATHES.

HIERZU VIER TAFELN.

Ueber die thermoelektrische Erregung des Schwerspathes lagen bis jetzt nur äusserst geringe Andeutungen vor. Wahrgenommen überhaupt wurde sie zuerst 1824 von Brewster, dessen ganze Mittheilung darüber sich jedoch auf die blosse Einreihung des Namens jenes Minerales in das Verzeichniss der thermoelektrischen Krystalle beschränkt. *)

Im Jahre 1843 haben sodann Riess und G. Rose den Schwerspath von Neuem auf sein elektrisches Verhalten geprüft, und berichten über ihre Versuche Folgendes: **) „Es wurden zwei Exemplare nach Erwärmung bis 180° untersucht. Es zeigte sich bei der Abkühlung deutliche positive Elektricität, und zwar an dem einen Krystall am stärksten am verbrochenen Ende, dicht unter der Abstumpfung der stumpfen Seitenkante. Negative Elektricität ist nicht bemerkt worden."

Seit einer Reihe von Jahren habe ich mich mit der Untersuchung der thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes beschäftigt und zur sicheren Feststellung derselben mehr als anderthalbhundert Krystalle der verschiedensten Fundorte geprüft. In der nachstehenden Abhandlung werde ich die Resultate jener Versuche, so weit sie mir zu einer vollständigen Einsicht in die thermoelektrischen Vorgänge auf den Schwerspathkrystallen nothwendig erscheinen, in möglichst kurzer und übersichtlicher Weise darlegen.

Ein besonderes Interesse erhält die Untersuchung des Schwerspathes durch den Umstand, dass die Art des Wachsthumes seiner

*) The Edinb. Journal of Science, conducted by David Brewster, Heft 2; übersetzt im Jahrbuch der Chemie und Physik von Schweigger 1825, Bd. 43, S. 94.

**) Ueber die Pyroelektricität der Mineralien von Riess und G. Rose. Abhandlungen der Akad. der Wissensch. zu Berlin 1843; physik. Abth. S. 96.

Krystalle sehr verschieden ist und dass die äussere Form derselben theils durch das Auftreten verschiedener Gestalten, theils durch die mehr oder minder grosse Ausdehnung, in welcher die Flächen der einzelnen Gestalten erscheinen, in beträchtlicher Weise variirt, sodass die Gelegenheit geboten wird, innerhalb der gegebenen Grenzen den Einfluss der Art des Wachsens sowie der Gestaltänderung auf die thermoelektrische Erregung zu verfolgen.

In Betreff der Intensität der elektrischen Erregung stehen die meisten Schwerspathkrystalle mit den sächsischen und sibirischen Topasen auf gleicher Höhe, während andererseits die Krystalle gewisser Fundorte selbst die hohe Spannung der brasilianischen Topase erreichen. Es konnte deshalb das zum Nachweise der elektrischen Vorgänge beim Topase*) (und ebenso früher beim Bergkrystalle**) benutzte Verfahren auf die analoge Prüfung des Schwerspathes angewendet werden. Der Mittheilung der auf diese Weise gewonnenen Resultate müssen jedoch einige Erörterungen über die Krystallisationsverhältnisse des Schwerspathes vorausgehen.

I. Krystallisationsverhältnisse des Schwerspathes.

1. Stellung und Grundgestalt.

Die Schwerspathkrystalle sind von den Mineralogen in so verschiedener Weise gedeutet und gestellt worden, dass jede der drei nachher zu erwähnenden Axen als sogenannte Hauptaxe betrachtet worden ist. Ich glaube indess, dass in Anbetracht der Structurverhältnisse dieses Minerales die Wahl der Hauptaxe in Bezug auf ihre Richtung nicht zweifelhaft sein kann, selbst wenn man über die ihr im Verhältniss zu den Diagonalen der Basis zu ertheilende Länge schwankend sein sollte.

Man hat im rhombischen Systeme diejenige Axe zur verticalen oder sogenannten Hauptaxe zu wählen, um welche sich die verschiedenen Durchgangs- und Krystallflächen am besten symmetrisch gruppiren. Die Schwerspathkrystalle zeigen nun zwei gut entwickelte und sich unter einem Winkel von 101° 40′ schneidende

*) Vergl. diese Abhandlungen Bd. XIV. S. 377.
**) Ebendaselbst Bd. XIII. S. 342.

Spaltungsrichtungen oder Durchgänge, die wieder von einer noch vollkommeneren Spaltungsrichtung senkrecht geschnitten werden. Diese Durchgänge liegen gegen die Hauptaxe nur dann symmetrisch, wenn wir die Richtung der Hauptaxe gegen den vollkommensten Durchgang senkrecht, oder mit den Durchschnittslinien der beiden gleichwerthigen Durchgänge parallel nehmen.

Da ferner an den meisten Krystallen mit allen drei Spaltungsrichtungen parallele Flächen auftreten, ja die einfachste vorkommende Gestalt überhaupt nur von den mit jenen Durchgängen parallelen Flächen gebildet wird, so ist es am naturgemässesten, das verticale Prisma von 101° 40′ als das Hauptprisma ∞P aufzufassen.

In dieser Weise sollen nun im Folgenden die Krystalle des Schwerspathes stets betrachtet werden: während die verticale oder Hauptaxe also mit den Kanten des letztgenannten Prismas parallel geht, liegt die sogenannte Brachydiagonale in der Richtung der kurzen, die Makrodiagonale in der Richtung der langen Diagonale des rhombischen Querschnittes jenes Prismas ∞P.

Das zuvor festgestellte Verhältniss der beiden Diagonalen der Basis (1 : 1,2276) ergibt sich als nothwendige Folge der Structur des Schwerspathes; dagegen bleibt die Annahme des Längenverhältnisses der Hauptaxe zu den Diagonalen der Basis, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, unserer Willkühr überlassen. Es scheint am zweckmässigsten von dem Brachydoma mit einem Winkel von 74° 38′ an den Enden der Hauptaxe, dessen Flächen bei fast allen Schwerspäthen vorkommen und bei den Krystallen aus der Auvergne und von Dufton eine sehr beträchtliche Ausdehnung gewinnen, auszugehen. Betrachten wir dasselbe als der Gestalt $\breve{P}\infty$ angehörig, so ergibt sich aus den Längen der Diagonalen seines verticalen Querschnittes unmittelbar das Verhältniss der Hauptaxe zur Makrodiagonale.

Bezeichnet a die Hauptaxe, b die Brachy-, und c die Makrodiagonale, so erhalten wir das Verhältniss der drei Axen, wie es der Bezeichnung der Krystallformen im Nachfolgenden zu Grunde liegt:

$$a : b : c = 1 : 0{,}6210 : 0{,}7622.\text{*)}$$

*) Fast mit demselben Rechte, mit welchem wir das Brachydoma von 74° 38′ als $\breve{P}\infty$ gewählt haben, um das Verhältniss der Hauptaxe zu den Diagonalen der Basis zu bestimmen, könnten wir von dem gleichfalls an fast allen Krystallen auftretenden Makrodoma mit einem Winkel von 102° 16′ an den Enden der Hauptaxe

Die relativen Dimensionen, in welchen die verschiedenen Schwerspathkrystalle nach den Richtungen der drei Axen entwickelt sind, variiren gar sehr; die Individuen erscheinen bald mehr säulen-, bald mehr plattenförmig. Bei den säulenförmigen Schwerspäthen tritt die Hauptaxe niemals als Axe der Säule auf, während bald die Makro-, bald die Brachydiagonale als solche erscheint, und bei den plattenförmigen Krystallen zeigt die Hauptaxe stets die geringste Ausdehnung, steht also auf der Ebene der Platten senkrecht.

Das eben angegebene Verhalten hängt mit dem Umstande zusammen, dass die Schwerspathkrystalle wohl niemals mit einem Ende ihrer Hauptaxe, sondern stets mit dem einen Ende einer der beiden anderen Axen (oder vielleicht auch einer zwischen ihnen liegenden Richtung) angewachsen sind und von hieraus sich weiter entwickelt haben.

Die Art des Anwachsens ist übrigens für die gleichgestalteten Krystalle desselben Fundortes eine ziemlich bestimmte. So erscheinen mit dem einen Ende der Brachydiagonale aufgewachsen die Krystalle aus der Auvergne, von Dufton, von Freiberg u. A., während von einem Endpunkte der Makrodiagonale ihre Entwickelung begonnen haben die Krystalle von Przibram (wenigstens die Mehrzahl), Horzowitz, Ründerroth, Bräunsdorf, Brand, Marienberg u. A.

Die Rücksicht auf die Art der Entwickelung oder des Wachsthums, deren Einfluss auch auf die elektrischen Verhältnisse später als sehr maassgebend sich herausstellen wird, ist es wohl gewesen, welche mehrere Mineralogen veranlasst hat, den Schwerspathkrystallen eine andere als die oben von mir gewählte Stellung zu geben, so dass einige die zuvor als Makrodiagonale, andere die als Brachydiagonale bezeichnete Axe zur verticalen oder Hauptaxe genommen haben. *)

(das nach der oben getroffenen Wahl das Zeichen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ erhält,) ausgehen und dasselbe als $\bar{P}\infty$ auffassen; es würde dies zur Annahme einer nur halb so langen Hauptaxe, als oben angegeben, führen; es wäre dann $a : b : c = 1 : 1,2408 : 1,5232$.

*) Mit den elektrischen Erscheinungen würde es sich sehr gut vertragen, wenn man die Schwerspathkrystalle je nach der Art ihres Wachsthums auf zwei verschiedene Weisen stellte; nur dürfte dann die Consequenz erfordern, für die Krystalle jeder der beiden Abtheilungen eine besondere Grundgestalt anzunehmen.

2. Krystallgestalten.

An den Krystallen des Schwerspathes sind bis jetzt folgende Gestalten beobachtet worden:

1) **Grundpyramide**: P.
2) **Pyramiden der Hauptreihe**: $\frac{1}{8}P$, $\frac{1}{5}P$, $\frac{1}{4}P$, $\frac{1}{3}P$, $\frac{1}{2}P$, $\frac{2}{3}P$.
3) **Brachydiagonale Pyramiden**: $\breve{P}2$.
4) **Makrodiagonale Pyramiden**: $\bar{P}2$, $\frac{3}{2}\bar{P}2$.
5) **Hauptprisma**: ∞P.
6) **Brachydiagonale verticale Prismen**: $\infty\breve{P}\frac{3}{2}$, $\infty\breve{P}2$, $\infty\breve{P}3$.
7) **Makrodiagonale verticale Prismen**: $\infty\bar{P}\frac{3}{2}$, $\infty\bar{P}2$, $\infty\bar{P}3$, $\infty\bar{P}4$.
8) **Brachydiagonale horizontale Prismen oder Brachydomen**: $\frac{1}{8}\breve{P}\infty$, $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, $2\breve{P}\infty$.
9) Makrodiagonale horizontale Prismen oder Makrodomen: $\frac{1}{8}\bar{P}\infty$, $\frac{1}{5}\bar{P}\infty$, $\frac{1}{4}\bar{P}\infty$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$, $\frac{3}{2}\bar{P}\infty$.
10) Flächenpaar senkrecht gegen die Hauptaxe $0P$.
11) Flächenpaar senkrecht gegen die Makrodiagonale $\infty\breve{P}\infty$.
12) Flächenpaar senkrecht gegen die Brachydiagonale $\infty\bar{P}\infty$.

3. Durchgänge.

Ausser den oben erwähnten drei vollkommenen Durchgängen parallel mit $0P$ und ∞P existirt in den Schwerspathkrystallen eine weniger vollkommene Spaltbarkeit parallel $\infty\breve{P}\infty$, die jedoch in einzelnen Fällen sehr deutlich ist; in noch geringerem Grade tritt ein Durchgang parallel $\infty\bar{P}\infty$ auf.

4. Optische Axen.

Die optischen Axen der Schwerspathkrystalle liegen im brachydiagonalen Hauptschnitte; die Brachydiagonale ist die Axe der grössten Elasticität und mit ihr bilden die optischen Axen einen Winkel von ungefähr 38°.

5. Hemimorphismus.

Bereits in meiner letzten Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases*) habe ich erwähnt, dass beim Schwer-

*) Diese Abhandlungen Bd. XIV. S. 372.

spathe ebenso wie beim Topase scheinbar hemimorphische Bildungen vorkommen, und es ist eine derartige an einem Duftoner Krystalle beobachtete Gestaltung vor Kurzem auch schon von Reuss*) beschrieben worden.

Der von Reuss beobachtete, etwa drei Zoll lange, lichtgraue, säulenförmige Krystall war parallel der Brachydiagonale von den Flächen $0P$ und $\breve{P}\infty$, sowie auf der einen Seite von einer sehr unebenen, gleichsam gekerbten Fläche $\infty\breve{P}\infty$ begrenzt; auf der anderen Seite fehlte die entsprechende Fläche. An dem einen Ende der Brachydiagonale trug er, sehr unsymmetrisch ausgebildet, die Flächen $\bar{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, nebst Flächen von ∞P; ausserdem zeigten sich auf einer Seite noch Spuren der Flächen $\frac{1}{2}P$. Am andern Ende dagegen wurde die Fläche $\infty\bar{P}\infty$, sowie die Flächen ∞P, $\infty\bar{P}2$ und $\infty\bar{P}3$ in mehrfacher oscillatorischer Wiederholung beobachtet.

Mir selbst liegen sieben Krystalle, drei von Dufton und vier aus der Auvergne vor, an denen das eine Ende der Brachydiagonale eine andere Bildung zeigt, als das gegenüberliegende. Fünf derselben sind auf den beifolgenden Tafeln abgebildet worden.

Der erste Krystall von Dufton (Taf. III. Fig. 16 stellt ihn in halber linearer Grösse dar) von mehr weisslicher als graulicher Farbe, 7 Centimeter in der Richtung der Brachydiagonale messend, gleicht sehr dem von Reuss beschriebenen. Parallel mit der Brachydiagonale wird er, wie jener, von den Flächen $0P$, $\breve{P}\infty$ und einer gleichsam gekerbten Fläche $\infty\breve{P}\infty$, die ebenfalls nur auf der einen Seite (in der Zeichnung *A* auf der rechten) sich zeigt, begrenzt. An dem einen Ende der Brachydiagonale finden sich die Flächen $\bar{P}\infty$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\frac{1}{8}\bar{P}\infty$ (letztere Gestalt jedoch nur mit einer Fläche auf der oberen Seite), sowie mässig grosse Flächen von ∞P, die auch in der Mitte der von $\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kante nochmals einen einspringenden Winkel bilden;**) dagegen wird das andere Ende vorzugsweise von den etwas mangelhaft und sehr ungleich***) entwickelten Flächen ∞P gebildet, auf denen oscilla-

---

*) Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. 59. 1869 (Aprilheft).

**) Diese Einkerbung der horizontalen Kante kommt bei den Duftoner Krystallen öfter vor.

***) Die eine der Flächen ∞P an diesem zweiten Ende der Brachydiagonale

torisch kleine Flächen von $\infty\bar{P}2$ und $\infty\bar{P}3$ sich zeigen; auch erscheint an diesem zweiten Ende auf den vorspringenden Leisten wiederholt die Fläche $\infty\bar{P}\infty$. Während das erste Ende zu einer horizontalen Kante zugeschärft ist, läuft das zweite in eine verticale Kante aus.

Der zweite Krystall von Dufton (Taf. III. Fig. 45 in natürlicher Grösse abgebildet) gleicht im Allgemeinen dem vorhergehenden; doch ist er kleiner, seine Ausdehnung in der Brachydiagonale beträgt nur 4 Centimeter. An dem einen zu einer horizontalen Kante zugeschärften Ende der Brachydiagonale liegen die Flächen $\bar{P}\infty$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P; jedoch erscheint von $\bar{P}\infty$ nur eine Fläche auf der in der Projection *A* dargestellten Seite, und besitzen die Flächen ∞P sehr ungleiche Grössen. Das andere Ende der Brachydiagonale endigt infolge seiner Begrenzung durch eine grosse und eine kleine Fläche von ∞P, auf denen wiederholt sehr kleine Flächen von $\infty\breve{P}\frac{3}{2}$ und $\infty\bar{P}\infty$ auftreten, in einer verticalen Kante. Die bei dem vorhergehenden Krystalle beschriebene gekerbte Fläche $\infty\breve{P}\infty$ zeigt sich nur auf dem der grossen Fläche ∞P (am zweiten Ende) benachbarten Theile der horizontalen makrodiagonalen Seitenkante.

Der dritte Krystall von Dufton (Taf. III. Fig. 47 in halber linearer Grösse abgebildet) misst in der Richtung der Brachydiagonale mehr als 8 Centimeter und ist rauchgrau von Farbe. Parallel mit der Brachydiagonale wird er nur von den Flächen $0P$ und $\breve{P}\infty$ begrenzt. An dem einen in eine horizontale Schneide auslaufenden Ende der Brachydiagonale finden sich grosse Flächen von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ nebst einer mangelhaft gebildeten Fläche $\bar{P}\infty$; ferner kleine Flächen ∞P und an verschiedenen Stellen noch kleinere Flächen von P und $\infty\bar{P}\infty$. Das andere Ende der Brachydiagonale erhält durch eine grosse Fläche ∞P; eine mässig grosse Fläche $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auf der oberen Seite und durch eine mangelhafte Ausbildung auf der unteren Seite mehr die Gestalt einer Spitze; es finden sich an ihm ausserdem noch Flächen von $\frac{1}{3}P$, P, $\infty\bar{P}2$ und $\infty\bar{P}\infty$.

Bei den Auvergner Krystallen zeigt sich die verschiedene Ausbildung der beiden Enden der Brachydiagonale gewöhnlich darin, dass, während das eine Ende derselben durch die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$

misst nach der horizontalen Richtung in grösster Breite 36^{mm}, die andere nur 8^{mm}, und zwar liegt die grössere Fläche auf der Seite, wo sich die gekerbte Fläche $\infty\breve{P}\infty$ findet.

zu einer scharfen Schneide ausgebildet ist, am anderen Ende ausser $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ noch die Flächen von $\bar{P}\infty$ und öfter auch die Flächen ∞P erscheinen;*) dabei sind bisweilen die Flächen des zweiten Endes wenig glänzend, während die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ am ersten Ende starken Glanz zeigen (Taf. IV. Fig. 56 und 57). Mitunter treten die Flächen $\bar{P}\infty$ nicht an den Enden des Krystalles, sondern an den Enden der stellenweise aufgelegten Platten auf (Taf. IV. Fig. 55).

Wollte man solche Abweichungen von der Symmetrie, wie die eben beschriebenen, als eine hemimorphische Ausbildung in der Richtung der Brachydiagonale auffassen, so würde man beim Schwerspathe auch einen Hemimorphismus nach der Hauptaxe und nach der Makrodiagonale annehmen müssen; denn es kommen öfter die Flächen $\bar{P}\infty$, ebenso die Flächen stumpferer Makrodomen und verschiedener Pyramiden in Bezug auf die Hauptaxe nur auf einer Seite vor, und ein Gleiches gilt von der Fläche $\infty\breve{P}\infty$ und den Flächen mehrerer Pyramiden in Bezug auf die Makrodiagonale.

Ich kann hier nur wiederholen, was ich bereits in meiner Abhandlung über den Topas**) ausgesprochen habe, dass die beschriebenen Bildungen in keiner Weise auf einen wahren Hemimorphismus, wie wir solchen beim Turmalin, Kieselzinkerz u. s. w. finden, hinweisen, sondern zufälligen störenden Einflüssen ihre Entstehung verdanken. Es stehen diese Unsymmetrien mit dem elektrischen Verhalten der Krystalle in Beziehung,***) bedingen aber nicht absolut, wie der wahre Hemimorphismus beim Turmalin und Kieselzinkerz, eine entgegengesetzte Polarität an den verschieden gestalteten Enden.

6. Beschaffenheit der Flächen.

Ueber den Glanz der Flächen lassen sich keine allgemeinen Bestimmungen geben; er ist bei den verschiedenen Krystallen sehr verschieden.

Bei den Duftoner Krystallen erscheinen die Flächen $\bar{P}\infty$ ge-

*) Uebrigens gibt es auch Krystalle, bei welchen die Flächen $\bar{P}\infty$ an beiden Enden der Brachydiagonale sich finden.

**) Diese Abhandlungen Bd. XIV. S. 371 ff.

***) So ist z. B. an den beiden Auvergner Krystallen (Nr. 56 und 57) das mit den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ versehene Ende der Brachydiagonale beträchtlich schwächer negativ elektrisch als das andere, welches nur die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ trägt.

wöhnlich horizontal gestreift und matt. Die Flächen $\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$ bestehen öfter aus blossen Spitzen oder Kanten, und diese Bildung lässt auch die Flächen ∞P matt und seidenglänzend erscheinen.

Die Flächen der Auvergner Krystalle sind meistens nicht vollkommen eben, sondern zeigen stellenweise mehr oder weniger ausgedehnte und dicke aufgelegte Platten; sehr häufig besitzt das freie Ende der Brachydiagonale eine solche Auflagerung, in welcher es gleichsam wie in einem Schuhe steckt.

Bisweilen erscheinen einzelne Krystallflächen gekrümmt, wie z. B. bei manchen Horzowitzer Schwerspäthen.

II. Thermoelektrisches Verhalten der Schwerspathkrystalle.

Um die Mittheilung der Resultate meiner Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes möglichst kurz und übersichtlich zu gestalten, werde ich, so viel irgend thunlich, wie dies auch früher in den analogen Fällen beim Bergkrystalle und beim Topase geschehen ist, die bildliche Darstellung zu Hülfe nehmen, und daher alle Einzelheiten, welche sich durch die Zeichnung darstellen und aus dieser auch wieder durch blosse Anschauung entnehmen lassen, im Texte nicht besonders erwähnen.

Die Krystalle des Schwerspathes sind auf den beifolgenden vier Tafeln entweder in ihren Verticalprojectionen (also von der oberen und von der unteren Seite gesehen) oder in ihren Netzen, oder in beiden Weisen, oder auch einige Theile in der einen, und die übrigen in der anderen Weise abgebildet worden, und die Beifügung der krystallographischen Zeichen *) einzelner Flächen wird in Fällen, wo solches etwa nöthig sein sollte, leicht die nöthige Orientirung geben. Zu einer solchen sollen auch die über die einzelnen Abbildungen gesetzten Buchstaben *A* bis *E* dienen. Es bezeichnen die beiden Buchstaben *A* und *B* stets die beiden Verticalprojectionen (*A* von der oberen, *B* von der unteren Seite gesehen); *C* bezeichnet ein vollständiges Netz des Krystalles; *D* ist ein Stück eines solchen

*) Ist eine Fläche ∞P keine natürliche Krystallfläche, sondern nur ein mit ∞P paralleler Durchgang, so habe ich das Zeichen ∞P in eine Klammer eingeschlossen, [∞P].

Netzes, nämlich das Netz der an den Enden der Makrodiagonale gelegenen Flächen ∞P, und *E* die Abbildung der an dem einen Ende häufig vorhandenen mehr oder weniger regelmässigen Bruchfläche. Um in dem Falle, wo nur die Projectionen *A* und *B* abgebildet sind, die elektrische Vertheilung auf den verticalen Seitenflächen darstellen zu können, sind diese verticalen Seitenflächen öfter neben die Projection *A* gezeichnet worden, und es müssen die gezeichneten Flächen ∞P als um ihre mit der oberen Fläche 0P gebildete Kante nach aufwärts gedreht gedacht werden. In diesen Zeichnungen ist die Art der elektrischen Polarität durch Farben und gewöhnlich auch ihre Stärke durch Zahlen *) dargestellt worden; die röthliche Farbe bezeichnet die positiven, die grünliche die negativen Zonen.

Um die einzelnen Flächen des verticalen Prismas ∞P bezeichnen zu können, soll im Texte die Bezeichnung derselben durch Hinzufügung der Zahlen 1 bis 4 zu dem krystallographischen Zeichen und zwar in der folgenden Weise geschehen. Denken wir den Krystall vor uns aufgestellt, mit seiner Hauptaxe vertical und mit seiner Brachydiagonale auf uns zu gerichtet, so mögen die Zahlen in nachstehender Reihenfolge gewählt werden: $\infty P_{,}1$ für die Fläche rechts vorn, $\infty P_{,}2$ rechts hinten, $\infty P_{,}3$ links hinten und $\infty P_{,}4$ links vorn.

Derselbe Uebelstand, welcher den früheren Beobachtungen über die thermoelektrischen Erscheinungen am Bergkrystalle und am Topase hemmend entgegentrat, nämlich der Mangel an möglichst vollkommenen, ringsum ausgebildeten Krystallen, macht sich bei den Untersuchungen über die analogen Vorgänge beim Schwerspathe in noch stärkerem Grade fühlbar. Es ist einem Einzelnen selbst bei jahrelangem Sammeln nicht möglich, ein nur einigermassen vollständiges Material zu erlangen; um so mehr fühle ich mich verpflichtet, denjenigen Herren, welche bedeutenden mineralogischen Sammlungen vorstehen und mich durch Leihung geeigneter Krystalle in zuvorkommendster Weise unterstützt haben, meinen Collegen Herrn Geheimen Bergrath Naumann und Herrn Professor Zirkel, sowie Herrn Geheimen

*) Die elektrische Spannung ist stets an sehr vielen Punkten (gegen hundert und darüber) der Oberfläche eines Krystalles gemessen worden; in die Zeichnungen sind aber nur so viel Zahlen eingeschrieben, als zu einer allgemeinen Darlegung der Intensitätsverhältnisse nothwendig schien.

Regierungsrath G. Rose in Berlin, Herrn Professor Ritter v. **Zepharovich** in Prag, Herrn Professor **Girard** in Halle, Herrn Professor **Sandberger** in Würzburg, Herrn Professor **Weisbach** und Herrn Akademie-Inspector **Stelzner** in Freiberg (gegenwärtig Professor in Cordova) meinen verbindlichsten Dank auszusprechen.

Im Eingange dieser Abhandlung habe ich bereits den Einfluss des Wachsthums und der Krystallform auf das elektrische Verhalten der Schwerspathkrystalle angedeutet. Um nun jenen Einfluss möglichst klar hervortreten zu lassen, werde ich im Nachfolgenden als Haupteintheilungsprincip die Art des Wachsens der Schwerspathkrystalle wählen; in den so gebildeten beiden Hauptabtheilungen erfolgt die weitere Gruppirung nach den Krystallformen, und in diesen Gruppen erst sind die gleichgestalteten Krystalle desselben Fundortes zusammengestellt. Nur in einem Falle habe ich zur besseren Darstellung gewisser Uebergänge im elektrischen Verhalten Krystalle eines und desselben Fundortes in die zweite Hauptabtheilung gestellt, obschon drei derselben Nr. 34, 35 und 36 wegen ihrer Bildung und ihres elektrischen Verhaltens der ersten hätten zugewiesen werden müssen.

A. Erste Abtheilung.

Das Wachsthum der Krystalle dieser ersten Abtheilung hat im Allgemeinen in der Richtung der Makrodiagonale statt gefunden. Die Krystalle stellen fast stets in der Richtung der Makrodiagonale mehr oder weniger verlängerte Säulen dar; ihre Bildung ist gewöhnlich von dem einen Ende der genannten Diagonale aus erfolgt, seltener hat sie von einem in der Mitte des Krystalles liegenden Ansatzpunkte sich nach beiden Seiten hin erstreckt.

Wir können die Krystalle dieser Abtheilung aber weiter in drei Gruppen trennen: 1) in solche, bei denen die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ an den Enden der Brachydiagonale, und die Flächen ∞P an den Enden der Makrodiagonale zum Durchschnitt kommen; 2) in solche, bei denen wohl die Flächen ∞P an den Enden der Makrodiagonale zum Durchschnitt kommen, dagegen nicht mehr die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ an den Enden der Brachydiagonale, wo entweder auch die Flächen ∞P sich schneiden, oder eine Abstumpfung durch $\infty\bar{P}\infty$ eintritt; und 3) in solche, bei denen wie in der ersten Gruppe die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ oder $\bar{P}\infty$ an den Enden der Brachydiagonale, dagegen an den Enden

der Makrodiagonale anstatt ∞P die Flächen $\breve{P}\infty$ zum Durchschnitt gelangen. In der ersten Gruppe finden wir also an den Enden der Brachydiagonale horizontale, und an den Enden der Makrodiagonale verticale Kanten; in der zweiten Gruppe liegen an den Endpunkten beider Diagonalen verticale, und in der dritten an den Endpunkten beider Diagonalen horizontale Kanten.

α. Erste Gruppe, mit horizontalen Kanten an den Enden der Brachydiagonale, und mit verticalen Kanten an den Enden der Makrodiagonale.

Die hauptsächlichen Begrenzungsflächen für die Krystalle dieser ersten Gruppe liefern die Gestalten $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $0P$ und ∞P. Die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ schneiden sich auf der vorderen und hinteren Seite stets in einer horizontalen, und die Flächen ∞P auf der rechten und linken Seite in einer verticalen Kante. Je nach der Grösse der Flächen $0P$ erscheinen die Säulen als mehr oder weniger plattgedrückte Tafeln. Oefter treten zu den genannten Gestalten noch untergeordnet hinzu die Flächen $\breve{P}\infty$, bisweilen auch P und $\infty\breve{P}\infty$.

Häufig laufen die Krystalle an den Enden der Makrodiagonale in mehrere verticale Schneiden aus, so dass der gesammte Krystall sich als ein Aggregat von parallel neben einander liegenden in der Richtung der genannten Diagonale verlängerten Säulen darstellt.

Grösse, Farbe und Durchsichtigkeit der Krystalle dieser Abtheilung ist namentlich nach den verschiedenen Fundorten sehr verschieden.

Die elektrische Erregung ist gewöhnlich stark, in einzelnen Fällen sogar beträchtlich.

Es wird die Darstellung der Resultate der Beobachtungen wesentlich abkürzen und die Uebersicht sehr erleichtern, wenn ich das Gesetz der Vertheilung und die durch Verletzungen oder unvollkommene Bildungen in denselben hervorgerufenen Modificationen zuvor im Allgemeinen angebe, ehe ich auf die Beschreibung der einzelnen Krystalle eingehe.

Da die elektrischen Erscheinungen beim Erwärmen die umgekehrten von den beim Erkalten auftretenden sind, so werde ich zur Vereinfachung der Mittheilung, ebenso wie in den früheren, analoge Vorgänge darstellenden Abhandlungen nur die während des Erkaltens beobachteten Polaritäten namhaft machen.

Bei vollständigen Krystallen (Nr. 1, 2, 3 und 4) sind die Mitten der beiden Flächen 0 P in grösserer oder geringerer Ausdehnung positiv; nach den Enden der Makrodiagonale hin geht aber auf diesen Flächen die positive Spannung in die negative über, welche letztere sich über die daselbst von den Flächen ∞P gebildete verticale Kante, sowie über die diesen Kanten benachbarten Theile der Flächen ∞P fortsetzt. Der übrige grössere Theil der Flächen ∞P erscheint positiv, und es breitet sich diese positive Elektricität bisweilen auch über die anliegenden Theile der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und der von ihnen gebildeten horizontalen Kanten aus. Die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sammt den von ihnen gebildeten horizontalen Kanten sind negativ, jedoch greift, wie eben erwähnt, bisweilen die positive Spannung von den Flächen ∞P auf die angrenzenden Theile der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ über.

Legen wir einen Hauptschnitt durch die Hauptaxe und die Brachydiagonale, so wechseln den vorstehenden Angaben gemäss in ihm die Elektricitäten vier Mal; an den Enden der Hauptaxe finden wir positive und an den Enden der Brachydiagonale negative Polarität. Dasselbe gilt von einem durch die Hauptaxe und die Makrodiagonale gehenden Hauptschnitte. In einem durch den Mittelpunkt des Krystalles parallel mit der Basis geführten Hauptschnitte dagegen treffen wir auf einen achtfachen Wechsel der Elektricitäten: während die Kanten an den Enden der Brachy- und ebenso der Makrodiagonale negativ sind, zeigen die zwischen ihnen liegenden Flächen ∞P positive Spannung.

Durch Anwachsen und Verletzung entstehen nun in der eben angegebenen Vertheilung der elektrischen Polaritäten gewisse Aenderungen.

Wird ein vollständiger Krystall in einer gegen die Makrodiagonale senkrechten Ebene, welche, um von einem bestimmten Falle auszugehen, etwa um $^1/_3$ der Länge dieser Diagonale von dem einen, und um $^2/_3$ von dem anderen Ende derselben absteht, durchgebrochen: so zeigt das kleinere Stück (vergl. den Krystall Nr. 8) auf seinen beiden Flächen 0 P nur negative Elektricität, die vom ausgebildeten Ende gegen das verbrochene hin an Stärke abnimmt, während das grössere Stück (vergl. die Krystalle Nr. 5 und 6) auf dem an dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale gelegenen Theile der

Flächen 0 P negative, dagegen weiterhin, in der früheren Mitte, positive Polarität darbietet.*)

Ebenso verhalten sich selbstverständlich auch Krystallbruchstücke, welche an dem einen Ende der Makrodiagonale angewachsen gewesen und dann abgebrochen worden sind; die Krystalle Nr. 5, 6 und 8 stellen gerade solche Bruchstücke dar. Infolge des Zerbrechens, vielleicht auch schon infolge des Anwachsens, scheint eine grössere Ausbreitung der positiven Elektricität von den Flächen ∞P über die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und die von ihnen gebildeten horizontalen Kanten einzutreten; besitzen diese Kanten nur eine geringe Länge (Nr. 8), so zeigen sie sich in ihrer ganzen Erstreckung positiv, jedoch von dem ausgebildeten Ende nach dem verbrochenen hin in abnehmender Stärke; ist ihre Länge grösser (Nr. 5 und 6), so tritt die negative Polarität in der Nähe des verbrochenen Endes noch hervor. Auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ nimmt im Einklange mit dem Vorstehenden die Ausbreitung der positiven Spannung von dem ausgebildeten Ende nach dem verbrochenen hin, ab.

Werden an den Enden der Makrodiagonale die mit ∞P parallelen Durchgänge angeschlagen, so dass daselbst eine von ihnen gebildete verticale Kante entsteht, so sind diese Durchgangsflächen je nach den Umständen entweder in ihrer ganzen Ausdehnung positiv (Nr. 10), oder es tritt ausserdem auf der von ihnen gebildeten Kante nebst den angrenzenden Theilen der Flächen ∞P noch eine schmale negative Zone, wie im vollständigen Krystalle, auf (Nr. 6). Ist das eine Ende der Makrodiagonale durch eine gegen dieselbe nahe senkrechte Fläche verbrochen, so zeigt diese Bruchfläche entweder in ihrer ganzen Ausdehnung positive Spannung (Nr. 8) oder es erscheint diese positive Elektricität nur auf dem mittleren grösseren Theile, während kleinere an die von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten grenzende Stücke, entsprechend der Polarität dieser Kanten, sich negativ zeigen (Nr. 5, 7, 12 und 14).

Beträchtliche Verletzungen, und ebenso mangelhafte Ausbildung einer von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kante lassen

*) Die Ausdehnung der negativen und der positiven Zonen hängt, ebenso wie bei vollständigen Krystallen, von Modificationen in der Bildungsweise ab, die sich bis jetzt noch der Beobachtung entziehen.

daselbst (Nr. 2 und 11) anstatt der negativen die positive Elektricität hervortreten.

Den Einfluss der Verletzungen der Flächen 0 P, sowie das Verhalten der Durchgangsflächen 0 P habe ich wegen Mangel an geeigneten Krystallen nur unvollkommen ermitteln können. Bei einem durchsichtigen Krystalle von Przibram (Nr. 11), der sich durch seine starken elektrischen Spannungen auszeichnete, zeigten die durch die Mitte desselben gehenden Durchgangsflächen 0 P (Fig. 11 *F* und *G*) positive Elektricität, und zwar in abnehmender Intensität vom verbrochenen zum ausgebildeten Ende der Makrodiagonale hin, so dass an diesem letzteren Ende selbst bereits eine schwache negative Polarität auftrat. Bei einem andern Krystallbruchstücke von Brand bei Freiberg (Nr. 15) zeigten die ebenfalls durch die Mitte gehenden Durchgangsflächen 0 P nur am verbrochenen Ende der Makrodiagonale etwas mehr oder weniger ausgedehnte positive Stellen, während der grösste Theil ihrer Fläche negativ war, und zwar abnehmend gegen das ausgebildete Ende der Makrodiagonale hin.

a) Krystalle von Przibram in Böhmen.

Krystall Nr. 1.

Der Krystall Nr. 1, welchen ich ebenso wie die beiden nächstfolgenden der Güte des Herrn v. Zepharovich verdanke, ist Fig. 1 *A* und *B* in zwei Projectionen in natürlicher Grösse und Fig. 1 *C* in seinem Netze in zweifach linearer Vergrösserung abgebildet worden.*) Bei den Projectionen ist die Hauptaxe gegen die Ebene des Papieres senkrecht gestellt, und die Zeichnungen *A* und *B* gehören so zu einander, dass, wenn wir den Krystall zuerst in der Lage *A* nehmen, die Lage *B* durch eine Umdrehung von 180° um eine mit der Brachydiagonale parallele und durch das rechte Ende der Makrodiagonale gelegte Axe erhalten wird.**)

Die Begrenzungen des Krystalles Nr. 1 bilden vorzugsweise die Flächen ∞P, 0 P und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$; ferner finden sich einzelne Flächen von

*) Das Zeichen $\frac{1}{1}$ auf den Figurentafeln bedeutet, dass die Abbildung den Krystall in natürlicher Grösse darstellt; $\frac{2}{1}$ zeigt eine doppelt lineare Vergrösserung, $\frac{1}{2}$ eine auf die Hälfte (linear) und $\frac{1}{4}$ eine auf ein Viertel (linear) reducirte Grösse an.

**) Die obigen Bemerkungen gelten auch von den Zeichnungen der folgenden Krystalle.

P, $\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$. Der Krystall ist vollkommen farblos, durchsichtig, und ringsum ziemlich vollständig ausgebildet, jedoch mit Ausnahme eines Theiles der unteren Fläche 0 P. Auf der rechten Seite löst er sich in zwei grössere Individuen *) mit verticalen Schneiden auf und an dem vorderen Individuum ist die rechte Hälfte etwas nach oben geknickt.

Während am rechten Ende des Krystalles in Fig. 1 *A* **) jedes der beiden verwachsenen Individuen in eine ziemlich lange verticale Kante ausläuft, an denen sich keine oder nur geringe Spuren von $\breve{P}\infty$ finden, erscheinen diese Flächen $\breve{P}\infty$ am linken Ende, und namentlich auf der unteren Seite grösser, so dass dieses linke Ende fast als eine Spitze sich darstellt.

Die positiv elektrische Spannung ist auf der oberen Fläche 0 P stärker und weiter verbreitet als auf der unteren; denn während auf der oberen Seite die positive Zone quer über die ganze Fläche 0 P hinweggeht, ist sie auf der unteren auf die Mitte der Fläche 0 P beschränkt, so dass die nach den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ hin gelegenen Ränder neben dieser Mitte negativ sind.

Auf den Flächen ∞P nimmt die positive Elektricität von den negativen an den Enden der Makrodiagonale gelegenen verticalen Kanten nach den von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten hin zu, und greift zum Theil etwas auf diese Flächen und Kanten über.

Die hintere horizontale, von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildete Kante ergiebt sich bei specieller Prüfung, d. h. wenn sie allein aus dem Kupferfeilicht herausragt, in ihrer ganzen Länge negativ, die vordere dagegen ist zwar auch in dem grössten Theile ihrer Länge negativ, zeigt jedoch am linken Ende bereits positive Spannung.

Krystall Nr. 2.

Fig. 2 *A* und *B* stellen die Projectionen des Krystalles in natürlicher, Fig. 2 *C* das Netz in doppelt linearer Vergrösserung dar.

Der Krystall Nr. 2 wird von denselben Flächen begrenzt, wie der

---

*) Ausser den beiden grösseren lassen sich durch ihre Endigungen noch mehrere kleinere Individuen erkennen.

**) Die Benennungen rechts und links beziehen sich stets auf die mit *A* bezeichnete Projection.

vorhergehende und ist ebenfalls vollkommen farblos und durchsichtig. Er ist vollständig ausgebildet, mit Ausnahme der hinteren links gelegenen Theile der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$. Die beiden Enden der Makrodiagonale sind in völlig gleicher Weise zu verticalen Schneiden entwickelt.

Infolge der zuvor bezeichneten Verletzung und unvollkommenen Ausbildung der hinteren horizontalen Kante ist dort die negative Polarität fast vollständig durch die positive verdrängt worden. Mit diesem Umstande hängt auch die unsymmetrische Lage der positiven Zone auf der oberen Fläche 0P zusammen. Während die hintere horizontale verbrochene Kante überall positiv ist, zeigt die vordere gut ausgebildete nur auf einer kurzen Strecke der rechten Seite positive, dagegen in dem übrigen Theile negative Elektricität. Auf den vorderen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ nimmt nach specieller Untersuchung die negative Spannung nach der von ihnen gebildeten horizontalen Kante hin ab.

Krystall Nr. 3.

Fig. 3 *A* und *B* stellen die Projectionen in natürlicher, Fig. 3 *C* das Netz in doppelt linearer Vergrösserung dar. Der Krystall zeigt dieselben Flächen wie die beiden vorhergehenden; doch ist er in seiner Masse weniger rein und in der linken Hälfte auf der hintern Seite nur sehr mangelhaft ausgebildet. Letzterer Umstand verhindert das Auftreten der negativen Polarität am linken Ende der Makrodiagonale.

Krystall Nr. 4.

Fig. 4 *C* stellt das Netz dieses Krystalles in doppelt linearer Vergrösserung dar. Derselbe wird von denselben Flächen begrenzt, wie die vorhergehenden, und gleicht den beiden ersten an Farblosigkeit und Durchsichtigkeit. Er ist ungefähr in der Mitte von einem anderen kleineren Krystalle durchwachsen und trägt auf der hinteren Seite noch mehrere sehr kleine Krystallgruppen. Infolge dieser Verwachsungen kann die positive Zone auf der oberen Fläche 0P nicht beobachtet werden, dagegen herrscht auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ der hinteren Seite die positive Polarität vor, und auch die von diesen Flächen gebildete Kante erscheint, soweit sie sich beobachten lässt, positiv.

Krystall Nr. 5.

Fig. 5 *A* und *B* stellen die Projectionen dieses Krystalles, *D* das Netz der Flächen ∞P am rechten und *E* die Bruchfläche am linken Ende in halber linearer Grösse dar. Der Krystall gehört dem Berliner Museum; er ist eine Combination der Gestalten $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, ∞P und $\breve{P}\infty$; nach der Richtung der Makrodiagonale erscheint er aus zwei zum Theil verschmolzenen Individuen zusammengesetzt. Am linken Ende ist er von einer unebenen auf der Makrodiagonale nahe senkrecht stehenden Bruchfläche *E* begrenzt, an welche sich auf der vorderen Seite eine kleine Durchgangsfläche ∞P anschliesst. Die Masse des Krystalles ist unrein und zum Theil rissig; die Unreinheit, Undurchsichtigkeit und gelbliche Färbung nehmen nach dem verbrochenen Ende hin zu.

Krystall Nr. 6.

Fig. 6 *A* und *B* stellen die Projectionen des Krystalles Nr. 6, *D* das Netz der Flächen ∞P am rechten, *E* das Netz der Durchgangsflächen am linken Ende in natürlicher Grösse dar. Der Krystall zeigt dieselben Gestalten wie der vorhergehende. Am linken Ende, mit welchem er aufgewachsen gewesen, wird er gegenwärtig von zwei, mit ∞P parallelen Durchgangsflächen begrenzt. Nach diesem linken Ende hin wird die Durchsichtigkeit geringer und tritt eine etwas gelbliche Färbung ein.

Krystall Nr. 7.

Der dem Prager Museum gehörige und Fig. 7 in natürlicher Grösse dargestellte Krystall zeigt eine Combination von $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P; er ist nur am rechten Ende der Makrodiagonale ausgebildet; an dem linken Ende hat er angesessen, und ist in einer mit dem vorderen linken Durchgange ∞P (also mit $\infty P,4$) parallelen Fläche abgebrochen worden; jedoch zeigt er am linken Ende der hinteren von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten Kante bereits ein sehr kleines Stück der Krystallfläche $\infty P,3$. Während die rechte Hälfte des Krystalles vollkommen farblos und durchsichtig ist, beginnt die linke Hälfte von der Mitte aus trüber zu werden, und bleibt in der Nähe der Durchgangsfläche [$\infty P,4$] kaum durchscheinend. Am vorderen und hinteren Rande der letztgenannten Durchgangsfläche zeigt

sich negative Polarität, während der mittlere Theil positiv ist. Auf den Flächen 0 P nimmt die negative Elektricität von rechts nach links (auf die Projection *A* bezogen) sehr beträchtlich ab.

Krystall Nr. 8.

Gleich dem Vorhergehenden wird dieses Bruchstück eines wasserhellen Krystalles nur von den Flächen 0 P, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und 0 P begrenzt; am linken Ende ist es in einer unebenen, ungefähr auf der Makrodiagonale senkrechten Fläche abgebrochen. Fig. 8 stellt dasselbe in natürlicher Grösse dar.

Mehrere andere aus Przibram stammende Krystalle stimmten in ihrem Verhalten mit den im Vorstehenden beschriebenen elektrischen Vertheilungen überein; ich halte eine specielle Darstellung der an ihnen beobachteten Erscheinungen daher für überflüssig, weil ich hoffe, dass die zuvor mitgetheilten Resultate ein klares Bild über die elektrischen Vorgänge an den erkaltenden Schwerspäthen dieses Fundortes geben. Indess bedürfen noch drei Krystalle einer besonderen Erwähnung.

Krystall Nr. 9.

Fig. 9 *A* und *B* stellen die Projection des Krystalles Nr. 9, und Fig. 9 *D*, *D* die Netze der an den Enden der Makrodiagonale liegenden Krystallflächen ∞P in natürlicher Grösse dar. Der Krystall gehört dem Berliner Museum und wird ebenso wie die letztvorhergehenden nur von den Flächen 0 P, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P begrenzt; er zeichnet sich durch die vollkommene Ausbildung beider Enden der Makrodiagonale aus. Ungefähr in der Mitte der hinteren von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kante ist er an ein Haufwerk fremder, zumeist aus Kalkspath bestehender Krystalle angewachsen, und von hier aus ziehen sich trübe weissliche Streifen quer durch die sonst farblose und klare Masse des Krystalles hindurch.

Die elektrische Vertheilung stimmt mit der auf vollständig ausgebildeten Krystallen (Nr. 1—4) beobachteten überein, ausser dass bei specieller Prüfung die vordere von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildete horizontale Kante in ihrer ganzen Länge positiv erscheint; dem entsprechend wächst dann auf den vorderen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ die negative Spannung von dieser Kante aus nach den mit den Flächen 0 P gebildeten Kanten hin. Es ist dies Hervortreten der positiven

Elektricität auf der ganzen Länge der vorderen Kante jedenfalls eine Folge der Durchwachsung mit trüben Streifen, wie ja auch auf der hinteren Seite infolge des Anwachsens nicht blos die Kante, sondern auch ein grosses Stück der freien Theile der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ positiv erscheint.

Krystall Nr. 10.

Der Fig. 10 *C* in natürlicher Grösse dargestellte Krystall ist dem Freiberger Museum entliehen, und zeigt ausser den beim Vorhergehenden genannten Gestalten noch kleine Flächen $\acute{P}\infty$, ist aber in seiner Masse weniger rein und klar als Nr. 9. Nur das rechte Ende der Makrodiagonale wird von Krystallflächen ∞P und $\check{P}\infty$ begrenzt; an seinem linken Ende bilden zwei mit ∞P parallele Durchgänge die Begrenzung.

Sein elektrisches Verhalten gleicht im Allgemeinen dem bei Bruchstücken beobachteten; doch ist auffallend die starke Ausbreitung der positiven Polarität über die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, wie sie bei einem Bruchstücke von dieser Länge sonst nicht wohl vorzukommen pflegt, und sodann die Abnahme der negativen Elektricität in der Mitte der oberen Fläche 0P, wo sogar, wenn der ganze Krystall bis auf diese Stelle von Kupferfeilicht bedeckt ist, sich eine sehr geringe positive Spannung beobachten lässt. Die obere Fläche 0P verhält sich also wie die entsprechende Fläche eines vollständigen Krystalles. Leider lässt sich in keiner Weise erkennen, ob etwa früher das linke, jetzt von Durchgängen begrenzte Ende gleichfalls ausgebildet war, wenn auch weniger vollkommen, und diese Durchgänge, um eine regelmässigere Gestalt zu erzeugen, ziemlich nahe unter den natürlichen Flächen angeschlagen wurden. In der Mitte der unteren Fläche 0P spricht sich jene Abnahme der negativen Polarität weniger deutlich aus.

Krystall Nr. 11.

Der Krystall Nr. 11 war nur auf der vordern und rechten Seite vollkommen ausgebildet; auf der hinteren Seite bildete die Begrenzung eine unebene, zum Theil dem Durchgange $\infty \acute{P} 3$ folgende Fläche; an dem linken Ende fand sich eine kleine Bruchfläche.

Die in Fig. 11 *A* und *B* eingetragenen Beobachtungen zeigen die elektrische Vertheilung an; dieselbe stimmt mit den zuvor beobachteten

überein und zeichnet sich durch ihre Stärke aus. Die Bruchflächen am hinteren und ebenso am linken Ende sind positiv.

Es gelang, den Krystall parallel dem Durchgange 0P fast genau in seiner Mitte zu zersprengen. *F* stellt den am oberen Stücke und *G* den am unteren Stücke entstandenen Durchgang 0P dar.*) Beide Durchgänge zeigen sich stark, zum Theil sehr stark positiv, und zwar nimmt die Intensität der positiven Spannung vom verbrochenen linken Ende gegen das ausgebildete rechte Ende und ebenso von der ausgebildeten vordern Kante nach dem hinteren verbrochenen Rande hin ab, so dass bereits neben der von den Flächen ∞P am rechten Ende gebildeten Spitze eine schwache negative Polarität auftritt.

b) Krystalle aus Marienberg.

Krystall Nr. 12.

Bei Marienberg sind Schwerspathkrystalle gefunden worden, welche an Gestalt den zuvor beschriebenen Przibramern gleichen; sie werden begrenzt von 0P, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P, und bestehen aus einer Verwachsung mehrerer in der Richtung der Makrodiagonale verlängerten Säulen; ihre Masse ist rauchgrau und nur durchscheinend. Ringsum ausgebildete Krystalle sind mir nicht vorgekommen.

Es wird genügen, nur einen der beiden untersuchten und in ihrer elektrischen Vertheilung übereinstimmenden Krystalle abzubilden, um den Nachweis zu führen, dass diese Vertheilung dieselbe ist, wie die auf ähnlichen Przibramer Bruchstücken beobachtete.

Fig. 12 *A* und *B* stellen die beiden Projectionen dieses Krystalles, *D* das Netz der Flächen ∞ P am rechten Ende und *E* die Bruchfläche am linken Ende in halber linearer Grösse dar.

Der Krystall ist auf der linken Seite von einer, gegen die Makrodiagonale etwas schief stehenden, ziemlich eben geschliffenen Fläche begrenzt.

c) Krystalle aus der Umgegend von Freiberg.

Krystall Nr. 13.

Von zwei in ihrem Aussehen gleichen Krystallen ist der eine, dem Halle'schen Museum gehörig, als von der Grube Neuer Morgen-

*) Zur Andeutung des Durchganges ist das Zeichen 0P neben *F* und *G* von einer Klammer umgeben [0P].

stern stammend bezeichnet, während der zweite dem hiesigen Cabinet entnommene keine Bezeichnung seines Fundortes trägt; es unterliegt aber keinem Zweifel, dass beide derselben Grube entstammen. Ihre Masse ist grau und nur durchscheinend; sie zeigen die Flächen $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, ∞P und $\breve{P}\infty$. Auf den Bruchflächen am linken Ende der Makrodiagonale tritt bei beiden der Durchgang $\infty\breve{P}\infty$ sehr deutlich hervor.

Es wird auch hier genügen, nur den einen Krystall abzubilden (Fig. 13), und ich wähle dazu den dem Halle'schen Cabinet gehörigen, da er, wenn auch etwas mehr verletzt, doch weniger zusammengesetzt ist als der andere Krystall, welcher hauptsächlich von zwei parallel der Makrodiagonale verwachsenen säulenförmigen Individuen gebildet ist. Das linke Ende des Fig. 13 in halber linearer Grösse abgebildeten Krystalles ist verbrochen und theils von einem mit ∞P theils von einem ziemlich ebenen mit $\infty\breve{P}\infty$ parallelen Durchgange begrenzt; auf der vorderen Seite ist die kurze horizontale von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildete Kante stark verletzt.

Bei beiden Krystallen finden sich an den ausgebildeten rechten Enden der Makrodiagonale plattenförmige Auflagerungen, die bei dem Fig. 13 dargestellten Krystalle besonders auf der Fläche $\infty P_{,}2$ hervortreten.*)

Krystall Nr. 14.

Die Abbildungen in Fig. 14 stellen die natürliche Grösse dar. Der aus Bräunsdorf bei Freiberg stammende Krystall ist auf der linken Seite infolge des Durchganges $\infty\breve{P}\infty$ von einer ziemlich ebenen, auf der Makrodiagonale nahe senkrecht stehenden Fläche begrenzt. Seine Masse erscheint am rechten Ende farblos und klar, wenn auch rissig, wird aber nach dem linken Ende hin gelblich und undurchsichtig.

Der Krystall stellt ein Aggregat zahlreicher parallel der Makrodiagonale verwachsener Individuen dar; jedoch ist, wie dies auch bei den Krystallen der früheren Fundorte vorkommt, der Parallelismus der

*) Während sich bei den in der Richtung der Makrodiagonale gewachsenen Krystallen diese Platten am freien Ende der Makrodiagonale finden, treffen wir ähnliche Auflagerungen bei den Auvergner Krystallen, welche in der Richtung der Brachydiagonale gewachsen sind, an den Enden der letztgenannten Diagonale, wie dies bereits oben S. 281 erwähnt worden.

Axen nicht in absoluter Strenge gewahrt. β ist ein Bruchstück eines quer durchgewachsenen fremden Krystalles. Die untere Fläche 0P (Zeichnung *B*) hat zum Theile angelegen.

Der Krystall ist ausgezeichnet durch die ungemein starke elektrische Erregung, welche alle an den übrigen Schwerspäthen beobachtete an Intensität übertrifft. Das Goldblättchen des Elektrometers wird durch die elektrischen Spannungen auf der rechten Hälfte der oberen Fläche 0P und auf den vorderen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ ganz aus dem Gesichtsfelde getrieben, was durch das doppelte Minus-Zeichen (=) angedeutet werden soll. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass die starke elektrische Erregung gerade mit der sehr zusammengesetzten Beschaffenheit im Zusammenhange steht; in gleicher Weise zeigten auch beim Topase die gewöhnlichen faserigen brasilianischen Krystalle eine viel grössere elektrische Intensität als z. B. die sächsischen oder die aus dem Ilmen- und dem Borschtschowotschnoi Gebirge stammenden Krystalle, welche ein einziges Individuum darstellen.

Krystall Nr. 15.

Der von Brand bei Freiberg stammende Krystall ist auf seiner Oberfläche, besonders auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\breve{P}\infty$ und ∞P rauh und zum Theil mit kleinen Zellkieskrystallen bedeckt; infolge der hierdurch verminderten Isolation ist auf diesen Flächen nur eine sehr geringe elektrische Spannung zu beobachten. Dieselbe stimmt übrigens mit der an den vorhergehenden Krystallen beobachteten überein. Die Masse des Krystalles ist sehr unrein, theils gelblich weiss, theils bräunlich.

Der Krystall wurde ungefähr in seiner Mitte parallel mit dem Durchgange 0P zersprengt; Fig. 15 *F* stellt die an dem oberen und *G* die an dem unteren Stücke entstandene Durchgangsfläche 0P in halber Grösse dar. Beide Flächen zeigen vorzugsweise negative Polarität, nur nach dem verbrochenen Ende hin tritt eine grössere oder kleinere positive Zone auf; die negative Spannung nimmt nach dem ausgebildeten Ende hin an Stärke ab.

d) Krystalle von Horzowitz in Böhmen.

Krystall Nr. 16.

Von dem in der Ueberschrift genannten Fundorte standen mir zwei dem Halle'schen Museum gehörige Krystalle zur Verfügung,

welche in ihrer Form mit den bisher beschriebenen übereinstimmen. Ihre Farbe ist lichter grau als bei den Marienberger Krystallen; auch erscheinen sie etwas durchsichtiger als die letztgenannten. Sie zeigen die Flächen von $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, ∞P, und P. In Fig. 16 ist der eine derselben in halber linearer Grösse abgebildet, und die auf ihm beobachtete elektrische Vertheilung dargestellt.

Der andere nicht abgebildete Krystall von fast gleicher Länge, aber infolge der Ausdehnung der Flächen $0P$ grösserer Breite als der erste, ist an dem freien Ende seiner Makrodiagonale durch Absprengen der verticalen Kante parallel dem Durchgange $\infty\breve{P}\infty$, der sich ziemlich gut entwickelt zeigt, verletzt. Die Länge des daselbst abgesprengten Stückes in der Richtung der Makrodiagonale beträgt ungefähr 15 mm. Die hierdurch entstandene ziemlich ebene Fläche besitzt auf ihrer einen Hälfte noch negative Elektricität, wie sie der früher vorhanden gewesenen Kante entspricht, während der übrige Theil so wie die beiden angrenzenden Flächen ∞P (die eine Krystall-, die andere Durchgangsfläche) positiv sind.

β. Zweite Gruppe, mit verticalen Kanten an den Enden der Makro- und Brachydiagonale.

In dieser zweiten Gruppe betrachten wir diejenigen Krystalle, bei denen am Ende der Brachydiagonale nicht mehr die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, sondern anstatt ihrer die Flächen ∞P zum Durchschnitte kommen, so dass daselbst eine verticale Kante entsteht, die auch wieder durch die Flächen des Prismas $\infty\bar{P}2$ stumpfer gemacht oder durch die Flächen $\infty\bar{P}\infty$ gerade abgestumpft sein kann. An den Enden der Makrodiagonale trägt die von ∞P gebildete verticale Kante oben und unten kleine Flächen von $\breve{P}\infty$ und erscheint auch öfter noch durch die Fläche $\infty\breve{P}\infty$ abgestumpft.

Die Krystalle dieser Gruppe stimmen in der Art ihres Wachsthums mit denen der vorhergehenden überein, wie dies für einen Theil die infolge des Auftretens der Flächen $\infty\bar{P}\infty$ nach der Richtung der Makrodiagonale verlängert erscheinende Gestalt nachweist, für einen anderen Theil aber daraus sich ergiebt, dass bei etwas unvollkommener Bildung eine Zusammensetzung aus einzelnen Individuen parallel der Makrodiagonale durch die Auflösung in Spitzen an den

Enden dieser Diagonale so wie durch daselbst auftretenden treppenartigen Bildungen sichtbar wird.

Was nun das elektrische Verhalten dieser Krystalle betrifft, so lässt sich dasselbe aus der für die erste Gruppe angegebenen Vertheilung leicht herleiten.

Mit dem Verschwinden der von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten an den Enden der Brachydiagonale verschwindet daselbst auch die negative Polarität und an ihrer Stelle tritt auf den von ∞P gebildeten verticalen Kanten die positive auf. Die negative Elektricität zieht sich auf die von diesen Kanten entfernteren Theile der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und die Flächen $0P$ zurück; auf den letzteren ist als Compensation für die vergrösserte Ausdehnung der positiven Spannung auf den Seitenflächen, soweit die bisherigen Untersuchungen reichen, die bei vollständigen Krystallen der ersten Gruppe in der Mitte beobachtete positive Elektricität durch die negative unterdrückt worden.

Auf den an den Enden der Makrodiagonale gebildeten verticalen Kanten bleibt entweder die negative Spannung, welche daselbst bei den vollständigen Krystallen der ersten Gruppe auftritt, noch in geringer Ausdehnung sichtbar, oder diese Kanten erscheinen unelektrisch und selbst schwach positiv. Hiermit in Uebereinstimmung nimmt auf den vollkommen ausgebildeten Seitenflächen ∞P die positive Elektricität von den Enden der Makrodiagonale nach den Enden der Brachydiagonale hin an Intensität zu (vergl. Krystall Nr. 17, 19 u. 21).

a) Krystall von Horzowitz.

Krystall Nr. 17.

Fig. 17 *A* und *B* stellen die beiden Projectionen dieses Krystalles, und Fig. 17 *D* und *D* die Netze der an den Enden der Makrodiagonale gelegenen Flächen ∞P und $\infty\bar{P}2$ in halber linearer Grösse dar. Der dem Berliner Museum gehörige Krystall Nr. 17 stammt von Horzowitz und gleicht dem zuletzt beschriebenen der ersten Gruppe Nr. 16 in der Beschaffenheit seiner Masse so vollständig, dass beide wohl derselben Grube entnommen sind. Der Krystall Nr. 17 ist ringsum ausgebildet und ziemlich vollkommen. Nur auf der Fläche $\infty P_{,}3$ haben sich nach dem linken Ende hin kleinere Schwerspathplatten, zum Theil in nicht ganz paralleler Stellung aufgelegt, und

auf der unteren Seite treten an den Enden der Makrodiagonale mehrere Absätze oder treppenförmige Bildungen auf.

Die hauptsächliche Begrenzung bilden die Flächen $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P; dazu treten noch kleine Flächen $\breve{P}\infty$, die auf allen Absätzen wiederkehren; sodann erscheint auf der hinteren Seite rechts eine grosse vertical gestreifte Fläche $\infty\breve{P}2$, während am vorderen Ende der Brachydiagonale die beiden Flächen der Gestalt $\infty\bar{P}2$ nur eine sehr schmale Zustumpfung der von ∞P gebildeten verticalen Kante bilden.

Auf den Flächen $0P$ finden sich die negativen Maxima in der Nähe der nach der hinteren und der rechten Seite hin liegenden Ränder; die schwache negative Spannung an den vorderen Rändern hängt mit der Verbreitung der positiven Spannung über die vorderen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ zusammen. Die negative Elektricität auf den verticalen Kanten am Ende der Makrodiagonale nimmt infolge der unvollkommneren Bildung auf der unteren Seite von oben nach unten an Intensität ab.

b) *Krystall unbekannten Fundortes.*

Krystall Nr. 18.

Den Fundort dieses Krystalles, dessen Netz Fig. 18 *D* in natürlicher Grösse darstellt, vermag ich aus seiner äusseren Beschaffenheit nicht zu bestimmen. Die Masse desselben ist weisslich grau und fast durchsichtig. Auf der unteren Seite löst er sich an beiden Enden der Makrodiagonale in mehrere Spitzen auf. Am hinteren Ende der Brachydiagonale ist er zum Theil verbrochen, zum Theil mangelhaft ausgebildet; am vorderen Ende desselben treffen die beiden Flächen ∞P in einer nur sehr kurzen Kante zusammen.

Wie die Zeichnung Fig. 18 nachweist, ist an dem vorderen ausgebildeten Ende der Brachydiagonale die negative Polarität verschwunden, die positive beherrscht dort die Kante und die kleinen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, so dass sie selbst noch schwach auf die untere Fläche $0P$ übergreift. An den beiden Enden der Makrodiagonale besteht ebenso wie bei dem vorhergehenden Krystalle die negative Spannung noch fort.

c) Krystalle von Felsöbanya.

Die nachfolgenden drei Krystalle, oder vielmehr Bruchstücke Nr. 19, 20 und 21 sind einer sehr schönen aus Felsöbanya stammenden und dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Druse entnommen. Die Figuren 19, 20 und 21 stellen die beiden Projectionen in natürlicher Grösse dar; neben die Projection *A* sind die seitlichen Krystallflächen ∞P und Durchgangsflächen $[\infty P]$ gezeichnet. Ihre Masse ist farblos und theilweise völlig klar und durchsichtig, theilweise aber auch rissig und etwas trübe. Sie werden begrenzt von den Gestalten $0P$, ∞P, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}\infty$, $\breve{P}\infty$ und $\infty\breve{P}\infty$. Die Flächen $\infty\bar{P}\infty$ zeigen oft eine beträchtliche Ausdehnung, während sie in anderen Fällen nur als schmale Abstumpfung auftreten; sie besitzen einen geringeren Glanz als die umliegenden Flächen $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$, ∞P und $0P$.

In elektrischer Beziehung sind die Flächen $0P$ negativ und die Krystallflächen ∞P positiv (mit wachsender Stärke von den Enden der Makrodiagonale gegen die Enden der Brachydiagonale hin).

Krystall Nr. 19.

Von den verticalen Seitenflächen sind als Krystallflächen vollständig ausgebildet die Flächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}2$, und die hintere Fläche $\infty\bar{P}\infty$. Die Fläche $\infty P_{,}3$ ist sehr mangelhaft vorhanden. Die vordere Fläche $\infty\bar{P}\infty$ zeigt blos am oberen Rande einen schmalen ebenen Streifen, während der grössere untere mit Gruben versehene Theil schief nach hinten geht. Der Krystall hat mit dem linken Ende der Makrodiagonale angesessen.

Auf der oberen Fläche $0P$ liegt ein kleiner dünner Krystall in nicht genau paralleler Stellung mit dem grossen; seine Makrodiagonale steigt nach rechts und seine Brachydiagonale nach vorn.

Der grosse farblose Krystall wird von einer durch die Mitte mit den Flächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}3$ parallel gelegten Ebene in zwei in Betreff ihrer Durchsichtigkeit verschiedene Hälften getheilt; die nach vorn und rechts gelegene Hälfte ist klar und durchsichtig, die nach hinten und links gelegene aber trübe und kaum durchscheinend.

Krystall Nr. 20.

Der Krystall ist parallel mit der Fläche $\infty P_{,}4$ (in der Richtung des mit ihr parallelen Durchganges) abgebrochen; es ist daher unter

den Seitenflächen nur die Fläche $\infty P_{,} 2$ vollständig vorhanden, $\infty P_{,} 1$ und $\infty P_{,} 3$ werden auf der linken Seite von dem Durchgange begrenzt; ausserdem ist $\infty P_{,} 3$, ebenso wie die hintere Fläche $\infty \bar{P} \infty$ nur unvollkommen ausgebildet.

Die Seitenfläche $\infty P_{,} 4$, auf welcher die negative Spannung auftritt, ist, wie zuvor angegeben, keine Krystallfläche, sondern ein Durchgang.

Krystall Nr. 21.

Der Krystall Nr. 21 ist auf der linken Seite theils in dem mit $\infty P_{,} 3$ parallelen Durchgange, theils unregelmässig abgebrochen. Unter den Seitenflächen ist also nur die Fläche $\infty P_{,} 1$ vollständig vorhanden, $\infty P_{,} 2$ und $\infty P_{,} 4$ sind nur Theile von Krystallflächen. Am vordern Ende der Brachydiagonale liegt ausser kleinen Flächen $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$ auch eine kleine Fläche $\infty \bar{P} \infty$, und an dem rechten Ende der Brachydiagonale ausser kleinen Flächen $\breve{P} \infty$ auch noch eine kleine Fläche $\infty \breve{P} \infty$.

γ. Dritte Gruppe, mit horizontalen Kanten an den Enden der Makro- und Brachydiagonale.

Bei den Krystallen dieser Gruppe treten die Flächen ∞P nur in geringer Grösse auf, und schneiden sich daher weder an den Enden der Makrodiagonale, noch auch der Brachydiagonale. An den Enden der Makrodiagonale bilden vielmehr die Flächen $\breve{P} \infty$ eine horizontale Kante, die öfter wieder durch eine Fläche $\infty \breve{P} \infty$ abgestumpft wird; an den Enden der Brachydiagonale liegt gleichfalls eine horizontale Kante, entweder durch den Durchschnitt der Flächen $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$ wie in der ersten Gruppe, oder durch den Durchschnitt der Flächen $\bar{P} \infty$ gebildet. Mit dem in grösserer Ausdehnung erfolgenden Auftreten der Flächen $\bar{P} \infty$ vermindert sich die Grösse der Flächen $0 P$ und zwar meistens bis zum gänzlichen Verschwinden.

Je nach dem Fehlen oder dem Vorhandensein grösserer Flächen $0 P$ lassen sich die Krystalle dieser Gruppe in zwei Unterabtheilungen zerlegen.

αα) Krystalle, bei denen die Flächen 0P ganz fehlen oder nur sehr klein sind.

Aus dieser Unterabtheilung lagen mir vier Krystalle vor: drei aus Przibram, dem Prager Museum gehörig, und einer aus Ründer-

roth in Westphalen, der Freiberger Sammlung angehörend. Alle vier sind vollkommen wasserhell und durchsichtig, und stellen in der Richtung der Makrodiagonale verlängerte Säulen vor, die sämmtlich an dem linken Ende dieser Diagonale abgebrochen sind. An dem rechten sehr gut ausgebildeten Ende der Makrodiagonale finden sich die Flächen $\breve{P}\infty$, ∞P, P und $\infty\breve{P}\infty$ in verschiedener Grösse. Parallel mit der Makrodiagonale laufen die Flächen $\bar{P}\infty$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und bisweilen auch sehr schmale Flächen 0 P.

Die Figuren 22, 23 und 24 stellen in *A* und *B* die Projectionen der drei Przibramer Krystalle in natürlicher, und in *C* die Netze derselben in doppelt linearer Vergrösserung dar.

Die von der Form der ersten Gruppe abweichende Bildung an den Enden der Makrodiagonale, wo infolge des Durchschnittes der Flächen $\breve{P}\infty$ eine horizontale durch eine Fläche $\infty\breve{P}\infty$ mehr oder weniger abgestumpfte Kante entsteht, bedingt an dieser Stelle eine Abweichung von dem elektrischen Verhalten jener Krystalle: auf dieser abgestumpften horizontalen Kante erscheint positive Elektricität, während in der ersten Gruppe die daselbst befindliche verticale Kante negativ war. Im Uebrigen stimmt aber die elektrische Vertheilung auf den vorliegenden Krystallen mit der auf analogen Bruchstücken der ersten Gruppe beobachteten überein.

Ist das Bruchstück nur kurz (Nr. 22), so erscheint (analog wie auf dem früheren Krystalle Nr. 8) auf der oberen und unteren Seite auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und der von ihnen an Stelle von 0 P gebildeten Kante nur die negative Elektricität, die sich auch über den grössten Theil der Flächen $\breve{P}\infty$ ausbreitet, so dass nur die am Ende der Makrodiagonale von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildete und durch $\infty\breve{P}\infty$ abgestumpfte Kante nebst den unmittelbar ihr anliegenden Theilen der Flächen $\breve{P}\infty$, wie bereits zuvor angegeben, positive Elektricität besitzt. Auf der vorderen und hinteren Seite dringt die positive Elektricität von dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale über die Flächen $\bar{P}\infty$ und die von ihnen gebildete horizontale Kante vor, und es nimmt die Intensität dieser positiven Spannung, ebenso wie bei den Bruchstücken der ersten Gruppe, von dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale gegen das verbrochene hin ab.

Ist das Bruchstück länger (Nr. 23 und 24), so tritt (analog wie bei den früheren Krystallen Nr. 5 und 6) die eben beschriebene Ver-

theilung nur auf der am ausgebildeten Ende der Makrodiagonale liegenden (also in den Zeichnungen *A* rechten) Hälfte ein, während auf der linken Hälfte oben und unten (d. h. auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und der von ihnen gebildeten Kante oder der daselbst noch vorhandenen kleinen Fläche 0 P) positive, und auf den Flächen $\bar{P}\infty$, sowie auf der von ihnen gebildeten horizontalen Kante negative Elektricität erscheint.

Die Bruchflächen am linken Ende sind entweder ganz positiv (analog wie bei Nr. 8) oder zeigen bei längeren Bruchstücken nur in dem mittleren grösseren Theile positive, auf den an die horizontalen von $\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten liegenden Theilen dagegen negative Spannungen (analog wie Nr. 5, 7, 12 und 14).

Da der Krystall von Ründerroth den Przibramern in elektrischer Beziehung genau gleicht, so wird die Abbildung der drei Przibramer Krystalle zum Nachweise der obigen Angaben genügen.

Krystall Nr. 22.

Die Fläche $\infty\breve{P}\infty$ am rechten Ende der Makrodiagonale ist nur schmal; am linken Ende zeigt die Bruchfläche, obwohl sie nahe parallel mit der Fläche $\infty P_{,}4$ verläuft, einen schön muscheligen Bruch und nur dicht an der von den vorderen Flächen $\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kante ist ein wenig von dem Durchgange ∞P sichtbar.

Krystall Nr. 23.

Auf der oberen Seite findet sich eine schmale Fläche 0 P; auf der unteren erscheint diese Fläche nur auf dem Absatze in der Nähe des ausgebildeten Endes der Makrodiagonale. Die an diesem Ende befindliche Fläche $\infty\breve{P}\infty$ ist breiter als beim vorhergehenden Krystalle.

Krystall Nr. 24.

Die Flächen 0 P sind bei diesem Krystalle vollständig verschwunden; die Fläche $\infty\breve{P}\infty$ a mausgebildeten Ende der Makrodiagonale ist schmäler als bei Nr. 23, aber breiter als Nr. 22.

ββ) Krystalle, auf denen die Flächen 0P in beträchtlicherer Grösse auftreten.

Das elektrische Verhalten gestaltet sich etwas verschieden, je nachdem bei den zu dieser Unterabtheilung gehörigen Krystallen die Flächen ∞P in mässig grosser oder nur in sehr geringer Ausdehnung auftreten.

a) Krystalle mit mässig grossen Flächen ∞P.

Die Vertheilung der Elektricität auf diesen Krystallen gleicht im Ganzen der auf entsprechenden kurzen Bruchstücken der ersten Gruppe beobachteten. Die positive Spannung verbreitet sich von den Flächen ∞P über die von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ (oder $\bar{P}\infty$) gebildete Kante und die grössten Theile dieser Flächen; die negative erstreckt sich von den Flächen 0P in abnehmender Stärke über die Flächen $\breve{P}\infty$, so dass die von diesen Flächen $\breve{P}\infty$ gebildete horizontale Kante entweder in ihrer ganzen Ausdehnung noch negativ ist, oder in ihrer Mitte unelektrisch (wie bei Krystall Nr. 26) oder selbst (wie bei Krystall Nr. 25) positiv erscheint.

a) Krystalle von Przibram.

Es standen mir zwei an dem linken Ende der Makrodiagonale verbrochene Krystalle zu Gebote. Beide zeigen in ihrer Gestaltung dieselbe Eigenthümlichkeit: legt man nämlich durch die von den Flächen $\breve{P}\infty$ am rechten ausgebildeten Ende der Makrodiagonale erzeugte horizontale Kante eine mit 0P parallele Ebene, so theilt diese die Krystalle in zwei horizontale Platten, von denen die obere sechs- bis achtmal dicker ist, als die untere. Bei dem Krystalle Nr. 25 sieht die untere Fläche 0P matt aus, als hätte sie angelegen; bei dem Krystalle Nr. 26 ist sie dagegen vollkommen glänzend.

Die Masse beider Krystalle ist in dem mittleren mit der Makrodiagonale parallelen Streifen bräunlich, und wird nach dem vorderen und hinteren Rande zu farblos. Bei dem Krystalle Nr. 25 ist die Durchsichtigkeit dieser weisslichen Ränder geringer als die der bräunlichen Mitte.

Krystall Nr. 25.

Die Fig. 25 *A* und *B* stellen die beiden Projectionen, *D* das Netz der am rechten Ende der Makrodiagonale gelegenen Flächen ∞P und

$\frac{1}{2}\bar{P}2$, und *E* die Bruchfläche am linken Ende in halber linearer Grösse dar. An diesem linken Ende ist der dem Berliner Museum gehörige Krystall von einer unebenen, ungefähr dem Durchgange $\infty\bar{P}\infty$ entsprechenden Fläche begrenzt; am rechten ausgebildeten Ende finden sich die Flächen der Pyramide $\frac{3}{2}\bar{P}2$. Die elektrischen Spannungen sind ziemlich stark.

Krystall Nr. 26.

Dieser Krystall, welcher Fig. 26 in natürlicher Grösse abgebildet ist, wird auf der linken Seite von zwei mit ∞P parallelen Durchgängen begrenzt. Am Ende der Brachydiagonale finden sich ausser $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auch kleine Flächen $\bar{P}\infty$.

b) Krystall von Marienberg.

Krystall Nr. 27.

Fig. 27 *C* stellt das Netz des Krystalles in natürlicher Grösse dar. Der vorliegende Krystall hat ein ganz anderes Aussehen als der Krystall Nr. 11; während Nr. 11 rauchgrau und nur durchscheinend ist, zeigt der Krystall Nr. 27 eine gelbliche Färbung und ziemliche Durchsichtigkeit; jedoch wird er nach dem linken verbrochenen und von zwei mit ∞P parallelen Durchgängen begrenzten Ende hin undurchsichtig. Die elektrische Erregung ist stark.

b) Krystalle mit kleinen Flächen ∞P.

Während bei den vorhergehenden Krystallen die positive Elektricität auf den Flächen ∞P hinreichenden Raum für ihre Entwickelung fand, und deshalb die von den Flächen $\breve{P}\infty$ an den Enden der Makrodiagonale gebildete horizontale Kante nebst diesen Flächen $\breve{P}\infty$ fast ganz negativ blieb, tritt bei den jetzt vorliegenden Krystallen, wo die Flächen ∞P klein sind und bisweilen fast ganz verschwinden, die positive Polarität (ebenso wie bei den Krystallen Nr. 22, 23 und 24, wo die Flächen ∞P gleichfalls nur eine sehr geringe Ausdehnung besitzen,) mehr oder weniger auf die von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildete Kante, sowie auf diese Flächen selbst über; sie dringt ferner, ebenfalls wie bei den Krystallen Nr. 22, 23 und 24 mehr oder weniger auf den von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten und auf diesen Flächen selbst vor.

Eigenthümliche Störungen in der Regelmässigkeit der elektrischen

Vertheilung treten bei mehreren der zu dieser Unterabtheilung gehörigen Przibramer Krystallen (wie Nr. 30 und 31) auf, indem auf den Flächen $0P$ die negative Elektricität nicht, wie bei den vorhergehenden Krystallen, von dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale nach dem verbrochenen Ende hin ab-, sondern zunimmt; öfter sind die an dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale gelegenen Theile dieser Flächen sogar positiv, und zeigen erst weiter nach dem verbrochenen Ende hin negative Spannung. Auch auf einzelnen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ zeigen sich gewisse Abweichungen von der bisher beobachteten elektrischen Vertheilung, indem positive Zonen in die sonst negativen Stellen eindringen, und auch wohl eine ganze Fläche $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ positiv erscheinen lassen.

a) Krystalle von Felsöbanya.

Krystall Nr. 28.

Die Zeichnungen Fig. 28 *A* und *B* stellen die beiden Projectionen in natürlicher Grösse dar. Der dem Berliner Museum gehörige Krystall Nr. 28 ist ringsum ausgebildet und besteht hauptsächlich aus zwei parallel der Makrodiagonale verwachsenen Individuen, von denen jedoch das kleinere wieder mehrfach zusammengesetzt ist. Seine Masse ist graulich weiss und durchscheinend, mit weisslichen den Flächen $\infty P_{,}3$ und $\infty P_{,}4$ parallelen Streifen.

Auf der vorderen Seite besitzen die Flächen ∞P *) noch eine mässige Grösse, und mit diesem Umstande hängt die negative Polarität auf den Flächen $\check{P}\infty$, wie sie namentlich auf den vorderen Theilen der Flächen $\check{P}\infty$ am rechten Ende erscheint, zusammen.

Krystall Nr. 29.

Die Abbildung Fig. 29 ist in natürlicher Grösse ausgeführt. Der Fundort dieses Krystallbruchstückes war nicht angegeben; dasselbe kann aber nach seiner ganzen Beschaffenheit, für welche besonders die eingesprengten Theilchen von Realgar charakteristisch sind, nur von Felsöbanya stammen. Seine Masse ist kaum durchscheinend; sein linkes Ende uneben verbrochen.

---

*) Neben den linken Flächen ∞P liegt noch eine Fläche von $\infty P\frac{3}{2}$.

b) Krystalle von Przibram.

Die Masse der betreffenden Krystalle, die wahrscheinlich mit Nr. 25 und 26 aus derselben Grube stammen, ist im Innern gelbbräunlich und unrein, wird aber nach den Rändern hin farbloser und durchsichtiger. Es mag die Abbildung zweier derselben genügen; beide Abbildungen geben die natürlichen Dimensionen.

Krystall Nr. 30.

Das linke Ende dieses Krystalles ist auf der hinteren Hälfte von einer ziemlich ebenen dem Durchgange $\infty\breve{P}\infty$ parallelen Fläche, auf der vorderen Seite von einer weniger ebenen dem Durchgange ∞P parallelen Fläche begrenzt. Da die Flächen ∞P am rechten ausgebildeten Ende nur klein sind, so nimmt die positive Elektricität die Flächen $\breve{P}\infty$ nebst den benachbarten Theilen der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ ein. Auf die eigenthümliche elektrische Vertheilung, welche die beiden Krystalle Nr. 30 und 31 zeigen, habe ich schon oben S. 305 aufmerksam gemacht.

Krystall Nr. 31.

Am linken verbrochenen Ende ist der Krystall von einer unebenen mit dem Durchgange $\infty P_{,}4$ parallelen Fläche begrenzt.

B. Zweite Abtheilung.

Die Krystalle der vorhergehenden ersten Abtheilung stellen meistens in der Richtung der Makrodiagonale mehr oder weniger verlängerte Säulen dar, haben, wenn sie nicht ringsum ausgebildet sind, mit dem einen Ende der genannten Diagonale am Gesteine aufgesessen, lösen sich an den Enden eben dieser Axe gewöhnlich in mehrere Schneiden auf und erscheinen aus zwei oder mehreren parallel derselben verwachsenen Individuen zusammengesetzt. Unter den Krystallen der jetzt zu behandelnden zweiten Abtheilung erscheint dagegen eine grosse Zahl (Krystalle von Dufton und aus der Auvergne) als in der Richtung der Brachydiagonale sehr beträchtlich verlängerte Säulen, die, wenn sie nicht ringsum ausgebildet sind, mit dem einen Ende der Brachydiagonale angewachsen waren. Ein anderer Theil der zu dieser Abtheilung gehörenden Krystalle stellt zwar nahe oder vollkommen rhombische Tafeln dar; dieselben zeigen aber gleichfalls ein in der Richtung der Brachydiagonale erfolgtes Wachsthum: es

liegt entweder der Ansatzpunkt noch deutlich an dem einen Ende dieser Diagonale (Nr. 37), oder es lösen sich die Krystalle an den Enden derselben in oft sehr zahlreiche Spitzen auf oder es finden sich daselbst wiederholte Absätze, während die Enden der Makrodiagonale rein und vollkommen ausgebildet sind (Nr. 33, 38, 39, 40, 42 und 44). Nur in einigen aus der Auvergne stammenden Krystallen (Nr. 68—72) erscheint eine nach der Makrodiagonale verlängerte Säulenform; doch lässt sich auch bei ihnen (vergl. S. 325) eine gleiche Beschaffenheit, wie bei den übrigen Krystallen dieser Abtheilung nachweisen.

Charakteristisch für die elektrische Vertheilung auf den Krystallen der ersten Abtheilung ist das Vorherrschen der negativen Polarität auf den Flächen 0P; bei den ringsum ausgebildeten Krystallen erscheint höchstens in der Mitte dieser Flächen eine positive Zone von geringer Ausdehnung; bei kurzen Bruchstücken fehlt dieselbe gänzlich, bei längeren tritt sie meistens nur in der Nähe des verbrochenen Endes auf den genannten Flächen (oder den an ihre Stelle getretenen Kanten) auf, und bildet nur in wenigen Krystallen (Nr. 5, 16, 23 und 24) eine etwas grössere Zone. Auf den Flächen ∞P wächst die positive Elektricität von dem Ende der Makrodiagonale nach dem Ende der Brachydiagonale hin.

In der jetzt zu behandelnden zweiten Abtheilung herrscht dagegen auf den Flächen 0P (oder den an ihre Stelle getretenen Kanten) die positive Elektricität vor. Andererseits zeigt sich auf den seitlichen Flächen ∞P die negative Polarität stärker und in anderer Weise vertheilt als auf den Krystallen der ersten Abtheilung; sie wächst auf ihnen in der Richtung von der Makrodiagonale nach der Brachydiagonale. Es haben also diese Flächen ∞P in der zweiten Abtheilung durch das Wachsthum nach der Brachydiagonale eine andere Beschaffenheit angenommen als in der ersten, wo das Wachsthum nach der Makrodiagonale stattfand. Durch diese Umstände erhält die gesammte Vertheilung der Elektricität auf den Krystallen der zweiten Abtheilung einen anderen Charakter als auf den Krystallen der ersten. Es kann, wie sich später zeigen wird, der Unterschied in der elektrischen Vertheilung auf den Krystallen der beiden Abtheilungen so weit gehen, dass auf entsprechenden Flächen

von Krystallen der ersten und der zweiten Abtheilung gerade entgegengesetzte Elektricitäten beobachtet werden.

Ich werde die Krystalle dieser zweiten Abtheilung in zwei Gruppen trennen, 1) in solche von vollkommen oder sehr nahe rhombischem Querschnitte, und 2) in solche, welche die Form von Säulen oder von mehr oder weniger dicken rectangulären Tafeln besitzen.

α. Krystalle von nahe rhombischem Querschnitte.

a) Krystalle von Töplitz.

Die Schwerspathkrystalle von Töplitz stellen eine Combination der Gestalten 0P, ∞P, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$ und $\breve{P}\infty$ dar. Ihre Masse ist gelblichbraun, von geringer Durchsichtigkeit.

Unter den fünf von mir untersuchten Krystallen ist nur einer (Nr. 32) ringsum ziemlich vollkommen ausgebildet; die übrigen vier (Nr. 33—36) zeigen eine eigenthümliche Bildung: es liegt nämlich, wie auf den angeschlagenen Durchgangsflächen sichtbar wird, innerhalb der gelblichbraunen Masse ein gelblichweisser undurchsichtiger Kern, dessen Begrenzungsflächen bei drei Krystallen den äusseren Krystallflächen genau parallel laufen, bei dem vierten (Nr. 35) aber in ihrer Richtung etwas abzuweichen scheinen.

Ein vollkommen ausgebildeter Krystall dieses Fundortes (Nr. 32) zeigt zwar im Allgemeinen dieselben elektrischen Pole, wie wir solche auf den vollständigen Krystallen von Przibram (Nr. 1—4) beobachtet haben, jedoch mit den schon zuvor angegebenen Modificationen.

Die Flächen 0P (Fig. 32) sind fast gänzlich positiv und es verbreitet sich auch diese positive Spannung mehr oder weniger auf die anliegenden Theile der Flächen $\breve{P}\infty$; dagegen findet sich auf den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ an den Enden der Brachydiagonale, ferner auf den an den Enden der Makrodiagonale von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildeten horizontalen Kanten nebst den Flächen $\breve{P}\infty$ oder wenigstens ihren an diese Kanten grenzenden Theilen, sowie auf dem grössten Theile der Krystallflächen ∞P negative Elektricität; nur auf den in der Nähe der eben bezeichneten Kanten gelegenen Theilen der Flächen ∞P erscheint noch positive Polarität in geringer Ausdehnung und Stärke. Sowohl die Enden der Makrodiagonale als

auch die Enden der Brachydiagonale sind also, ebenso wie bei den zuvor bezeichneten Przibramer Krystallen negativ.

Unter den unvollständigen Krystallen zeigt Nr. 33 noch deutlich die treppenförmige Bildung an dem Ende der Brachydiagonale, und gleicht daher auch in seiner elektrischen Vertheilung dem Krystalle Nr. 32. Dagegen ist an den drei übrigen, allerdings nur sehr unvollständigen Bruchstücken das eine vorhandene Ende der Brachydiagonale vollkommen gebildet, und Nr. 35 zeigt sogar eine Verlängerung nach der Makrodiagonale. Diese Bruchstücke scheinen also in die Form der ersten Abtheilung überzugehen und dem entspricht auch ihre elektrische Vertheilung: auf den Flächen 0P wird die positive Elektricität zurückgedrängt und kommt bei kürzeren Bruchstücken auch wohl gar nicht mehr zur Erscheinung; dagegen sind die Flächen ∞P wieder positiv und es verbreitet sich diese positive Polarität auch über die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ an dem ausgebildeten Ende der Brachydiagonale.

Die Krystalle Nr. 34, 35 und 36 hätten daher sowohl nach ihrer Bildung als auch nach ihrer elektrischen Vertheilung in die erste Abtheilung gestellt werden sollen; ich mochte sie aber von dem Krystalle Nr. 33, welcher ihnen in der Beschaffenheit seiner Masse völlig gleicht, nicht trennen, um den Uebergang der elektrischen Vertheilung deutlicher hervortreten zu lassen. Auf Nr. 32 erscheint die positive Elektricität auf den Flächen ∞P nur schwach in der Nähe der makrodiagonalen Enden; auf Nr. 33 hat sie sich schon weiter ausgedehnt, und auf Nr. 34, 35 und 36 verbreitet sie sich über die ganzen Flächen ∞P und selbst über die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$.

Als einer dieser Krystalle (Nr. 36) parallel dem Durchgange 0P in der Mitte zersprengt wurde, so zeigten die beiden Durchgangsflächen 0P (Fig. 36 *I* und *K*) negative Elektricität. Auf den angeschlagenen Durchgängen ∞P tritt vorzugsweise positive Spannung auf.

Krystall Nr. 32.

Der dem Freiberger Museum gehörige Krystall Nr. 32 ist ringsum ziemlich vollkommen ausgebildet; am mangelhaftesten erscheinen die untere Fläche 0P und die Fläche $\infty P_{,}3$. Fig. 32 *C* stellt sein Netz in natürlicher Grösse dar.

Krystall Nr. 33.

Der Krystall Nr. 33, dessen Netz Fig. 33 *C* nur in halber linearer Grösse gezeichnet worden, ist an Stelle der Fläche $\infty P_, 3$ von einem mit ihr parallelen Durchgange begrenzt; die Fläche $\infty P_, 4$ ist mangelhaft ausgebildet. In der Zeichnung stellt das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ auf dem Durchgange $\infty P_, 3$ den Umriss des oben erwähnten gelblichweissen Kernes dar. Auf der unteren Fläche 0 P und auf der Fläche $\infty P_, 2$ liegt eine undurchsichtige dünne Platte von hellerer Farbe als die übrige braungelbe Masse des Krystalles.

Krystall Nr. 34.

Die Flächen $\infty P_, 2$ und $\infty P_, 3$ sind Durchgänge; die Fläche $\infty P_, 4$ ist theils verbrochen, theils sehr mangelhaft ausgebildet. Das Rechteck $\alpha\beta\gamma\delta$ in den Durchgangsflächen $\infty P_, 2$ und $\infty P_, 3$ deutet den innern undurchsichtigen Kern an; er dringt, wie die Zeichnung in der Fläche $\infty P_, 2$ nachweist, ungefähr 3^{mm} tief ein. Das Netz ist in Fig. 34 *C* in natürlicher Grösse entworfen.

Krystall Nr. 35.

Die untere Fläche 0 P dieses Krystalles ist mangelhaft ausgebildet; die Flächen $\infty P_, 2$ und $\infty P_, 3$ sind etwas unebene Durchgangsflächen. Fig. 35 *C* stellt das Netz in natürlicher Grösse dar.

Krystall Nr. 36.

Der Krystall Nr. 36 war nur am vorderen und am rechten Ende theilweise ausgebildet; Fig. 36 *A* und *B* stellt ihn in seinen beiden Projectionen dar; die mit *H* bezeichneten seitlichen Flächen sind unebene Bruchflächen.

Er ward zunächst in der Richtung $\alpha\beta$ nach dem Durchgange $\infty P_, 3$ zersprengt; die an dem vorderen grössern Stücke entstandene Durchgangsfläche $\infty P_, 3$ (Fig. 36 *F*) war fast ganz positiv; die am kleineren Stücke entstandene Durchgangsfläche $\infty P_, 1$ (Fig. 36 *G*) dagegen in ihrem grössten Theile negativ.

Darauf wurde das vordere Stück in seiner Mitte parallel dem Durchgange 0 P zersprengt; beide so entstandenen Durchgangsflächen 0 P (*I* am oberen, *K* am unteren Stücke) waren negativ und zwar mit Bezug auf die Projection *A* in abnehmender Stärke nach rechts und nach hinten zu.

b) *Krystalle von Felsöbanya.*

Die Krystalle dieser Gruppe werden hauptsächlich von den Flächen 0 P und ∞ P begrenzt; nur untergeordnet treten die Gestalten $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, $\infty\breve{P}\infty$ und $\infty\bar{P}\infty$ auf. Ihre Masse ist weisslich- oder gelblichgrau gefärbt und mehr oder minder durchsichtig.

Auf ringsum ausgebildeten Krystallen wird folgende elektrische Vertheilung beobachtet: die grossen Flächen 0 P sind positiv, und zwar nimmt die positive Spannung von der Mitte nach den Rändern hin ab. Dagegen zeigen die Flächen ∞ P gewöhnlich überall negative Elektricität, deren Intensität von den Enden der Makrodiagonale nach den Enden der Brachydiagonale hin wächst; auch greift diese negative Elektricität zum Theil an den Rändern auf die Flächen 0 P über.

Ist ein solcher Krystall an den Seiten verbrochen, so findet sich auf den Flächen 0 P in der Nähe der verbrochenen Ränder starke positive Spannung; die durch den Bruch entstandenen Durchgangsflächen ∞ P bleiben je nach ihrer Lage zum vollständigen Krystalle entweder negativ oder gehen mehr oder weniger ins Positive über; dabei ändert sich die elektrische Spannung auf diesen Durchgangsflächen in der Weise, dass sie in negativem Sinne von den Enden der Makrodiagonale nach den Enden der Brachydiagonale hin wächst.

Andererseits habe ich aber Krystallbruchstücke (Nr. 43) beobachtet, bei denen die ausgebildeten Krystallflächen ∞ P zum grössten Theile positiv sind, und nur auf den in der Nähe der Enden der Makrodiagonale gelegenen Theilen sammt den daselbst befindlichen Flächen $\breve{P}\infty$ negative Elektricität auftritt. Eben diese negative Polarität erscheint dann auch auf den an die Krystallflächen ∞ P grenzenden Rändern der Flächen 0 P in etwas grösserer Ausdehnung als bei Krystallen, wo die Flächen ∞ P negativ sind. Der übrige Theil der Flächen 0 P bleibt positiv, und zwar in wachsender Spannung gegen die verbrochenen Ränder hin. Auf den durch Bruch entstandenen Durchgangsflächen ∞ P nimmt die positive Elektricität ab und geht mehr oder weniger in die negative über.

Wird ein Krystall dieser Gruppe in seiner Mitte parallel mit dem Durchgange 0 P zersprengt, so zeigen beide Durchgangsflächen in ihrer ganzen Ausdehnung negative Polarität.

Krystall Nr. 37.

Der ringsum ausgebildete Krystall Nr. 37, dessen beide Projectionen Fig. 37 in halber Grösse gezeichnet sind, trägt am hinteren Ende der Brachydiagonale noch ein Bruchstück des Gesteins, an welchem er festgesessen hat. Der mittlere Theil desselben erscheint durch eine von dem Anheftungspunkte ausgehende strahlige Imprägnation mit feinem Grauspiessglanzerze nahezu schwärzlichgrau, während der umliegende Rand farblos und ziemlich durchsichtig ist; aber auch der mittlere Theil ist in seiner Masse ebenso farblos und durchsichtig, und erhält das eben beschriebene Aussehen nur durch die inliegenden schwärzlichen Nadeln.

Die obere Fläche 0 P zeigt einen stärkeren Glanz als die untere, und besitzt, wohl im Zusammenhange damit, auch eine stärkere positive Spannung als die untere.

Krystall Nr. 38.

Die vier folgenden Krystalle sind von einer und derselben Druse abgebrochen worden. Das Netz Fig. 38 und die Projection Fig. 41 sind in natürlicher, die beiden Netze 39 und 40 aber in halber linearer Grösse gezeichnet worden.

Der Krystall Nr. 38 ist ringsum von Krystallflächen begrenzt, mit Ausnahme der Fläche $\infty P_{,}2$, welche von einem Durchgange gebildet wird.

Krystall Nr. 39.

Auch der Krystall Nr. 39 war von Krystallflächen begrenzt, nur bildete an Stelle der Fläche $\infty P_{,}2$ eine unregelmässige Bruchfläche mit ansitzenden fremden Krystallmassen die Begrenzung. Die untere Fläche 0 P und die Flächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}3$ zeigen Eindrücke von anderen Krystallen.

In Fig. 39 *C* sind die Beobachtungen an dem Krystalle in dem eben beschriebenen Zustande eingetragen. Später wurde derselbe in der Richtung $\alpha\beta$ parallel dem Durchgange ∞P zersprengt. Fig. 39 *F* stellt die an dem grösseren und Fig. 39 *G* die an dem kleineren Stücke entstandene Durchgangsfläche mit den auf ihnen beobachteten elektrischen Spannungen dar. Die mit gleichen Buchstaben bezeichneten Punkte haben vor der Zersprengung auf einander gelegen. Auf der Fläche *F* nimmt die negative Spannung von $\beta\beta'$ gegen $\alpha\alpha'$, und auf

der Fläche *G* von $\alpha\alpha'$ gegen $\beta\beta'$ hin zu. Auf beiden Durchgangsflächen wächst also die negative Intensität in der Richtung von dem Ende der Makrodiagonale nach dem Ende der Brachydiagonale, wie dies auch auf den unverletzten Krystallflächen stattfindet; denn während die Kante $\alpha\alpha'$ am grossen Stück am Ende der Brachydiagonale liegt, tritt die gleiche Kante $\alpha\alpha'$ am kleinen Stück an das Ende der Makrodiagonale.

Krystall Nr. 40.

Dieser Krystall ist auf der linken Seite unregelmässig verbrochen; die drei vorhandenen Flächen ∞P sind Krystallflächen. Die Flächen 0P zeigen Eindrücke anderer Krystalle.

Krystall Nr. 41.

An dem Krystallbruchstücke Nr. 41 waren nur die beiden Flächen 0P und die eine Seitenfläche, $\infty\bar{P}_{,}2$, Krystallflächen; die übrigen seitlichen Begrenzungen wurden theils von Durchgängen, theils von unregelmässigen Bruchflächen gebildet.

In Fig. 41 *A* ist nur die Ansicht der oberen Fläche 0P nebst der auf ihr beobachteten elektrischen Vertheilung abgebildet.

Der Krystall wurde später in seiner Mitte parallel mit 0P zersprengt; die beiden entstandenen Durchgangsflächen zeigten in ihrer ganzen Ausdehnung negative Spannungen.

Krystall Nr. 42.

Die Masse dieses Krystalles ist gelblicher als die der vorhergehenden und kaum durchscheinend. Fig. 42 stellt ihn wegen seiner ausserordentlichen Grösse nur in $\frac{1}{2}$ linearer Grösse dar. Er ist ringsum von Krystallflächen begrenzt, mit Ausnahme der Fläche ∞P$_{,}$3, welche von einem sehr ebenen Durchgange gebildet wird; ausserdem ist die Fläche ∞P$_{,}$4 mangelhaft ausgebildet. Bei α ist ein anderer Schwerspathkrystall eingewachsen. Das eine an der rechten Seite vorhandene Ende der Makrodiagonale ist vollkommen ausgebildet, während beide Enden der Brachydiagonale äusserst zahlreiche Spitzen und Absätze zeigen.

Krystall Nr. 43.

Die Masse dieses Bruchstückes, dessen Netz Fig. 43 *C* in halber Grösse dargestellt ist, kommt in ihrer Farbe den oben beschriebenen

Krystallen Nr. 38 bis 41 nahe, ist aber nur durchscheinend. Die Begrenzung wird von Krystallflächen gebildet mit Ausnahme der Flächen $\infty P_{,}3$ und $\infty P_{,}4$, welche durch Spaltung entstanden sind.

Auf der unteren Fläche 0P ist am Rande nach den Flächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}2$ hin die negative Elektricität stärker ausgebreitet als auf der oberen. Während bei den vorhergehenden Krystallen auf den Flächen ∞P die negative Elektricität in der Richtung von dem Ende der Makrodiagonale nach dem Ende der Brachydiagonale wuchs, nimmt auf der Fläche $\infty P_{,}1$ des vorliegenden Krystalles die positive Spannung in derselben Richtung ab, was also eine Aenderung der elektrischen Intensität auf diesen Flächen in gleichem Sinne darstellt. Auf den Durchgangsflächen $\infty P_{,}3$ und $\infty P_{,}4$ tritt die negative Elektricität in ziemlicher Ausdehnung hervor.

Das Fig. 43 *C* abgebildete Bruchstück war durch Zerspringen eines grösseren Krystallbruchstückes entstanden; ein dabei gebildetes zweites Bruchstück (in der Fig. 43 mit *F* bezeichnet) von nahe rhombischem Querschnitte hatte in der Länge $\alpha\beta$ an dem Fig. 43 *C* gezeichneten Bruchstücke angesessen. Da dieses zweite Bruchstück nahe der Mitte des Krystalles angehörte, so zeigten beide an ihm befindliche Krystallflächen 0P eine starke positive Spannung, die auch an den Rändern sich erhielt. Später zersprang dieses zweite Bruchstück *F* ungefähr in seiner Mitte parallel mit 0P; die beiden so entstandenen Durchgangsflächen 0P zeigten in ihrer ganzen Ausdehnung negative Polarität.

c) Krystall von Przibram.

Krystall Nr. 44.

Auch in Przibram finden sich Krystalle von derselben Form, wie die eben beschriebenen; sie stimmen in ihrer elektrischen Vertheilung mit den vorhergehenden Nr. 38—42 überein.

Der Krystall Nr. 44, dessen Netz Fig. 44 *C* in natürlicher Grösse darstellt, gehört dem Prager Museum; er ist graulich und kaum durchscheinend. Seine äussere Begrenzung wird überall von Krystallflächen gebildet, mit Ausnahme von $\infty P_{,}3$, welche durch Spaltung entstanden ist.

β. Säulenförmige oder rectanguläre tafelförmige Krystalle.

a) Krystalle von Dufton in England.

Die Krystalle von Dufton sind theils farblos und dann oft sehr rein und durchsichtig, theils mehr oder weniger rauchgrau und wenig durchsichtig oder nur durchscheinend. In grosser Ausdehnung treten bei ihnen die Flächen $0P$, $\breve{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auf, denen sich meistens nur in geringer Grösse die Flächen ∞P, $\bar{P}\infty$, $\frac{1}{8}\bar{P}\infty$ und $\infty\bar{P}\infty$ anschliessen.

Bei rechtwinklig tafelförmigen Krystallen (Nr. 53) sind öfter die rechten und linken Ränder (an den Enden der Makrodiagonale) in zahllose mehr oder weniger feine Spitzen aufgelöst; infolge dessen erscheinen die Flächen ∞P und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ völlig matt. Von dieser Bildung zeigen sich auch bei grösseren säulenförmigen Krystallen*) noch Andeutungen in dem mehr oder weniger gekerbten Zustande der von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildeten Kanten oder der sie abstumpfenden Flächen $\infty\breve{P}\infty$.

Oben S. 278 habe ich bereits erwähnt, dass die ringsum ausgebildeten Krystalle dieses Fundortes häufig an den Enden der Brachydiagonale eine verschiedene Gestaltung zeigen.

Die elektrischen Vorgänge gestalten sich auf den Duftoner Krystallen sehr einfach: die Flächen $0P$ und ein mehr oder weniger grosser Theil der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sind positiv; dagegen erscheinen die durch die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ oder $\bar{P}\infty$ an dem gut auskrystallisirten Ende der Brachydiagonale gebildeten horizontalen Kanten sammt den anliegenden Theilen der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ oder $\bar{P}\infty$ negativ; und eben diese negative Polarität findet sich meistens auch, jedoch nur in sehr geringer Stärke, auf den Flächen des Brachydomas $\breve{P}\infty$. Nur bei tafelförmigen Krystallen, und namentlich, wenn die an den Enden der Makrodiagonale liegenden horizontalen Kanten in zahlreiche Spitzen aufgelöst sind (Krystall Nr. 53), zeigt sich auf diesen Kanten die negative Elektricität in stärkerem Grade. Treten bei solchen Krystallen die matten Flächen ∞P in nicht zu geringer Grösse auf, so erscheint auf ihnen die positive Elektricität mit ziemlich grosser Intensität, während bei den säulenförmigen Krystallen die Flächen ∞P in das Bereich der negativen Polarität gezogen werden.

---

*) Siehe oben S. 278.

Wird ein ziemlich dicker Duftoner Krystall parallel mit dem Durchgange 0 P so gespalten, dass das eine Stück nur eine geringe Dicke besitzt, so erscheint an diesem Stücke die Durchgangsfläche 0P negativ; die Durchgangsfläche an dem grossen Stücke dagegen, welche an der eben zuvor genannten Durchgangsfläche des kleinen Stückes angelegen hatte, behält noch die positive Elektricität, wie solche sich auf der Krystallfläche 0P findet. Hat die Spaltung parallel 0P mehr nach der Mitte des Krystalles stattgefunden, so zeigt sich die Durchgangsfläche am kleineren Stücke, wie vorhin, negativ; an dem grösseren dagegen ist sie entweder in ihrer ganzen Ausdehnung ebenfalls negativ oder zeigt an der vorderen Seite des ausgebildeten Endes noch eine positive Zone.

Werden an einem ziemlich dicken Krystalle auf der hinteren Seite die Durchgänge ∞P angeschlagen, so erscheinen die Durchgangsflächen nebst der von ihnen gebildeten verticalen Kante positiv; bei tafelförmigen Krystallen dagegen zeigten sich diese Durchgänge bei einigen negativ, bei anderen positiv, was wohl mit ihrer Lage im ganzen Krystalle zusammenhängt.

Krystall Nr. 45.

Die Form dieses in natürlicher Grösse abgebildeten Krystalles ist bereits oben S. 279 genauer beschrieben worden.

Krystall Nr. 46.

Auch die Gestalt dieses Krystalles findet sich oben S. 278 näher angegeben. Die Zeichnungen stellen ihn in halber Grösse dar.

Krystall Nr. 47.

Die genauere Beschreibung seiner Form s. oben S. 279. Die Projectionen sind Fig. 47 in halber Grösse ausgeführt worden.

Auf dem mangelhaft ausgebildeten Theile der unteren Fläche 0P zeigt sich negative Elektricität.

Krystall Nr. 48.

Der Fig. 48 ebenfalls in halber Grösse abgebildete Krystall ist ringsum ausgebildet mit Ausnahme des hinteren Endes der Brachydiagonale, wo sich eine unebene Bruchfläche *H* findet.

Krystall Nr. 49.

Ein Krystall von ungefähr 6cm Länge, 2cm Breite und 2cm Dicke zersprang bei sehr starkem Erhitzen in einige grössere und zahllose kleinere Stücke. Die grösseren Stücke wurden einer genauen Untersuchung unterworfen, und ich lasse hier die Resultate der auf den Durchgangsflächen 0P bei vier derselben gemachten Beobachtungen folgen. Zuvor sei noch bemerkt, dass der Krystall vor seinem Zerspringen die auf den früher beschriebenen Krystallen Nr. 45 — 48 beobachtete elektrische Vertheilung zeigte; es waren also die Krystallflächen 0P positiv, ebenso der grösste Theil der Flächen $\frac{1}{2}$P∞; negative Elektricität fand sich nur an dem vorderen Ende der Brachydiagonale auf den schmalen Flächen P̄∞ und der von ihnen gebildeten Kante; auf den Flächen P̆∞ waren nur Spuren von negativer Spannung wahrzunehmen, und bei einem Versuche, durch sehr starke Erhitzung diese Spannung zu steigern, zersprang der Krystall.

1) Auf der oberen Seite war am vorderen Ende eine 2,5mm dicke und 17mm lange Platte abgesprungen; dieselbe trug oben die Krystallfläche 0P, vorn die Fläche $\frac{1}{2}$P̄∞, an den Seiten die Flächen P̆∞ und war unten von dem mit 0P parallelen Durchgange begrenzt. Die obere Krystallfläche 0P nebst der vorderen Fläche $\frac{1}{2}$P̄∞ waren positiv, die untere Durchgangsfläche 0P aber negativ.

2) Ebenso verhielt sich ein gleichgestaltetes Stück, das auf der unteren Seite, gleichfalls am vorderen Ende, aus der Fläche 0P herausgesprungen war.

3) Ein drittes grösseres Stück von 12mm Dicke gehörte ebenfalls dem vorderen Ende der Brachydiagonale an; Fig. 49 stellt seine Projection (von oben gesehen) nebst den auf dieser Seite beobachteten elektrischen Spannungen dar. Am vorderen Ende trug es noch die von den Flächen P̄∞ gebildete Kante. Auf der unteren Seite wurde es von einer Durchgangsfläche 0P begrenzt. Die obere Fläche 0P war eine Durchgangsfläche, von welcher sich das oben unter 1 beschriebene Stück abgelöst hatte. Die obere Durchgangsfläche 0P, welche also 2,5mm unter der ursprünglichen Krystallfläche gelegen hatte, zeigte

sich positiv; die untere Durchgangsfläche 0 P war dagegen in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

Später wurde dieses Stück nochmals parallel dem Durchgange 0 P zersprengt; die obere Platte hatte 5^{mm}, die untere 7^{mm} Dicke. Die untere Durchgangsfläche am oberen Stücke war überall negativ, die obere Durchgangsfläche am unteren Stücke dagegen noch überall positiv.

4) Auf der oberen Seite des ursprünglichen Krystalles war ferner am hinteren Ende ein $11{,}5^{mm}$ dickes und 25^{mm} langes Stück abgesprungen; oben trägt dasselbe also die Krystallfläche 0 P, sowie seitlich die Krystallflächen $\check{P}\infty$; auf der unteren Seite wird es von dem mit 0 P parallelen Durchgange begrenzt. Die obere Krystallfläche 0 P ist, wie sonst, positiv, die untere Durchgangsfläche 0 P dagegen in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

Krystall Nr. 50.

Ein $6{,}5^{cm}$ langer, $2{,}7^{cm}$ breiter und $1{,}8^{cm}$ dicker Krystall zersprang parallel mit dem Durchgange 0 P in zwei Stücke; das obere war 11^{mm}, das untere 7^{mm} dick. An dem oberen dickeren Stücke zeigte sich die untere Durchgangsfläche 0 P, welche Fig. 50 *F* in halber Grösse darstellt, fast in ihrer ganzen Ausdehnung positiv; nur nach hinten zu trat eine schmale negative Zone auf. Die obere Durchgangsfläche 0 P an dem unteren nur 7^{mm} dicken Stücke (Fig. 50 *G*) war dagegen in ihrer ganzen Ausdehnung negativ.

Krystall Nr. 51.

An einem sehr klaren Krystalle von 4^{cm} Länge und 2^{cm} Dicke, der die gewöhnliche elektrische Vertheilung der Duftoner Krystalle zeigte, wurden zuerst die beiden Durchgänge ∞P auf der hinteren Seite angeschlagen, so dass der Krystall noch eine Länge von $2{,}7^{cm}$ behielt; beide Durchgänge sammt der von ihnen gebildeten verticalen Kante waren positiv.

Darauf wurde der Krystall parallel mit dem Durchgange 0 P zersprengt; das obere Stück war 8^{mm}, das untere 12^{mm} dick; die Durchgangsfläche 0 P auf der unteren Seite des oberen Stückes (Fig. 51 *F*) zeigte überall negative, dagegen die obere Durchgangsfläche 0 P am unteren dickeren Stücke (*G*) nur auf dem hinteren Theile negative, auf dem vorderen aber positive Elektricität.

Krystall Nr. 52.

Ein 6,5^{cm} langer, 3,5^{cm} breiter und 2,5^{cm} dicker Krystall, dessen Projection von oben gesehen, in Fig. 52 *A* in halber Grösse abgebildet ist, war an dem vorderen Ende der Brachydiagonale vollständig, am hinteren aber nur unvollkommen ausgebildet; er hatte daselbst theilweise angesessen, theils war ein anderer Krystall in ihn eingedrungen. Er wurde nach der punktirt gezeichneten Linie $\alpha\beta$ zerbrochen; die einige Absätze enthaltenden Bruchflächen wurden von dem Durchgange ∞P gebildet. Die Bruchfläche an dem vorderen Stücke war in ihrer ganzen Ausdehnung positiv, die andere am hinteren Stücke befindliche zum grössten Theile negativ; nur auf ihrer rechten Seite (in der Nähe von β) zeigte sich positive Elektricität.

Krystall Nr. 53.

Die Zeichnungen Fig. 53 *A* und *B* stellen den flachen tafelförmigen Krystall Nr. 53 in halber Grösse dar. Auf dem rechten und linken Rande sind die Flächen $\breve{P}\infty$ in zahlreiche feine Spitzen aufgelöst, der Krystall erscheint gewissermassen aus feinen, der Makrodiagonale parallelen Fasern zusammengesetzt; infolge dieser Bildung sind die beiden Krystallflächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}4$ so wie die vorderen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ matt. Die mit $\infty P_{,}2$ und $\infty P_{,}3$ parallelen Flächen sind ebene Durchgänge. Die Flächen $0P$, besonders die untere, sind an manchen Theilen, namentlich infolge des Anliegens anderer Schwerspathmassen, mangelhaft ausgebildet.

Die Masse des Krystalles ist farblos und durchsichtig. Die elektrische Erregung ist beträchtlich stärker als auf den übrigen Krystallen dieses Fundortes und eben dies gilt auch von anderen derselben Krystalldruse entnommenen Bruchstücken.

Während bei dem Fig. 53 abgebildeten Krystalle die Durchgänge ∞P auf der hinteren Seite negativ waren, fanden sich dieselben an einem anderen ähnlichen Bruchstücke zum grössten Theile positiv.

b) Krystall von Freiberg.

Krystall Nr. 54.

Der Fig. 54 in natürlicher Grösse abgebildete, dem Berliner Museum gehörige Krystall ist am hinteren Ende der Brachydiagonale verbrochen, und stellt eine Combination von $0P$, $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$, $\breve{P}\infty$,

$\infty\breve{P}\infty$, ∞P und P dar; doch finden sich die Flächen ∞P und P nur auf der linken Seite des vorderen Endes. Auf der rechten Seite zeigt die vordere Hälfte der horizontalen Kante des Brachydomas $\breve{P}\infty$ eine Kerbung, ähnlich wie sie zuvor bei mehreren Duftoner Krystallen beschrieben worden. Die farblose Masse dieses Krystalles ist am hinteren Ende der Brachydiagonale etwas trüblich, entwickelt sich aber nach dem vorderen ausgebildeten Ende hin zu hoher Klarheit und Durchsichtigkeit.

Auf den Flächen $\breve{P}\infty$ tritt die negative Elektricität in etwas grösserer Stärke als bei vielen Duftoner Krystallen auf.

c) *Krystalle aus der Auvergne.*

Die Krystalle aus der Auvergne lassen sich der Form nach in drei Gruppen theilen, die jedoch in ihrem elektrischen Verhalten nicht verschieden sind. Bei allen ringsum ausgebildeten Krystallen dieses Fundortes liegen an den Enden der Hauptaxe und der Makrodiagonale positive, und an den Enden der Brachydiagonale negative Zonen.

α) Krystalle mit rectangulärem basischen Querschnitte.

Die Krystalle dieser ersten Gruppe werden fast nur von den Flächen der Gestalten $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, $\breve{P}\infty$ und auch wohl $0P$ begrenzt; in den meisten Fällen treten jedoch die Flächen $0P$ sehr zurück oder fehlen auch gänzlich. Alle Krystalle besitzen in der Richtung der Brachydiagonale eine grössere Ausdehnung als in der Richtung der Makrodiagonale, und zeigen sehr gewöhnlich, wie schon oben S. 281 erwähnt, darin eine mangelhafte Ausbildung, dass neu angesetzte Schichten sich nicht gleichförmig über die ganze Oberfläche, sondern nur an bestimmten Stellen aufgelagert haben. Vorzugsweise finden sich solche Auflagerungen an den Endpunkten der Brachydiagonale, welche dieses Ende wie ein Schuh umgeben; aber auch auf den Flächen des Brachydomas $\breve{P}\infty$ finden sich grössere oder kleinere aufgelagerte Platten bis zur Dicke von 2^{mm}. Häufig treten dann auf diesen Auflagerungen die Flächen $0P$, ∞P und $\bar{P}\infty$ hervor.

Die Farbe dieser Krystalle ist graugelb oder gelblichbraun, wenig durchsichtig bis schwach durchscheinend. Sämmtliche Krystalle dieser Gruppe mit Ausnahme von Nr. 61 sind in natürlicher

Grösse dargestellt; Fig. 61 zeigt dagegen den betreffenden Krystall nur in halber Grösse.

In elektrischer Beziehung sind die Flächen $0P$ und $\breve{P}\infty$ positiv, die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ negativ; es verbreitet sich aber die negative Elektricität öfter noch über die den Flächen des Makrodomas $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ benachbarten Theile des Brachydomas $\breve{P}\infty$. Ein Mal fand sich auch in der Mitte der einen horizontalen Kante dieses Brachydomas $\breve{P}\infty$ (s. Krystall Nr. 59) eine abgesonderte negative Zone.

Tritt an dem einen Ende der Brachydiagonale ausser dem Makrodoma $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auch noch das Makrodoma $\bar{P}\infty$ (s. Krystall Nr. 56 und 57) auf, so zeigt das Ende, wo nur die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sich finden, eine stärkere negative Elektricität als das andere, wo die Flächen beider Makrodomen vorhanden sind.

Eine mangelhafte Ausbildung des einen Endes der Brachydiagonale schwächt daselbst ebenfalls die negative Polarität (Krystall Nr. 60). Werden an dem hinteren verbrochenen Ende eines in der Richtung der Brachydiagonale ziemlich langen Krystalles die mit $\infty P_{,}2$ und $\infty P_{,}3$ parallelen Durchgänge angeschlagen, so erscheinen diese Durchgangsflächen (Krystall Nr. 62 und 63) noch grossentheils negativ; doch treten auch bereits positive Stellen auf, und zwar in um so grösserer Ausdehnung, je näher die Durchgangsflächen dem ausgebildeten Ende der Makrodiagonale liegen.

Bildet bei einem kurzen Bruchstücke, welches vorn die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ trägt, am hinteren Ende nur eine mit ∞P parallele Durchgangsfläche die Begrenzung, so erscheint diese Fläche in ihrer ganzen Ausdehnung positiv. Wird ein am hinteren Ende der Diagonale angewachsen gewesener Krystall in seiner Mitte nach einem mit ∞P parallelen Durchgange zerbrochen, so zeigt, im Einklange mit dem eben Angeführten, die am hinteren Ende des vorderen Stückes, welches das ausgebildete Ende der Makrodiagonale trägt, entstandene Durchgangsfläche ∞P positive, dagegen die an dem hinteren Stücke durch diesen Bruch hervorgetretene Durchgangsfläche negative Elektricität.

Als ein Auvergner Krystall dieser Gruppe (Nr. 63) parallel dem Durchgange $0P$ in zwei Stücke von sehr verschiedener Dicke zersprengt wurde, so besass die am dünneren Stücke entstandene Durchgangsfläche $0P$ negative, die am dickeren entstandene aber positive

Elektricität. Ging die Spaltungsfläche (Nr. 64) näher durch die Mitte, so dass der Unterschied in der Dicke beider Stücke geringer wurde, so zeigte die Spaltungsfläche 0P an dem etwas dickeren Stücke fast überall positive Elektricität; nur an dem vorderen Ende (neben der Krystallfläche $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$) erschien eine schmale Zone negativer Elektricität; auf der entsprechenden Durchgangsfläche des dünneren Stückes erweiterte sich diese negative Zone bis zur Mitte, so dass nur der hintere Theil positive Spannung darbot.

Krystall Nr. 55.

Der Krystall Nr. 55 gehört der Freiberger Sammlung; seine untere Fläche 0P ist infolge unvollkommener Ausfüllung durch einen von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ gebildeten einspringenden Winkel in zwei ziemlich gleich grosse Hälften getrennt. Veranlasst ist diese Bildungsweise wahrscheinlich durch einen an dieser Stelle quer eingewachsenen anderen Schwerspathkrystall. In dem vorderen Theile der linken oberen Fläche des Brachydomas $\breve{P}\infty$ zeigen sich, wenn gleich nur sehr wenig hervortretend die Köpfe zweier kleinen Schwerspathkrystalle, welche in den grossen in abweichender Lage eingewachsen sind, und es könnte ihr Einwachsen wohl die daselbst beobachtete kleine negative Zone bedingt haben. An den hier und da aufgelegten Platten finden sich ausser den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auch die Flächen $\bar{P}\infty$.

Die Masse des Krystalles ist ziemlich unrein.

Krystall Nr. 56.

Der dem Berliner Museum gehörige Krystall (Nr. 56) zeigt (s. oben S. 280) am hinteren Ende der Brachydiagonale die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$, während am vorderen nur die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auftreten; die genannten Flächen am hinteren Ende besitzen einen sehr geringen, am vorderen Ende aber einen starken Glanz. Das hintere Ende ist schwächer elektrisch als das vordere.

Krystall Nr. 57.

Auch dieser gleichfalls dem Berliner Museum gehörige Krystall zeigt am hinteren Ende der Brachydiagonale, welches die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ trägt, eine geringere Stärke der negativen Elektricität als am vorderen, auf welchem nur die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ auftreten.

Krystall Nr. 58.

Der Krystall Nr. 58, gleichfalls an beiden Enden der Brachydiagonale ausgebildet, trägt an beiden die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$; doch ist das hintere Ende durch einen anderen kleinen in schiefer Richtung sich eindrängenden Schwerspathkrystall in zwei übereinander liegende Schneiden aufgelöst. Die linke untere Fläche des Brachydomas $\breve{P}\infty$ ist fast zur Hälfte mit braunem Eisenoxydhydrate überzogen.

Krystall Nr. 59.

Der dem Würzburger Universitätsmuseum gehörige Krystall Nr. 25 ist am hinteren Ende der Brachydiagonale nur unvollkommen ausgebildet.

In der Mitte der rechten oberen Fläche des Brachydomas $\breve{P}\infty$ zeigt sich innerhalb der positiven Zone eine negative Stelle; es ist daselbst am Krystall äusserlich kein Anzeichen sichtbar, aus welchem man auf eine solche Störung schliessen könnte.

Krystall Nr. 60.

Das hintere Ende der Brachydiagonale dieses Krystalles ist sehr unvollkommen ausgebildet; nur auf der oberen Seite sind zwei kleine Reste der Fläche $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ sichtbar, während auf der unteren eine rauhe mit braunem Eisenoxydhydrate überzogene Fläche sich findet.

Krystall Nr. 61.

Der Krystall Nr. 61 ist auf der rechten Seite unvollkommen ausgebildet; er wird daselbst von einer sehr unebenen Fläche, welche angelegen zu haben scheint und sich nach hinten in eine Art Krystallfläche $\infty P_{,}2$ fortsetzt, begrenzt. Die am vorderen Ende neben die Projection gezeichnete Fläche $\infty P_{,}1$ ist eine angeschlagene Durchgangsfläche.

Krystall Nr. 62.

An diesem dem Halle'schen Museum gehörigen Krystalle ist das hintere Ende der Brachydiagonale durch zwei angeschlagene Durchgangsflächen $\infty P_{,}2$ und $\infty P_{,}3$ begrenzt.

Krystall Nr. 63.

Das hintere Ende der Brachydiagonale war von einer unebenen Durchgangsfläche $\infty P_{,}2$ begrenzt. In Fig. 63 sind die auf dieser Fläche gemachten Beobachtungen eingetragen; dieselbe war negativ

mit Ausnahme einer ungefähr in der Mitte liegenden Stelle, welche positive Spannung besass. Später wurde in einer mit dem Durchgange $\infty P_{,}3$ parallelen Fläche die hintere Hälfte des Krystalles abgeschlagen, und dann auf der am vorderen Theile gebildeten Fläche $\infty P_{,}3$ überall positive Spannung gefunden.

Darauf wurde der Krystall parallel dem Durchgange 0P zersprengt. Die beiden Stücke hatten sehr verschiedene Dicken; die am dickeren Stücke entstandene Durchgangsfläche 0P war positiv, die am dünneren entstandene am vorderen Ende negativ; diese negative Elektricität nahm nach hinten zu ab, so dass der hintere Rand der Durchgangsfläche unelektrisch erschien. Uebrigens sei noch bemerkt, dass die Spaltung nicht in einer Ebene erfolgt war, sondern in einigen Absätzen, infolge dessen das kleinere Stück nach hinten zu dicker wurde.

Krystall Nr. 64.

Ein 18^{mm} dicker Krystall, der die gewöhnliche elektrische Vertheilung zeigte, wurde parallel dem Durchgange 0P zersprengt; die Dicke des oberen Stückes betrug im Mittel 10, die des unteren 8^{mm}. Fig. 64 *F* stellt die auf der Durchgangsfläche am oberen dickeren Stücke, und *G* die auf der Durchgangsfläche am unteren dünneren Stücke beobachtete elektrische Vertheilung dar. Auch bei diesem Krystalle war der Sprung nicht eben, sondern in zwei Absätzen erfolgt, so dass er nach hinten zu der Mitte des Krystalles näher lag, die Dicke des unteren dünneren Stückes also hinten etwas grösser war als vorn.

Krystall Nr. 65.

Der Fig. 65 nur in der oberen Projection abgebildete Krystall war am hinteren Ende der Brachydiagonale von einer rauhen, mit Eisenoxydhydrat bedeckten Fläche begrenzt. Diese Fläche zeigte schwache negative Elektricität. Der Krystall wurde nach der Richtung $\alpha\beta$ parallel mit dem Durchgange ∞P zerbrochen. Die Spaltungsfläche am vorderen Stücke war positiv, die Spaltungsfläche am hintern Stücke aber negativ.

b) Krystalle mit sechseckigem in der Richtung der Brachydiagonale verlängerten basischen Querschnitte.

Ausser den Flächen 0 P, $\check{P}\infty$ und $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ treten bei den Krystallen dieser Gruppe noch die Flächen ∞P in ziemlicher Grösse auf. Die elektrische Erregung derselben ist stark, besonders erscheint die negative Elektricität auf den Flächen ∞P mit grosser Intensität. Uebrigens ist die elektrische Vertheilung dieselbe wie bei der vorhergehenden Gruppe. Die Zeichnungen Fig. 66 und 67 stellen die betreffenden Krystalle in halber Grösse dar.

Krystall Nr. 66.

Der Krystall scheint ziemlich vollständig zu sein, ist aber an dem hinteren Ende der Diagonale mangelhaft ausgebildet. Letzteres gilt auch von der linken Hälfte der unteren Fläche 0 P und der benachbarten Fläche $\check{P}\infty$. Auf der linken Seite vorn findet sich eine einzelne Fläche von P.

Das hintere Ende der Brachydiagonale erscheint noch negativ, wenn auch schwächer als das vordere, wo der Krystall zu grösserer Vollendung gelangt ist.

Krystall Nr. 67.

Das hintere Ende des Krystalles wird von zwei mit $\infty P_{,}2$ und $\infty P_{,}3$ parallelen Durchgängen begrenzt; sie erscheinen positiv, weil sie tiefer in die Masse des gesammten Krystalles eingedrungen sind. Die Fläche $\infty P_{,}4$ am vorderen Ende ist eine Krystallfläche, $\infty P_{,}1$ dagegen ein angeschlagener Durchgang.

c) Krystalle mit sechseckigem in der Richtung der Makrodiagonale verlängerten Querschnitte.

Die Krystalle dieser Gruppe werden hauptsächlich von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ und ∞P, und auch wohl 0 P begrenzt, zu denen untergeordnet noch die Flächen $\check{P}\infty$, $\infty\check{P}\infty$ und $\frac{1}{4}\bar{P}\infty$ hinzutreten. Sie ahmen daher die Gestalt nach, welche wir in der ersten Abtheilung angetroffen haben; indess ist die Bildungsweise doch eine andere gewesen als in jener Abtheilung; sie sitzen nämlich entweder auf einem Stiele, der einen Krystall der gewöhnlichen unter a) beschriebenen Form darstellt und sich dann regelmässig weiter zu einer nach der Makrodiagonale verlängerten Gestalt entwickelt; oder wenn ein solcher Stiel

aussen nicht mehr sichtbar ist, so findet sich im Innern ein Kern der gewöhnlichen unter a) beschriebenen Form, um welchen sich dann die Entwickelung weiter fortgesetzt hat. Der Stiel oder Kern überträgt nun seine Eigenschaften auf den ganzen Krystall.

Die elektrische Vertheilung auf diesen Krystallen stimmt daher mit den auf den übrigen Auvergner Krystallen beobachteten überein; d. h. an den Enden der Hauptaxe und der Makrodiagonale findet sich positive, an den Enden der Brachydiagonale negative Elektricität. Eine Abweichung muss aber durch den Umstand bedingt werden, dass die Flächen $\breve{P}\infty$ bei ihnen eine viel geringere, dagegen die Flächen ∞P eine grössere Ausdehnung besitzen als bei den Krystallen unter a); infolge dessen erscheint die positive Elektricität auf den Flächen ∞P in der Nähe der verticalen makrodiagonalen Kanten. Von der elektrischen Vertheilung auf den Krystallen der ersten Abtheilung unterscheidet sich die Vertheilung auf den vorliegenden Krystallen bei wesentlich gleicher äusserer Form dadurch, dass bei ihnen die Flächen $0P$ oder die an ihre Stelle getretenen Kanten der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ nebst den anliegenden Theilen eben dieser Flächen, und ebenso die von den Flächen ∞P an den Enden der Makrodiagonale gebildete verticale Kante nebst den anliegenden Theilen der Flächen ∞P positiv sind, während bei einem vollständig ausgebildeten Krystalle der ersten Abtheilung die Flächen $0P$ nur in der Mitte positiv, die an den Endpunkten der Makrodiagonale befindlichen verticalen Kanten nebst den anliegenden Theilen der Flächen ∞P aber negativ sind. Bei den Krystallen der vorliegenden Gruppe wächst auf den Flächen ∞P die positive Elektricität nach den Enden der Makrodiagonale hin, bei den gleichgestalteten Krystallen der ersten Abtheilung nimmt sie dagegen in dieser Richtung ab.

Werden an einem Krystalle dieser Gruppe die beiden mit $\infty P{,}3$ und $\infty P{,}4$ parallelen Durchgänge in gleicher Grösse angeschlagen, so bleibt die elektrische Vertheilung auf diesen Flächen in Bezug ihrer Qualität dieselbe, wie auf den früheren ihnen entsprechenden Krystallflächen.

Wird ein solcher Krystall in seiner Mitte parallel mit dem Durchgange $0P$ zersprengt, so erscheinen die Durchgangsflächen an beiden Stücken positiv; diese positive Polarität nimmt nach den Enden der

Brachydiagonale hin ab, und geht an diesen Enden auch wohl in schwache negative über.

Die Krystalle Nr. 68, 69 und 72 sind in natürlicher, die Krystalle Nr. 70 und 71 in halber Grösse dargestellt. *A* und *B* bezeichnen die beiden Projectionen, *D* und *D* die Netze der an den Endpunkten der Makrodiagonale liegenden Flächen ∞P, *C* das vollständige Netz.

Krystall Nr. 68.

Der dem Berliner Museum gehörige Krystall trägt noch den Stiel, auf welchem er sich ausgebildet hat. Der grosse Krystall liegt mit seinen Axen genau parallel den Axen des kleinen als Stiel fungirenden.

Krystall Nr. 69.

Der Stiel ist am hinteren Ende der Brachydiagonale dicht am grossen Krystalle abgebrochen. Die Axen des Stieles und des auf ihm gewachsenen Krystalles liegen ebenfalls parallel.

Der Krystall gehört gleichfalls dem Berliner Museum.

Krystall Nr. 70.

Der dem Halle'schen Museum entliehene Krystall Nr. 70 ist am hinteren Ende der Brachydiagonale mangelhaft ausgebildet und verletzt; er hat daselbst angesessen.

Krystall Nr. 71.

Der Krystall Nr. 71 ist auf der hinteren Seite der Brachydiagonale angewachsen gewesen; von da aus dringt in denselben ein Kern der gewöhnlichen unter a) beschriebenen Form ein, von welchem grössere Theile der Flächen $\breve{P}\infty$ auf der linken Seite (s. Fig. 71 *E* in $\alpha\beta\gamma\delta$) sichtbar werden. Die linke Seite ist nämlich etwas uneben nach dem mit $\infty\breve{P}\infty$ parallelen Durchgange verbrochen und aus dieser Durchgangsfläche ragt scharf ausgebildet ein Theil ($\alpha\beta\gamma\delta$) der seitlichen horizontalen Kante $\beta\delta$ des Brachydomas $\breve{P}\infty$ hervor.

Krystall Nr. 72.

Der Fig. 72 *C* in seinem Netze abgebildete Krystall gehört dem Berliner Museum. Während die Flächen $\infty P_{,}1$ und $\infty P_{,}2$ natürliche Krystallflächen waren, bestanden die beiden anderen Seitenflächen $\infty P_{,}3$ und $\infty P_{,}4$ aus Durchgängen.

Die elektrische Vertheilung auf diesem Bruchstücke glich der auf den vollständigen Krystallen beobachteten.

Später zersprang dasselbe parallel mit dem Durchgange 0 P in zwei nahe gleich grosse Stücke; die beiden Durchgangsflächen waren positiv, in abnehmender Stärke nach den Enden der Brachydiagonale. An diesen Enden selbst ging auf dem etwas dünneren Stücke die positive Polarität in schwache negative über.

III. Allgemeine Folgerungen aus den vorstehenden Beobachtungen.

1. Die thermoelektrischen Erscheinungen bei den Schwerspathkrystallen.

Ueberblicken wir die im vorhergehenden Abschnitte II. mitgetheilten Beobachtungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspathes, so zeigen dieselben allerdings grosse Verschiedenheiten in dem Verhalten dieser Krystalle, die sogar soweit gehen können, dass bei den an dem einen Ende verbrochenen Krystallen selbst bei nahe oder ganz übereinstimmender äusserer Form auf ihren gleichnamigen Krystallflächen gerade die entgegengesetzten Elektricitäten beobachtet werden. Es möge genügen, hier nur einige Krystalle einander gegenüber zu stellen.

Vergleichen wir z. B. den Krystall Nr. 27 mit dem Krystall Nr. 67, deren äussere Formen im Ganzen übereinstimmen und nur dadurch verschieden sind, dass ersterer am makrodiagonalen, letzterer aber am brachydiagonalen Ende abgebrochen ist, so zeigt ersterer an den Enden der Hauptaxe und der Makrodiagonale negative, an den Enden der Brachydiagonale aber positive Elektricität, während letzterer an den Enden der Hauptaxe und der Makrodiagonale positive, an den Enden der Brachydiagonale aber negative Polarität darbietet.

Bei den beiden Krystallen Nr. 20 und Nr. 38 ist die äussere Form übereinstimmend; beide werden von den Flächen 0 P und ∞P (unter welchen letzteren Flächen nur eine ein Durchgang ist) begrenzt, und doch findet sich bei Nr. 20 auf den Flächen 0 P negative und auf den Krystallflächen ∞P positive Spannung, dagegen bei Nr. 38 gerade umgekehrt auf den Flächen 0 P positive und auf den Krystallflächen ∞P negative Elektricität.

Trotz aller dieser Verschiedenheiten liegt aber doch der elektrischen Vertheilung auf allen Schwerspathkrystallen eine und dieselbe

ursprüngliche Form zu Grunde, und die beobachteten Abweichungen und selbst Gegensätze sind nur durch die Art der Bildung und durch das Auftreten verschiedener Krystallformen bedingt. Von jener übereinstimmenden Grundlage überzeugt man sich leicht durch die Vergleichung der elektrischen Vertheilungen auf den vollständig ausgebildeten Krystallen der ersten Abtheilung Nr. 1, 2 und 3 mit dem ebenfalls ringsum von natürlichen Krystallflächen begrenzten Krystalle der zweiten Abtheilung Nr. 32. Auf den Krystallen beider Abtheilungen sind die Enden der Hauptaxe positiv, die Enden der beiden Diagonalen der Basis negativ und, um einen kurzen Ausdruck zu gebrauchen, die Enden der in der Basis liegenden Zwischenaxen wieder positiv.

Entsprechend der Art der Bildung sind aber die Ausdehnungen der positiven und negativen Zonen auf den Krystallen der beiden Abtheilungen verschieden.

Durch das Wachsthum der Krystalle der ersten Abtheilung in der Richtung der Makrodiagonale haben die an den Enden dieser Diagonale gelegenen negativen Zonen an Ausdehnung gewonnen, und verbreiten sich nicht blos über die von den Flächen ∞P gebildeten verticalen Kanten und die diesen Kanten benachbarten Streifen der Flächen ∞P, sondern besonders auch über die anliegenden Theile der Flächen $0P$, so dass die positive Polarität auf diesen Flächen gewöhnlich auf die Mitte derselben beschränkt bleibt. Andererseits dehnen sich die positiven Zonen der den vorhingenannten Zwischenaxen entsprechenden Flächen ∞P über die anliegenden Theile der Flächen $\frac{1}{4}\bar{P}\infty$ und der von ihnen gebildeten horizontalen Kante aus.

In der zweiten Abtheilung dagegen, in welcher das Wachsthum in der Richtung der Brachydiagonale erfolgt ist, breitet sich die positive Elektricität über die Flächen $0P$ aus, so dass dieselben entweder in ihrer ganzen Ausdehnung positive Spannungen zeigen, oder höchstens an ihren Rändern eine schwache negative Polarität annehmen. Als Compensation für diese grössere Ausdehnung der positiven Elektricität auf den Flächen $0P$ tritt dann bei den Krystallen der zweiten Abtheilung die positive Polarität auf den Flächen ∞P mehr zurück, und es breitet sich die negative auf ihnen weiter und überhaupt in anderer Weise aus, als bei den Krystallen der ersten Abtheilung.

In diesen Vertheilungen entstehen nun aber durch Aenderungen

in der Ausdehnung der Flächen der verschiedenen Krystallgestalten mannichfache Modificationen.

Ich wende mich zunächst zu den Krystallen der ersten Abtheilung, deren Wachsthum in der Richtung der Makrodiagonale stattgefunden hat.

Schon zuvor habe ich erwähnt, dass durch das Wachsen nach der Makrodiagonale die an den Enden derselben gelegenen negativen Zonen sich verstärken, und sich namentlich über die an diesen Enden gelegenen Theile der Flächen $0P$ ausbreiten. Treten an diesen Enden die Flächen $\breve{P}\infty$ in so geringer Grösse auf, dass sie noch nicht zum Durchschnitte kommen, so fallen sie in die negative Zone, welche sich von den Flächen $0P$ über die Flächen $\breve{P}\infty$ nach der von den Flächen ∞P gebildeten verticalen Kante hinzieht. Vergrössern sich die Flächen $\breve{P}\infty$ so weit, dass sie am Ende der Makrodiagonale in einer horizontalen Kante zum Durchschnitte kommen, so verbleiben sie noch negativ sammt der von ihnen gebildeten Kante, solange die Flächen ∞P, auf denen sich die positive Elektricität entwickelt, noch eine hinreichende Grösse bewahren (Nr. 27); treten jedoch die Flächen ∞P mehr zurück, so beginnt die von den Flächen $\breve{P}\infty$ gebildete horizontale Kante in ihrer Mitte unelektrisch zu werden (Nr. 26) und geht dann daselbst ins Positive über (Nr. 25). Nehmen die Flächen ∞P noch weiter an Grösse ab, so verbreitet sich die positive Zone von der Mitte jener Kante aus auf den sie bildenden Flächen $\breve{P}\infty$ (Nr. 22, 23, 24) und nimmt zuletzt fast die ganzen Flächen $\breve{P}\infty$ und selbst noch Theile der Flächen $0P$ ein (Nr. 28, 29, 30, 31). Ist die von $\breve{P}\infty$ gebildete Kante durch eine Fläche $\infty\breve{P}\infty$ abgestumpft (Nr. 22, 23, 24), so zeigt diese Fläche selbstverständlich ebenfalls positive Polarität.

Bei den Krystallen der ersten Abtheilung sind ferner die Flächen ∞P wesentlich positiv; nur an den Enden der Makrodiagonale gelegene gewöhnlich schmale Streifen sind negativ, und auf dem übrigen grösseren Flächenstücke wächst die positive Spannung von der Makrodiagonale nach der Brachydiagonale hin. Je mehr sich daher diese Flächen ∞P dem Ende der Brachydiagonale nähern, um so mehr wird hier die negative Elektricität verdrängt, und verschwindet ganz, wenn die Flächen ∞P an den Enden der Brachydiagonale selbst zum Durchschnitte kommen oder ihr Durchschnitt

durch die Fläche $\infty\bar{P}\infty$ abgestumpft wird. Dafür verschwindet dann andererseits die positive Zone auf der Fläche $0P$, die also in ihrer ganzen Ausdehnung negativ erscheint (Nr. 17—21).

Wenn an den Enden der Brachydiagonale neben den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ noch die Flächen $\bar{P}\infty$ (Nr. 22—24) auftreten, so scheint bereits das Stumpferwerden der an den Enden der Brachydiagonale befindlichen horizontalen Kante die Ausbreitung der positiven Elektricität von den Enden der Makrodiagonale her über diese Flächen zu begünstigen.

Bei den Krystallen der zweiten Abtheilung nehmen ebenso wie die Flächen $0P$, welche positiv erscheinen, auch die Flächen ∞P eine andere elektrische Beschaffenheit an; auf ihnen wächst die Intensität der elektrischen Spannung gerade umgekehrt, wie in der ersten Abtheilung, nach der Brachydiagonale hin in negativem Sinne. Diese Flächen ∞P können auf den Krystallen dieser Abtheilung von nahe rhombischem Querschnitte entweder ganz negativ erscheinen, oder wenn positive Zonen auf ihnen noch hervortreten, so müssen solche nach den Enden der Makrodiagonale hin liegen.

Wenn die Krystalle ihre rhombische Form verlieren, und in nach der Brachydiagonale verlängerte Säulen übergehen, so tritt auf den Flächen ∞P selbst bei beträchtlicher Grösse (Nr. 66 und 67) die negative Elektricität auf. Dagegen verbreitet sich die positive Polarität von den Flächen $0P$ über die Flächen $\breve{P}\infty$ (Nr. 55 und ff.). Verschwinden die Flächen $0P$ gänzlich, so erscheint die positive Elektricität dann auf den Flächen $\breve{P}\infty$, und die negative Spannung der Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ greift öfter auf die an den Enden der Brachydiagonale liegenden Theile dieser Flächen $\breve{P}\infty$ (Nr. 56, 57, 58, 60) über.

Nähert sich die Form der Auvergner Krystalle (Nr. 68—72)*) durch eine vergrösserte Dimension der Makrodiagonale wieder den Formen der ersten Abtheilung, so erhält die negative Polarität an den Enden der Brachydiagonale hinreichenden Raum zu ihrer Entwickelung auf den grossen Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$. Auf den Flächen ∞P tritt dann nur auf den Theilen, welche an den Enden der Brachydiagonale liegen, negative Elektricität hervor, die nach den Enden der Makrodiagonale hin in eine positive übergeht; es nimmt also auf diesen Flächen die Spannung im negativen Sinne von der Brachydia-

*) Ueber ihre Bildung s. oben S. 325 und 326.

gonale nach der Makrodiagonale hin (ebenso wie auf Nr. 33, 39, 40 u. s. w.) ab; und es kann sonach an den Enden der Makrodiagonale durchaus keine negative Spannung erscheinen, wie dies bei den Krystallen der ersten Abtheilung der Fall ist, wo aber auch die Flächen ∞P einen anderen Charakter haben, indem auf ihnen die elektrische Spannung in negativem Sinne in der zuvor angegebenen Richtung wächst.

Bei manchen tafelförmigen Duftoner Krystallen haben wir, um es kurz auszudrücken, eine Vereinigung beider Bildungsweisen.*) Betrachten wir den Krystall Nr. 53, so finden wir ihn, während sein Wachsthum im Grossen nach der Richtung der Brachydiagonale erfolgt ist, aus lauter feinen der Makrodiagonale parallelen Fasern, deren Enden auf den Flächen $\breve{P}\infty$ und ∞P deutlich sichtbar sind, zusammengesetzt; daher erscheinen bei ihm die Flächen ∞P wieder positiv und die Flächen $\breve{P}\infty$ negativ. Verschwindet diese faserige Bildung mehr oder wird die Dimension nach der Makrodiagonale kleiner, so dass das Wachsthum nach der Brachydiagonale vorwaltet, so treten die Flächen ∞P, die dann glatt sind und nicht mehr als ein in einer Ebene liegendes Aggregat von Faserköpfen erscheinen, wieder in das Bereich der am Ende der Brachydiagonale vorhandenen negativen Zone (Nr. 45). Dass aber stets, auch bei den dickeren und nach der Brachydiagonale gestreckten Krystallen in einem gewissen Grade jene der Makrodiagonale parallel laufende Faserung existirt, bezeugen die gekerbten seitlichen Ränder, die sehr häufig anstatt der von den Flächen $\breve{P}\infty$ zu bildenden Kante auftreten (Nr. 45 und 46). Verlangt diese letztere Bildung auf den Flächen $\breve{P}\infty$ eine negative Spannung, so ruft das Wachsthum nach der Brachydiagonale auf eben diesen Stellen positive hervor; als Resultat beider Einflüsse erscheinen die Flächen $\breve{P}\infty$ gewöhnlich sehr schwach negativ, häufig ganz unelektrisch und nur höchst selten schwach positiv.

Mit der negativen Beschaffenheit der sehr grossen Flächen $\breve{P}\infty$

*) Auch von den Krystallen Nr. 30 und 31 liesse sich ein Gleiches aussagen; die Beschaffenheit der Enden der Makrodiagonale sowie ihre Anwachsung zeigte ein Wachsthum in dieser Richtung, während die Gesammtgestalt durch das vergrösserte Auftreten der Flächen $\breve{P}\infty$ sich den Formen der Auvergner und Duftoner Krystalle nähert. Haben wir in diesem (es möge der Ausdruck gestattet sein) Wettstreite zweier Bildungsweisen den Grund für das eigenthümliche Verhalten der beiden Flächen $0P$, sowie der auf den Flächen $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$ beobachteten Störungen zu suchen?

bei den Duftoner Krystallen hängt der Umstand zusammen, dass sich die positive Elektricität von den Flächen 0P über die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ hin ausbreitet, während bei den Auvergner Krystallen, wo die Flächen $\check{P}\infty$ positiv sind, umgekehrt die negative Polarität von den Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ über die benachbarten Theile der Flächen $\check{P}\infty$ vordringt.

2. Bisherige Ansicht der thermoelektrischen Vorgänge.

Bis zu meinen Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases kannte man auf den Krystallen nur Vertheilungen mit elektrisch polaren Axen, d. h. solchen Axen, deren eines Ende positive, das andere negative Elektricität zeigte; und es schien dies Verhalten ein physikalisch nothwendiges zu sein. Es traten nämlich, so viel man eben bis dahin wusste, die thermoelektrischen Vorgänge stets gleichzeitig mit dem sogenannten Hemimorphismus auf, und man hielt deshalb beide Erscheinungen für solidarisch verbunden: man schloss auf thermoelektrische Erregung, sobald der Krystall sich hemimorphisch zeigte, und glaubte, falls an Bruchstücken von Krystallen thermoelektrische Spannungen beobachtet wurden, Hemimorphismus an vollständigen Krystallen voraussagen zu dürfen, wenn solche später gefunden werden sollten.

Die Ansicht, dass nur hemimorphisch gebildete Krystalle überhaupt elektrisch sein könnten, schien so wohl begründet, dass ich, als mir im Jahre 1839 zuerst am weinsauren Kali-Natron*) und 1840 am Topase**) auf gegenüberliegenden Stellen der Krystalle eine gleichnamige Polarität entgegentrat, eine Zwillingsbildung in diesen Krystallen annehmen zu müssen glaubte, dergestalt, dass die beiden den Zwilling bildenden Krystalle mit gleichnamigen Polen verwachsen und also auch gleichnamige Pole nach aussen gewandt wären. Eine solche Verwachsung war in der That von mir bei den Krystallen des Zuckers und der Weinsäure***) beobachtet worden, und die Beschaffenheit der gerade damals vorliegenden Krystalle des weinsauren Natron-Kalis und des Topases schien eine solche Annahme zu rechtfertigen.

*) De thermoelectricitate crystallorum. Hal. 1839 S. 29; Poggend. Ann. Bd. 49. S. 503.

**) Poggend. Ann. Bd. 56. S. 44 u. S. 57.

***) De thermoelect. crystall. S. 19 u. 25; Poggend. Ann. Bd. 49 S. 499 u. 502.

Man verglich einen elektrischen Krystall, wie den Turmalin, mit einer Volta'schen Säule, in welcher die elektromotorische Kraft durch die an den beiden ungleichgestalteten Enden der Molecüle beim Ein- und Austreten der Wärme entstehende Temperaturdifferenz erzeugt werde. Es schien eine solche Vergleichung besonders durch den Umstand gerechtfertigt zu sein, dass die damals bekannten thermoelektrischen Krystalle sich beim Zerbrechen genau, wie jene Säule verhielten: jedes Stück eines Turmalins zeigte wieder zwei entgegengesetzte Pole, und die beiden Bruchflächen, welche im ganzen Krystalle aneinander gelegen hatten, wiesen nach ihrer Trennung entgegengesetzte Polaritäten auf.

3. Aenderung und Erweiterung der bisherigen Ansicht.

Die in meiner letzten Abhandlung über die thermoelektrischen Erscheinungen am Topase veröffentlichten Beobachtungen haben gezeigt, und die im Vorstehenden beschriebenen, am Schwerspathe wahrgenommenen Vorgänge bestätigen es noch weiter, dass die Ansicht, es stehe die Thermoelektricität der Krystalle mit dem Hemimorphismus derselben in causalem Zusammenhange, so dass jene ohne diesen nicht auftreten könne, eine völlig unbegründete ist. Es treten vielmehr thermoelektrische Erregungen auch auf Krystallen auf, welche durchaus nicht hemimorphisch sind; sie bilden sehr wahrscheinlich, wie ich dies auch schon am Schlusse meiner Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases ausgesprochen habe, eine Eigenschaft aller Krystalle, bei denen nicht die übrigen physikalischen Verhältnisse ihr Auftreten unmöglich machen, und werden auf ihnen mit dem Elektrometer nachgewiesen werden können, wenn nicht gewisse Zustände ihrer Steigerung bis zu einer für unsere Instrumente messbaren Höhe hinderlich sind.

Wenn nun aber an nicht hemimorphischen Krystallen thermoelektrische Erregungen auftreten, so bedingt die gleiche Gestaltung der beiden Enden einer Axe an diesen auch eine gleiche elektrische Polarität; es werden also bei diesen Krystallen, wenn man überhaupt von elektrischen Axen reden will oder darf, nicht polare, sondern an beiden Enden gleichnamig elektrische Axen auftreten. Und in der That haben die in der vorigen und der gegenwärtigen Abhandlung enthaltenen Beobachtungen über das elektrische Verhalten

des Topases und des Schwerspathes diesen Satz vollkommen bestätigt, und ebenso werden die in den nächstfolgenden Abhandlungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Aragonits, Titanits u. s. w. aufzuführenden Versuche die Richtigkeit desselben noch weiter darthun. An sämmtlichen ringsum gleichmässig ausgebildeten Schwerspathkrystallen finden sich an den beiden Enden der einzelnen Axen und Zwischenaxen gleichnamige Polaritäten; und dasselbe gilt auch von Bruchstücken, wenn die beiden Enden einer Axe noch von vollkommenen Krystallflächen gebildet werden.

Das Auftreten elektrisch polarer Axen an den hemimorphen Krystallen ist ebenso nur ein Ausnahmefall im Bereiche der Thermoelektricität, wie ihn der Hemimorphismus selbst im Gebiete der Krystallformen darstellt; und eben dieselben Zustände, welche den Hemimorphismus hervorrufen, bedingen auch die Entstehung polarisch elektrischer Axen.

Der Hemimorphismus, wie wir solchen beim Turmalin, Kieselzinkerz, Bergkrystall, Zucker, den beiden Weinsäuren u. s. w. antreffen, wird unmittelbar durch ein hemimorphisches Molecül erzeugt; die verschiedenen Gestaltungen der Enden einer Axe dagegen, wie wir sie bei manchen Krystallen des Topases und des Schwerspathes gefunden haben, verdanken nur zufälligen Umständen (Aenderungen der Temperatur, der Concentration und der Zusammensetzung der Mutterlauge, aus welcher die Bildung erfolgte) ihre Entstehung. Aber auch diese letztgenannten Abweichungen von der Symmetrie werden auf die elektrischen Vorgänge nicht ohne Einfluss bleiben, sei es durch die blosse Aenderung der Form oder durch Modificationen in den übrigen physikalischen Eigenschaften, welche bei Entstehung der thermoelektrischen Erscheinungen mitwirken.

So habe ich schon oben S. 280 u. 321 darauf aufmerksam gemacht, dass durch das Auftreten der Flächen $\bar{P}\infty$ an dem einen Ende der Brachydiagonale bei den Krystallen Nr. 56 und 57 die negative Elektricität geschwächt wird, während bei dem Krystalle Nr. 55 beide nur die Flächen $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$ tragenden Enden der Brachydiagonale eine gleiche Stärke der elektrischen Erregung zeigen; und es stimmt diese durch das Auftreten der Flächen $\bar{P}\infty$ bewirkte Schwächung der negativen Elektricität mit dem auch auf anderen Krystallen beobachteten Verhalten dieser Flächen überein. Eine mangelhafte Aus-

bildung des einen Endes der Brachydiagonale schwächt daselbst ebenfalls die negative Elektricität (Nr. 60, 61, 66). Treten an demselben anstatt der Flächen $\frac{1}{2}\breve{P}\infty$ mangelhaft gebildete Flächen ∞P auf (Nr. 46 und 47), so bleibt die Spannung entweder noch schwach negativ, oder geht auch in eine schwache positive über.

Bei den früher allein ihrem elektrischen Verhalten nach genauer untersuchten hemimorphen Krystallen scheint, wenigstens soweit jetzt die Beobachtungen reichen, der oben S. 334 erwähnte Satz, dass jedes Bruchstück zwei entgegengesetzte Pole, ebenso wie der ganze Krystall, zeigt, und dass die beiden Bruchflächen, in welchen der Krystall zersprengt wird, entgegengesetzte Polaritäten besitzen, Geltung zu haben. Dieser Satz ist aber, wie die von mir am Topase und am Schwerspathe ausgeführten Untersuchungen nachweisen, bei symmetrisch gebildeten Krystallen nicht mehr allgemein gültig.

Zersprengen wir z. B. einen sächsischen Topas, bei welchem die an den beiden Enden der Hauptaxe befindlichen Krystallflächen 0 P positive Elektricität zeigen, oder einen sibirischen Topas vom Adun-Tschilon bei Nertschinsk, bei welchem die Flächen des Brachydomas an den beiden Enden der Hauptaxe ebenfalls positive Polarität besitzen, oder einen der Felsöbanyaer Schwerspäthe Nr. 38—41, bei denen die Flächen 0 P gleichfalls positiv sind, in seiner Mitte nach dem mit 0 P parallelen Durchgange, so zeigen beide Durchgangsflächen negative Elektricität. Wird dagegen bei den zuvor genannten Topasen, oder einem Schwerspathkrystalle von Dufton Nr. 45—52 in der Nähe des einen Endes der Hauptaxe nur eine dünne Platte abgesprengt, so ist der Durchgang an der dünnen Platte negativ; dagegen kann der Durchgang am grossen Stücke, falls die abgesprengte Platte nur dünn ist, noch positiv, wenn auch schwächer als die natürliche Krystallfläche 0 P erscheinen; bei grösserer Dicke der abgesprengten Platte geht aber auch auf ihm die positive Spannung in die negative über.

Nach den bisherigen Beobachtungen steht bei den hemimorphen Krystallen die Anordnung der positiven und negativen Zonen im Allgemeinen mit der Lage der an ihren beiden Enden unsymmetrisch ausgebildeten Axe in festem Zusammmenhange, so dass ein bestimmtes Ende derselben stets, auch in Bruchstücken, die eine, das andere aber die entgegengesetzte Polarität darbietet, und mithin Aenderungen in den

äusseren Begrenzungen keinen Einfluss auf die Lage der elektrischen Pole, wenn auch auf ihre Stärke, ausüben. Dagegen finden wir, wie meine Untersuchungen des Topases und des Schwerspathes darthun, bei den symmetrischen Krystallen eine beträchtliche Einwirkung der äusseren Gestalt auf die elektrische Vertheilung, sowohl in Betreff der Anordnung als auch der Stärke der einzelnen Zonen, und zwar zeigt sich dieselbe nicht blos bei Verschiedenheit der von der Natur selbst hervorgebrachten Gestalten, sondern ebenso auch bei Aenderungen der äusseren Begrenzung durch Zersprengen oder Zerbrechen gegebener Krystalle. Für die elektrische Vertheilung auf diesen Krystallen ist also ausser der Gestaltung ihrer Molecüle auch noch ihr Wachsthum und die äussere Form der gesammten Masse bestimmend.

4. Der Krystall ein Individuum.

Die Beobachtungen der elektrischen Vertheilung auf ringsum ausgebildeten und auf zerbrochenen Krystallen zwingen uns, unsere bisherige Ansicht über das Wesen des Krystalles überhaupt zu modificiren. Es hat bisjetzt wohl jeder Mineralog und Physiker angenommen, dass, wenn ein Krystall zersprengt wird, sämmtliche physikalische Eigenschaften mit Ausnahme der äusseren Form in den einzelnen Bruchstücken dieselben sind, wie in dem unverletzten ganzen Krystalle, und dass also auch die sämmtlichen Bruchstücke in den betreffenden Beziehungen einander gleichen. Und in der That haben die bisherigen Untersuchungen der optischen und thermischen Verhältnisse keine hierauf bezüglichen Unterschiede wahrnehmen lassen. Dem entgegen zeigen nun die thermoelektrischen Erscheinungen am Topase und Schwerspathe, dass die eben ausgesprochene Annahme nicht aufrecht erhalten werden kann: die thermoelektrischen Vorgänge auf ringsum ausgebildeten Krystallen sind andere als auf blossen Bruchstücken, und ebenso finden sich in dem elektrischen Verhalten der einzelnen Bruchstücke Verschiedenheiten, welche von der speciellen Lage derselben im ganzen Krystalle abhängen. Jedes Bruchstück behält auf seinen ursprünglichen Krystallflächen den besonderen Zustand, welcher diesen Oberflächentheilen im ganzen Krystalle eigen war, so weit bei, als bei dem Auftreten der infolge des Zersprengens neu entstandenen Begrenzungsflächen

(Bruch- und Durchgangsflächen) nur irgend möglich ist, und auf den neu entstandenen Begrenzungsflächen werden eigenthümliche elektrische Erregungen beobachtet.

Wir haben daher den Krystall als ein in sich abgeschlossenes Individuum in der unorganischen Natur zu betrachten, bei welchem ebenso, wie bei dem Individuum in dem Bereiche des Organischen, die einzelnen Theile nicht dem Ganzen und einander gleichen, selbst wenn die äussere Form des Ganzen und der Theile einander vollkommen ähnlich ist.

Ich will dies an einigen Beispielen im Speciellen nachweisen.

Der vollständig ausgebildete Krystall aus Przibram Nr. 1 zeigt auf den Flächen 0 P an den Enden der Makrodiagonale negative Elektricität, die nach der Mitte hin abnimmt und in der Mitte selbst in die positive übergeht. Auf einem an dem einen Ende der Makrodiagonale abgebrochenen kurzen Bruchstücke wie Nr. 8 tritt nun die positive Elektricität gar nicht mehr auf, aber die Abnahme der negativen Spannung von dem noch vorhandenen ausgebildeten Ende der Makrodiagonale nach dem verbrochenen Ende hin bleibt ebenso wie im unverletzten Krystalle.

Auf dem vollständig ausgebildeten Krystalle aus Felsöbanya Nr. 37 ist die Fläche 0 P fast in ihrer ganzen Ausdehnung positiv; die Intensität dieser positiven Spannung nimmt von der Mitte nach den Rändern hin ab, und geht in der Nähe der Ränder selbst bereits an vielen Stellen ins Negative über. Zersprengen wir nun z. B. einen solchen Krystall parallel mit einer Fläche ∞P in zwei nahe gleich grosse Stücke, so werden die Flächen 0 P an den neben den Krystallflächen ∞P liegenden Rändern wie bisher negative oder schwache positive Spannung, dagegen in der Mitte des Randes neben der neu entstandenen Durchgangsfläche (also auf den Theilen, welche im ganzen Krystalle nahe in der Mitte der Flächen 0 P lagen) stärkere positive Polarität zeigen. So ist an dem Krystall Nr. 38 auf den Flächen 0 P die Spannung in der Mitte des Randes neben der Durchgangsfläche $\infty P_{,}2$ stark positiv, während am gegenüberliegenden Rande neben der ursprünglichen Krystallfläche $\infty P_{,}4$ eine schwache negative Elektricität auftritt. Ebenso erscheint bei dem Krystalle Nr. 43 auf dem Rande der Flächen 0 P neben der ursprünglichen Krystallfläche $\infty P_{,}1$ negative, auf dem gegenüberliegenden Rande

neben dem angeschlagenen Durchgange $\infty P_{,}3$ aber positive Elektricität. Ein aus der Mitte eines solchen Felsöbanyaer Krystalles herausgeschlagenes, und von vier Durchgangsflächen ∞P begrenztes Bruchstück Fig. 43 *F* bietet in der ganzen Ausdehnung seiner Flächen 0P starke positive Spannung dar u. s. w.

Aehnliche Erscheinungen zeigen auch die Seitenflächen der Topase, wie sich leicht durch Vergleichung der in meiner Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen an ganzen und zerbrochenen Topaskrystallen ergibt.

In den vorstehenden Beispielen habe ich mich absichtlich auf die elektrischen Vorgänge auf den unverletzt gebliebenen Theilen der Krystallflächen beschränkt, um den Unterschied zwischen der elektrischen Vertheilung auf einem vollständigen Krystalle und auf seinen Bruchstücken nachzuweisen; diese Unterschiede treten nun aber noch stärker hervor, wenn wir die elektrischen Erregungen auf den durch Bruch oder Spaltung neu entstandenen Begrenzungsflächen in Betracht ziehen. Für eine Reihe von Topaskrystallen habe ich durch Abschleifen oder Zersprengen ihre äussere Gestalt geändert, und den Einfluss dieser Aenderungen auf die elektrische Vertheilung untersucht; es wird daher rücksichtlich dieses Minerals genügen, auf den fünften Abschnitt meiner Abhandlung, in welchem die betreffenden Beobachtungen zusammengestellt sind, hier hinzuweisen. Für die Schwerspathkrystalle bietet die vorliegende Abhandlung zahlreiche Beweise dar: während z. B. bei den Przibramer Krystallen ein ausgebildetes Ende der Makrodiagonale negativ ist, zeigt ein Ende eben dieser Diagonale, welches durch eine senkrecht gegen ihre Richtung gestellte Bruch- oder Durchgangsfläche begrenzt wird, positive Spannung. Während auf dem Krystalle Nr. 38 die natürlichen Krystallflächen ∞P negativ sind, tritt auf dem grössten Theile der angeschlagenen Durchgangsfläche $\infty P_{,}2$ positive Elektricität auf u. s. w.

5. Einfluss der Art des Wachsthums der Krystalle auf die elektrischen Vorgänge.

Im Laufe der Untersuchungen über das elektrische Verhalten der Schwerspathkrystalle hat sich ein eigenthümlicher Einfluss der Art und Weise, wie die Krystalle sich gebildet und ihr Wachsthum vollendet haben, herausgestellt. Dieser Einfluss zeigt sich besonders in dem

Verhalten der Flächen 0 P und ∞ P, also gerade derjenigen Flächen, welche die Grundgestalt des Schwerspathes bilden.

Ist der Krystall nach der Makrodiagonale gewachsen, so tritt die positive Elektricität auf den Flächen 0 P gewöhnlich nur sehr schwach oder auch wohl gar nicht hervor, während sie im anderen Falle, wo das Wachsthum nach der Brachydiagonale stattgefunden hat, die Flächen 0 P gänzlich oder fast gänzlich beherrscht.

Auf den Flächen ∞ P nimmt die elektrische Spannung nach den Enden der Brachydiagonale hin in positivem Sinne zu, wenn das Wachsthum des Krystalles in der Richtung der Makrodiagonale erfolgt ist, dagegen nach derselben Richtung hin in negativem Sinne, falls der Krystall nach der Brachydiagonale gewachsen ist. Beide entgegengesetzte Verhalten dieser Flächen lassen sich in den einen Ausdruck vereinigen: es ändert sich die elektrische Spannung stets in negativem Sinne zunehmend, oder in positivem Sinne abnehmend nach den Enden derjenigen Diagonale hin, nach welcher das Wachsthum des Krystalles statt gefunden hat.

Infolge dieses verschiedenen Verhaltens werden wir also die Flächen ∞ P in den beiden Abtheilungen in verschiedener Weise betrachten müssen: wir haben sie stets auf diejenige Diagonale zu beziehen, nach welcher das Wachsthum erfolgt ist, und zwar ertheilt diese Diagonale ihnen negative Polarität, deren Intensität von ihr aus gegen die andere Diagonale hin abnimmt, und je nach den Umständen entweder auf den ganzen Flächen ∞ P bleibt, oder aber mehr oder weniger rasch in die positive übergeht, welche letztere dann, entsprechend einer Abnahme in negativem Sinne, in der Richtung nach der anderen Diagonale hin wächst.

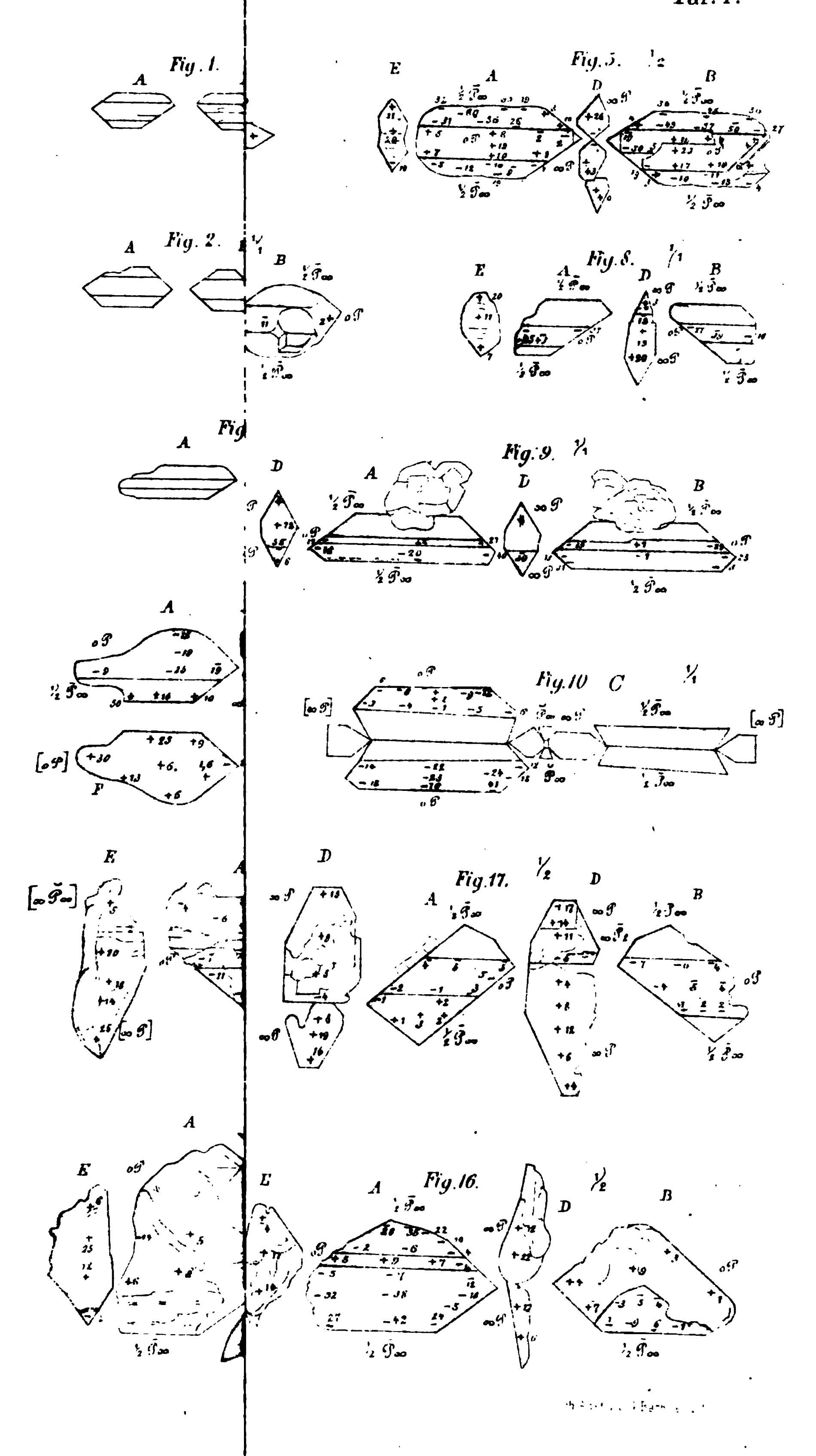
Wenn ein Krystall bei seiner Bildung einmal eine gewisse Beschaffenheit infolge seines ursprünglichen Wachsthumes angenommen hat, so kann dieselbe ungeändert bleiben, wenn durch zufällige äussere Umstände eine scheinbar äussere Aenderung im Wachsthume eintritt, wie dies bei den Krystallen Nr. 68—72 der Fall ist. Diese Krystalle sind auf einem Stiele oder Kerne gebildet, der nach der Makrodiagonale gewachsen ist, und die Eigenschaften dieses Stieles oder Kernes theilen sich der ganzen später aufgelegten und in der Richtung der Makrodiagonale sich erweiternden Masse mit. Andererseits halte ich es aber nicht für unmöglich, dass durch

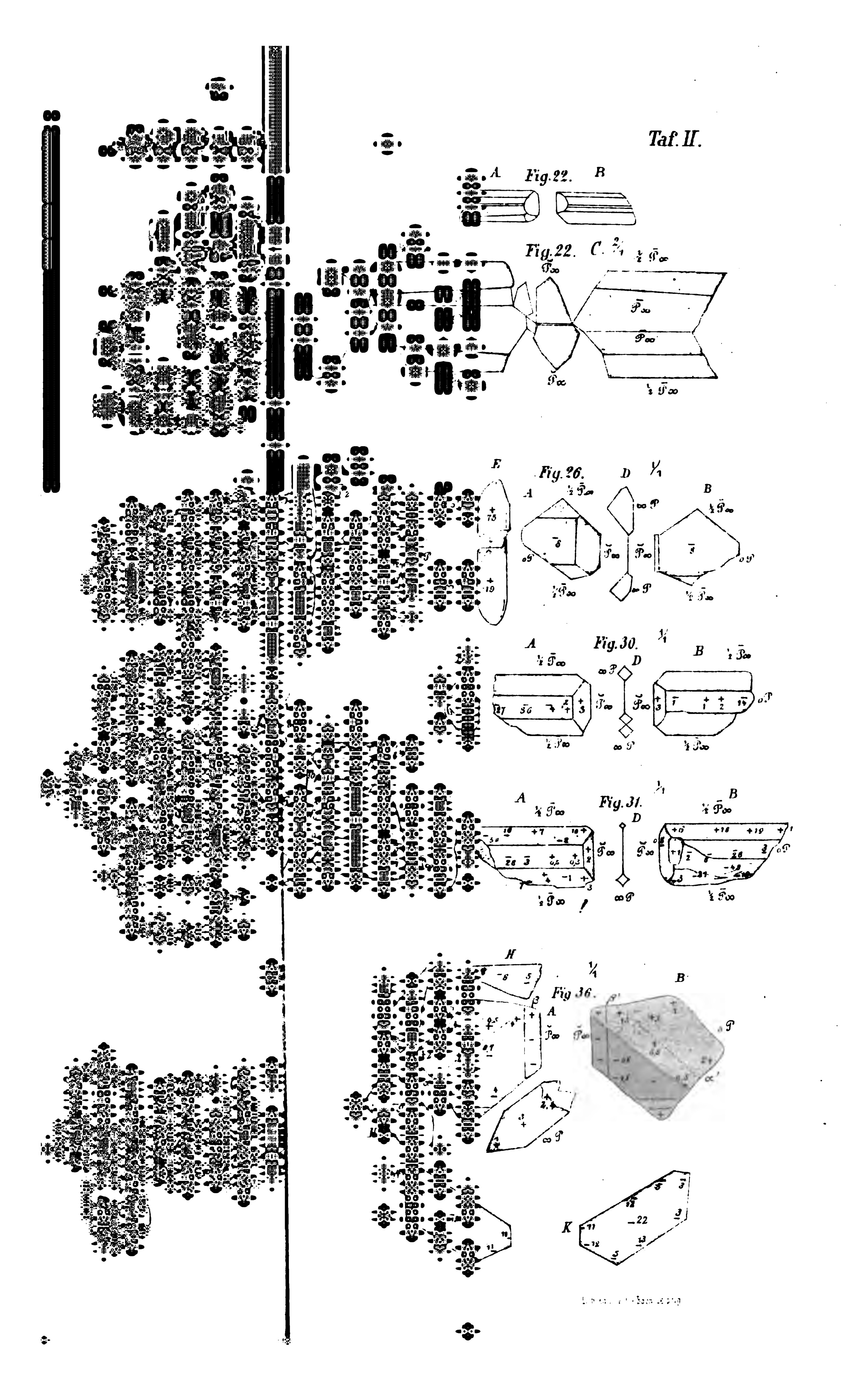
stärkere äussere Einflüsse die ursprüngliche Beschaffenheit bei weiterem Wachsen so beträchtlich gestört werden kann, dass sie in die andere Form übergeht; und es dürften vielleicht die oben bei den Krystallen Nr. 30 und 31 beobachteten Vorgänge auf einem solchen Wechsel der Bildungsweise beruhen (S. 332). Ja, es können, wie ich oben bei dem Krystalle Nr. 53 (S. 315 und 332) gezeigt habe, beide Arten des Wachsthumes in gewisser Weise sogar neben einander bestehen: nach der Richtung der Makrodiagonale gewachsene Fasern legen sich in der Richtung der Brachydiagonale zur Bildung tafelförmiger Krystalle aneinander.

Inhalt.

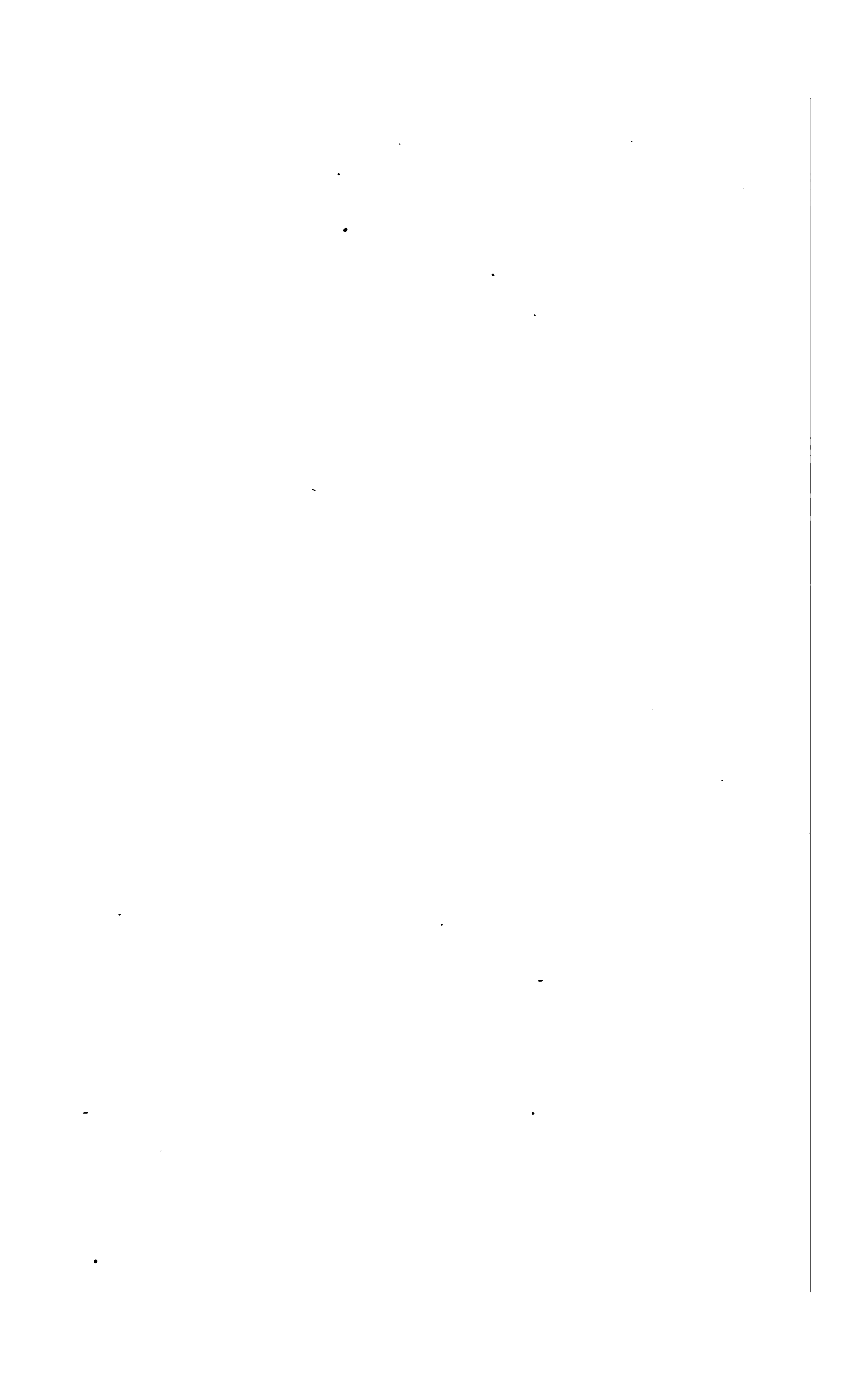
Berichtigungen:

S. 295 Z. 6 von oben ist zu lesen: beobachteten.
S. 302 Z. 2 von unten ist zu lesen: am ausgebildeten.
S. 304 Z. 16 von oben ist zu lesen: Nr. 12.
S. 326 Z. 17 von unten ist zu lesen: gebildeten verticalen Kanten.
S. 332 Z. 6 von unten ist zu lesen: zeigt.


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10
Fig. 17.
Fig. 16.



Taf. II.
Fig. 22.
Fig. 22. C.
Fig. 26.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 36.



Taf. III.

Fig. 41. 1/1 A

Fig. 45. 1/1 B

Fig. 34. 1/1 B

Taf. IV.

Fig. 59

A B

Fig. 65.

B A

Fig. 72. C

Fig. 71.

A D B



ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

ZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES ARAGONITES

NEBST

EINER ÜBERSICHT ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DER THERMOELEKTRICITÄT DER KRYSTALLE.

VON

W. G. HANKEL

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° V.

MIT DREI TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1872.

Vom Verfasser übergeben den 30. September 1872.
Der Abdruck vollendet den 6. November 1872.

ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

W. G. HANKEL.

ZEHNTE ABHANDLUNG.

ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES ARAGONITES

NEBST

EINER ÜBERSICHT ÜBER DIE ENTWICKELUNG DER LEHRE VON DER THERMOELEKTRICITÄT DER KRYSTALLE.

MIT DREI TAFELN.

Da durch meine in den letzten Jahren ausgeführten Untersuchungen die Lehre von der Thermoelektricität der Krystalle zu einem gewissen Abschlusse gebracht ist, so erscheint es mir zweckmässig, hier die Entwickelung derselben in ihren Hauptzügen zusammenzustellen. Ich werde dabei nur diejenigen Arbeiten besonders hervorheben, welche einen Fortschritt darin bewirkt haben.

Die Entwickelung unserer Kenntnisse von der Thermoelektricität der Krystalle hat mit der Beobachtung der elektrischen Kräfte auf einem erhitzten Turmalin begonnen. Bei diesem Minerale sind durch seine krystallographischen und übrigen physikalischen Verhältnisse die vortheilhaftesten Bedingungen für eine möglichst grosse Intensität der auftretenden elektrischen Spannungen gegeben. Einer solchen Vereinigung der günstigsten Umstände bedurfte es aber gerade, um im Anfange des vorigen Jahrhunderts bei der Unvollkommenheit der damaligen physikalischen Apparate die elektrischen Wirkungen eines Krystalles überhaupt wahrnehmen zu können.

Die älteste Angabe über die Anziehung, welche ein erwärmter Turmalinkrystall auf kleine Körperchen ausübt, findet sich in einem merkwürdigen 1707 zu Chemnitz und Leipzig erschienenen Buche: »Curiöse Speculationen bei schlaflosen Nächten.«*) Es heisst daselbst S. 269: »Wie mir denn ohnlängst nur der curiöse Herr Daumius, jetziger wohlbestellter Stabs-Medicus bei der Königl. Polnischen und Churf. Sächs. am Rhein stehenden Militz, erzehlet hat, dass anno 1703 die Holländer einen aus Ost-Indien von Ceylon kommenden Edelstein, Turmalin oder Turmale, auch Trip genannt, zum ersten

*) Das von mir benutzte Werk findet sich in der Königl. Oeffentlichen Bibliothek zu Dresden. Sein Verfasser hat in Dresden gelebt.

mahl nach Holland gebracht hätten, welcher die Eigenschafft hätte, dass er die Turff-Asche auf der heissen und glüenden Turff-Kohle, nicht allein wie ein Magnet das Eisen, an sich ziehe, sondern auch solche Asche zu gleicher Zeit wieder von sich stosse, welches mit Lust zu sehen sei, denn bald ein wenig Asche darauf hüpffte, und gleichsam sich stellete, als ob es sich mit Gewalt in den Stein hineindrehen wolte, bald spränge dagegen ein wenig wieder davon hinweg, als wolte es gleichsam von neuem ausholen wieder darauf zu springen, und würde deswegen von denen Holländern Aschentrecker genannt; die Couleur sei Pomerantzenroth mit Feuer-Farbe erhöhet. „Wenn der Turff kalt sei, so thäte dieser Stein gar nichts.«

Im Jahre 1717 hat Lémery der Pariser Akademie einen geschliffenen Turmalin vorgelegt und die von ihm ausgehende Wirkung gezeigt. Es heisst in der Histoire de l'académie royale des sciences vom Jahre 1717, S. 7 unter dem Abschnitte Diverses observations de physique générale: »Voici encore un petit aiman. C'est une Pierre, qu'on trouve dans une Rivière de l'Isle de Ceylan, grand comme un denier, plate, orbiculaire, épaisse d'environ une ligne, brune, lisse et luisante, sans odeur et sans goût, qui attire et ensuite repousse de petits corps legers, comme de la Cendre, de la limaille de Fer, des parcelles de papier. M. Lémery la fit voir. Elle n'est point commune et celle qu'il avoit coûtoit 15 livres.« In den weiteren Reflexionen über die obigen Anziehungen und Abstossungen, die noch ungefähr eine halbe Seite einnehmen, werden dieselben einem Wirbel zugeschrieben, der sich bildet, aufhört, und sich in kleinen Intervallen wiederholt; eine Andeutung, dass diese Anziehungen elektrischer Natur seien, findet sich aber nirgends.

In dem 1727 erschienenen Buche: »Curieuses und reales Natur-, Kunst-, Berg-, Gewerck- und Handelslexicon« wird die Anziehung leichter Körper durch den Turmalin, so wie die Veranlassung zur Entdeckung dieser Eigenschaft ausführlicher erwähnt. Es heisst daselbst S. 1958: »Trip, Turmalin oder Aschentrecker, ein Ceylanischer Edelgestein, der aus selbigen Landen vor ungefähr 20 Jahren erstlich roh herauskommen und von Ostindien-Fahrern an hochteutsche Juden verkauft worden, welche dieselbigen Steine sodann zu schleiffen und an Mann zu bringen gesucht. Weil aber die Jubeliers an deren Härte, ohnerachtet sie die couleur eines Chrysolits haben, gezweiffelt;

ist selbiger von ihnen aufs Feuer zur Probe geleget worden, da sie denn nicht allein befunden, dass er solche ausgehalten; sondern auch wider ihr Vermuthen die Torffasche an sich gezogen, welches ihnen als etwas sonderliches lieber gewesen, denn die Güte des Steins selbst; und durch diese Begebenheit ist man von ohngefähr auf dessen Benennung gefallen, sind auch die grossen Stücke dünner zu schleiffen angefangen und deren Preis auf 8. 10. und mehr Holländische Gulden gesteigert worden. Der Stein ist sonst in weiterer Würckung nicht bekannt, ziehet aber praeparata metallica chymica eben so wohl als gedachte Torffasche an, welche er doch jederzeit nach geschehener attraction wieder von sich wirfft; und dieses in infinitum repetiret.*) Kalt ist er ohne dergleichen Würckung; jedoch darff er auch nicht allzu heiss gehalten werden. Hierbei ist zu mercken, dass unsere Land-Chrysoliten dieses nicht thun wollen, noch viel weniger eine andere Species Gemmae.«

Erst in einer 1756 der Berliner Akademie vorgelegten, aus dem Deutschen ins Französische übersetzten Abhandlung (Mémoire concernant quelques nouvelles expériences électriques remarquables) wies Aepin nach, dass jene Anziehungen und Abstossungen durch elektrische Kräfte erzeugt werden. Er besass zwei Turmaline, beide geschliffen, und zwar auf der einen Seite eben, auf der anderen mit in einer Spitze zusammenlaufenden Facetten. Jeder dieser beiden Steine zeigte beide Elektricitäten, die eine auf der einen, die andere auf der entgegengesetzten Seite. Da bei dem einen die ebene, bei dem andern die mit Facetten versehene Seite positiv war, so gewann

*) Wie bei dem Erhitzen eines Turmalins auf Kohle die Anziehung der Aschentheilchen den Blicken der Juweliere nicht entgehen konnte, ersieht man aus dem nachstehenden Berichte über einen von Wilke angestellten Versuch (Abhandlungen der schwedischen Akademie der Wissenschaften aus dem Jahre 1768, deutsch von Kästner, Bd. 30, S. 125). Wilke streute Asche auf eine dünne geschwärzte Blechscheibe, legte einen geschliffenen, und zwar auf der einen Seite mit einer ebenen Fläche, auf der anderen mit Facetten versehenen Turmalin mit seiner ebenen Seite darauf, und setzte die Scheibe auf einen heissen Metallcylinder. »Der Stein fängt da auf dem warmen Cylinder bald an mit der Asche zu spielen, und wirft sie ringsumher und über die geschwärzte Scheibe oft 6 Zoll weit, je nachdem die Aschentheilchen gross sind. Im Uebergange zum Abkühlen hört dieses Spiel auf, fängt aber von Neuem an, nachdem der Stein mehr erkaltet ist und noch schneller,« wenn die Scheibe auf einen kalten Metallcylinder gelegt wird.

er die Ueberzeugung, dass das Auftreten der entgegengesetzten Elektricitäten auf den beiden Seiten der geschliffenen Steine nicht durch die Verschiedenheit der äusseren Form, sondern durch die innere Structur des Steines bedingt sei.

Aepin beobachtete ferner, dass, wenn er einen seiner beiden Turmaline auf einer Glasplatte oder glühenden Kohle oder durch die mittelst eines Hohlspiegels concentrirten Sonnenstrahlen erhitzte, derselbe beim Erhitzen elektrisch wurde, merkwürdigerweise aber mit gerade entgegengesetzter Lage der elektrischen Pole als bei der Abkühlung nach dem Eintauchen in siedendes Wasser. Jedoch vermochte Aepin nicht diese wichtige Beobachtung richtig zu deuten; er glaubte, diese umgekehrte Lage der elektrischen Pole sei eine Folge der ungleichen Erhitzung beider Seiten des Steines, und gehe, sobald die ungleichen Temperaturen sich ausgeglichen hätten, in die gewöhnlich (beim Abkühlen) auftretende über.

Das richtige Verständniss dieses Vorganges gewann erst Canton; er sprach 1759 bestimmt aus, dass der Turmalin nicht im erwärmten Zustande überhaupt, sondern nur während des Steigens und Sinkens seiner Temperatur elektrisch werde, und zwar bei zunehmender Wärme gerade in entgegengesetzter Weise als bei abnehmender, womit die zuvor erwähnte Beobachtung des Aepin naturgemäss erklärt war.

Canton benutzte ungeschliffene Turmaline von grösserer Länge; dies setzte ihn, indem er einen solchen von einem halben Zoll Länge in drei Stücke zerschnitt, in den Stand, die weitere Entdeckung zu machen, dass jedes dieser Stücke ebenfalls wieder zwei entgegengesetzte Pole zeigte, und überhaupt in qualitativer Hinsicht dem unzerschnittenen Krystalle glich.

Als er einen Turmalin in ein mit dem Elektrometer verbundenes blechernes, mit heissem Wasser gefülltes Gefäss warf, zeigte das Instrument weder während des Erwärmens des Krystalles, noch auch während der Abkühlung des ganzen Apparates Elektricität; ein Beweis, dass die Mengen der erregten positiven und negativen Elektricitäten stets gleich gross sind, und sich durch die leitende Flüssigkeit vollständig ausgleichen.

Im folgenden Jahre beobachtete Canton eine ähnliche elektrische Erregung an den Krystallen des brasilianischen Topases.

Diese auf den Krystallen durch die blosse Wirkung der Wärme entstehende Elektricität erregte das grösste Interesse der Physiker und Mineralogen und wurde vielfach Gegenstand der Forschung.

Bei seinen Untersuchungen über die oben beschriebenen Vorgänge entdeckte Hauy an den beiden Enden der Hauptaxe des Turmalins eine verschiedene Ausbildung (Hemimorphismus), und brachte dieselbe sogleich in Beziehung zu den daselbst auftretenden Elektricitäten. Er weist auf die Wichtigkeit der Erforschung der thermoelektrischen Erscheinungen an Krystallen hin, weil sie (wenigstens für damals) das einzige Mittel seien, um durch die alleinige Einwirkung der Wärme Elektricität zu erregen, und weil die chemische Verwandtschaft, indem sie die Molecüle dieser Körper zu regelmässigen Gestalten vereinigt, sich mit der Elektricität verbunden zu haben scheine, um die verschiedenen Wirkungen der beiden elektrischen Fluida durch den Unterschied in der Ausbildung der beiden Axenenden darzustellen. Ueber die Vertheilung der beiden Elektricitäten an dem erkaltenden Turmalin*) äussert er nur, dass das am einfachsten gebildete Ende der Axe negative Elektricität zeigte.

Hauy entdeckte ferner die thermoelektrischen Erregungen am Boracit, Mesotyp (Skolezit der neueren Mineralogen), Kieselzinkerz und Titanit, während Dré**) dieselbe beim Prehnit und Brard beim Axinit auffand. Während Hauy bei den meisten dieser Krystalle nur eine an ihren beiden Enden mit entgegengesetzten Elektricitäten versehene, sogenannte polarelektrische Axe annahm, beobachtete er bei dem in Würfeln krystallisirenden Boracit vier solche polare Axen, welche je zwei diametral gegenüber liegende Ecken des Würfels verbinden, und dergestalt angeordnet sind, dass je zwei an den Enden einer Seitenkante liegende Ecken entgegengesetzte Pole zeigen.

Beim Boracit fand Hauy ebenso wie beim Turmalin die beiden Enden einer jeden polaren Axe in ungleicher Weise ausgebildet; die

---

*) Da die elektrischen Erregungen bei den Krystallen während des Erkaltens gerade die entgegengesetzten sind als beim Erhitzen, so genügt es, nur die Vorgänge beim Erkalten anzugeben. Diese sind im Folgenden also stets zu verstehen, wenn elektrische Vertheilungen ohne weiteren Zusatz aufgeführt werden.

**) In der ersten Auflage seines Traité de minéralogie Bd. 3 S. 167 sagt Hauy vom Prehnit: »Electrique par la chaleur (observation du Cit. Dré)«, während in der zweiten Auflage der eingeklammerte Zusatz fehlt.

positiven Enden waren entweder durch die Flächen eines Tetraëders abgestumpft, während die negativen Enden in eine unverletzte Ecke ausliefen, oder, wenn beide Enden abgestumpft erschienen, so traten an den positiven Enden noch die Flächen eines Trigondodekaëders auf.

Auch bei den übrigen elektrischen Krystallen, bei welchen Hauy nur eine polarelektrische Axe annahm, glaubte er eine gleiche hemimorphische Bildung nach dieser Axe erwarten zu dürfen. Am Kieselzinkerz, das in der That eine polarelektrische Axe besitzt, hat später Mohs den in ausgezeichneter Weise an den Enden dieser Axe auftretenden Hemimorphismus beobachtet.*)

Schon oben wurde erwähnt, dass die thermoelektrischen Vorgänge das lebhafteste Interesse erregt haben, und wir finden daher ausser den obengenannten Physikern noch den Herzog von Noya, Wilson, Bergmann, Wilke und Priestley mit ausgedehnten Untersuchungen über den Turmalin beschäftigt, jedoch ohne dass ihre Versuche den zu ihrer Zeit bekannten Gesetzen wesentlich Neues hinzugefügt haben.

Bis in die ersten Jahrzehnte dieses Jahrhunderts kannte man im Gebiete der thermoelektrischen Erscheinungen mit Bestimmtheit nur polarelektrische Axen, d. h. Axen, welche an ihren beiden Enden entgegengesetzte Elektricität zeigen,**) und hielt sich daher für berechtigt, das Vorkommen solcher Axen allgemein oder vielmehr ausschliesslich anzunehmen, obwohl dieselben mit Sicherheit nur an den unsymmetrischen (hemimorphischen) Krystallen beobachtet worden waren. Aber gerade der Umstand, dass die polarelektrischen Axen nur bei den unsymmetrischen Krystallen auftreten, veranlasste Schweigger***) zu dem Ausspruche, dass, »da durchaus keine äussere

*) Dagegen sind, wie ich gleich hier erwähnen will, die anderen oben genannten Krystalle nicht hemimorphisch. Wenn bei einzelnen Individuen an dem einen Ende einer Axe einzelne Flächen auftreten, welche an dem anderen Ende fehlen, so hat diese Abweichung von der Symmetrie nur in zufälligen Störungen ihren Grund, und dem entsprechend besitzen diese Krystalle auch nicht eine polarelektrische Axe, sondern zeigen an den beiden Enden der betreffenden Axe gleichnamige Elektricitäten. Vgl. meine Untersuchungen über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases (Bd. XIV dieser Abhandlungen S. 370) und des Schwerspathes (Bd. XV S. 277).

**) Eine vereinzelte davon abweichende Beobachtung Hauy's (Traité de minér. Bd. II. S. 154) an dem Bruchstücke eines brasilianischen Topases, dessen Endflächen er negativ und dessen Seitenflächen er positiv fand, blieb unbeachtet.

***) Jahrb. der Chem. und Phys. Bd. 39 S. 245 (Jahrgang 1823).

Kraft auf das Hauptgesetz der Krystallbildung — Symmetrie — Einfluss zu haben vermag, eine innerlich begründete Kraft, welche solches vermag, selbst wesentlich für die Krystallbildung sein müsse.« Er betrachtete daher die Unterschiede, welche je nach der Richtung in den während der Bildung der Krystalle thätigen Kräften vorhanden sein müssen, um eine bestimmte regelmässige Anordnung der Molecüle zu bewirken, als elektrische oder dieser Kraft verwandte. Jedes Molecül sollte eine polarelektrische Axe besitzen, und die gegenseitige Einwirkung dieser Polaritäten sowohl die Cohäsion überhaupt als auch die besondere Form der Krystallisation hervorbringen.

Eben diese thermoelektrischen Erscheinungen an Krystallen gaben auch Berzelius Anlass zur Aufstellung seiner elektrochemischen Theorie; in gleicher Weise wie Schweigger betrachtete er die kleinsten Theile (Molecüle) ähnlich wie den Turmalin mit einer elektrischen Polarität begabt, »von welcher die elektrochemischen Erscheinungen bei ihrer Vereinigung abhängen, und deren ungleiche Intensität die Ursache des Kraftunterschiedes ist, womit sich ihre Verwandtschaften äussern. . . . Jede chemische Wirkung ist also, ihrem Grunde nach, ein elektrisches Phänomen, das auf der Polarität der Partikeln beruht. Alles, was Wirkung der sogenannten Wahlverwandtschaft zu sein scheint, wird durch eine in gewissen Körpern stärker als in anderen vorhandene elektrische Polarität bewirkt.«

Die bis dahin nur sehr geringe Zahl der als thermoelektrisch bekannten Krystalle wurde 1824 durch eine Mittheilung Brewster's über die von ihm während der Jahre 1817 und 1818 ausgeführten Versuche nicht unwesentlich vermehrt. Brewster giebt als thermoelektrisch an:

Skolecit *)	Diamant
Mesolith *)	Auripigment
Grönländischer Mesotyp	Analcim
Kalkspath	Amethyst
Gelber Beryll	Bergkrystall aus dem Dauphiné
Schwerspath	Idokras (Vesuvian)
Schwefelsaurer Strontian	Honigstein
Kohlensaures Blei	Schwefel (sulphur native)

*) Es ist Brewster wahrscheinlich, dass Hauy's Mesotyp eines dieser beiden Mineralien ist.

Diopsid	Granat
Rother und blauer Flussspath	Dichroit.*)

Brewster gebührt ferner das grosse Verdienst, zuerst seine Aufmerksamkeit auch den künstlich aus wässerigen Lösungen dargestellten Krystallen zugewandt, und elektrische Spannungen durch Temperaturänderungen auf ihnen hervorgerufen zu haben.**) Er nennt als thermoelektrisch:

Weinsaures Kali-Natron (Seignettesalz)	Schwefelsaure Magnesia
Weinsäure	Blausaures Kali
Oxalsaures Ammoniak	Zucker
Chlorsaures Kali	Essigsaures Blei
Schwefelsaure Magnesia mit Natron (?)	Kohlensaures Kali
Schwefelsaures Ammoniak	Citronsäure
Eisenvitriol	Quecksilbersublimat.

Während Brewster sich die Aufgabe gestellt hatte, die Reihe der thermoelektrischen Krystalle zu vergrössern, geht das Bestreben der späteren Forscher besonders auf die Ermittelung der Gesetze, denen die Krystalle in ihrem elektrischen Verhalten unterworfen sind.

P. Erman fand bei seinen Untersuchungen auf Bruchstücken

*) Man glaubte längere Zeit, dass Brewster bei der Unvollkommenheit des zu seinen Versuchen angewandten Verfahrens sich in Betreff der elektrischen Anziehungen geirrt haben dürfte, und dass die meisten der von ihm genannten Krystalle nicht elektrisch würden. Riess und Rose schliessen ihre Abhandlung über die Pyroelektricität der Mineralien (Abhandl. der Akad. der Wissensch. zu Berlin, 1843) mit den Worten: »Von dem Brewster'schen Verzeichniss sind daher nur Skolezit, Mesolith (zum Theil), Schwerspath und Quarz pyroelektrisch gefunden worden.« An einer anderen Stelle äussern sie sich dahin, dass negativen Resultaten thermoelektrischer Untersuchungen nur ein temporärer Werth beizulegen sei. Und in der That ist es mir, wie dieser Bericht in seinem weiteren Verlaufe zeigen wird, gelungen, bei den meisten der in jenem Verzeichnisse stehenden Mineralien nicht blos die thermoelektrische Erregung überhaupt nachzuweisen, sondern auch die specifische Vertheilung der Elektricität auf denselben festzustellen. Ob freilich Krystalle wie Flussspath und Granat thermoelektrisch erregt werden können, wird erst noch weiterer Forschung bedürfen.

**) Ein durch Schmelzen erzeugtes und thermoelektrische Erscheinungen darbietendes Kunstprodukt besass schon Hauy; es war eine im heftigsten Schmelzfeuer von dem jüngern Saussure durch Zersetzung des Gypses mittelst concreter Phosphorsäure dargestellte Masse von der Grösse einer Haselnuss, ohne äusseres Zeichen von Krystallisation, die durch Wärme polarelektrisch wurde (Jahrb. der Chem. und Phys. Bd. 25 S. 172).

brasilianischer Topase*) dieselbe Vertheilung der Elektricität, wie sie bereits Hauy an einem eben solchen Bruchstücke (s. oben S. 350) wahrgenommen hatte: die beiden Durchgangsflächen erschienen negativ, während er auf den Seitenflächen blos positive Spannungen nachzuweisen vermochte;**) und er schliesst aus seinen Versuchen, dass die Art der Elektricitätsvertheilung eine ganz eigenthümliche, von den bisher bekannten Analogien total abweichende sei, indem die eine Thätigkeit, namentlich die — E, in der Axe und den Parallelen mit ihr herrsche, während die andere (+ E) ihre Richtung senkrecht auf die Axe habe und ihr Sitz überall an der perimetrischen Oberfläche aller Seitenflächen sei.

Wenn auch, wie ich in Band XIV dieser Abhandlungen gezeigt habe, die vorstehende Ansicht über die elektrische Vertheilung am Topase nicht richtig ist, so finden wir doch in ihr zuerst ein Abgehen von der bis dahin allgemein angenommenen Vorstellung, dass die elektrischen Axen stets polare sein, d. h. an beiden Enden entgegengesetzte Elektricitäten zeigen müssten.***)

Becquerel†) und etwas später Forbes††) suchten das Verhältniss der Stärke der Elektricität zur Länge und zum Querschnitte der Krystalle, sowie zu den Temperaturänderungen zu erforschen. Ihre Bemühungen hatten jedoch nicht den gewünschten Erfolg.†††)

Diese Untersuchungen wurden 1859 von Gauguin†*) wieder aufgenommen; nach ihm ist die Menge der von einem Turmalin entwickelten Elektricität proportional seinem Querschnitte, aber unab-

---

*) Abhandl. der Berl. Akad. vom Jahr 1829 S. 57.

**) Vergl. hierüber meine Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases (Bd. XIV dieser Abh. S. 360).

***) Die von Erman angegebene Vertheilung existirt am Topase nicht; dagegen habe ich eine ähnliche Anordnung der Elektricitäten, wie ich später zeigen werde, an nicht hemimorphischen Krystallen des tetragonalen und hexagonalen Systemes aufgefunden.

†) Annal. de chim. et de phys. T. 37. S. 5. 355. Poggend. Annal. Bd. 13. S. 628.

††) Transact. of the roy. soc. of Edinburgh Bd. 13. S. 25.

†††) Ein allgemeines Gesetz hierüber aufzustellen würde auch nicht möglich sein, da sich bei meinen vielfachen Beobachtungen herausgestellt hat, dass die Intensität der auf den einzelnen Krystallen derselben Mineralspecies auftretenden Elektricität je nach der individuellen Beschaffenheit derselben sehr verschieden ist.

†*) Annal. de chim. et de phys. 3 Sér. Bd. 37. S. 1.

hängig von seiner Länge, und während des Sinkens oder der Erhöhung der Temperatur um eine gegebene Anzahl Grade wird unabhängig von der Dauer der Abkühlung oder Erwärmung stets dieselbe Elektricitätsmenge entwickelt.

In der zuvor citirten Abhandlung von Forbes findet sich eine bis jetzt noch nicht wieder beobachtete Thatsache verzeichnet; Forbes beschreibt einen Turmalin, der an beiden Enden positive, in der Mitte aber negative Elektricität besass.*) Diese eigenthümliche Vertheilung der Elektricität sucht er dadurch zu erklären, dass er sich zwei Turmaline mit ihren negativen Polen aneinander gelegt und so verwachsen denkt, dass auf ihren Seitenflächen keine Spur der Zusammensetzung übrig geblieben; er folgte bei dieser Erklärung Brewster, der die oben S. 350 erwähnte, von Hauy an einem Topasbruchstücke beobachtete Vertheilung durch eine Verwachsung zweier Topase mit ihren positiven Enden erklären zu können vermeinte; ein Beweis, mit welcher Zähigkeit man die Ansicht von durchweg polarelektrischen Axen festhielt.

Kieselzinkerz. Nachdem Mohs**) die hemimorphische Bildung der Enden der Hauptaxe des Kieselzinkerzes nachgewiesen, bestimmte Köhler***) an diesem Minerale die Lage der elektrischen Pole. Dieselben finden sich an den Enden der Hauptaxe und sind so vertheilt, dass an dem Ende mit der geringeren Anzahl Flächen (Grundpyramide) die positive, an dem anderen Ende mit der grösseren Anzahl Flächen (ausser der Grundpyramide auch Flächen von horizontalen Prismen) dagegen die negative Elektricität auftritt.

Struvit. Eine andere ausgezeichnet hemimorphisch gebildete Substanz entdeckte später Hausmann†) in dem Struvit (phosphorsaure

*) Es heisst S. 35: In the course of my researches, I have met with a crystall of turmaline, possessing no external irregularities of structure (the terminations, howewer, of the crystall are not preserved), which has the singular property of presenting in cooling a vitreous pole at both ends. Having ascertained this point, I proceeded to examine the electricity of its parts, by means of Coulomb's Proof-plane, by which the electricity of any portion is insulated and examined. As I expected, I found the central portion of the crystall resinously electrified.

**) Mohs, Grundriss der Mineralogie, 2. Bd. Fig. 37.

***) Poggend. Ann. Bd. 17. S. 148.

†) Nachrichten von der G. A.-Universität zu Göttingen 1846. S. 121.

Natron-Magnesia), der ebenfalls eine stark polarelektrische Axe in der Richtung seiner unsymmetrisch ausgebildeten Hauptaxe besitzt.

Boracit. Für die Lage der positiven und negativen Pole auf den Ecken der Boracitwürfel stellte Köhler das Gesetz auf, dass diejenigen Ecken, welche durch glatte Tetraëderflächen abgestumpft sind, positive, die anderen, welche entweder gar nicht oder durch matte Tetraëderflächen abgestumpft erscheinen, aber negative Elektricität zeigen.

Rhodizit. Eine gleiche Vertheilung der Elektricität beobachtete G. Rose*) an dem von ihm auf seiner Reise nach dem Ural aufgefundenen Rhodizit, der in seinen Formen und physikalischen Eigenschaften mit dem Boracit übereinstimmt. Auch hier sind die durch glatte Tetraëderflächen abgestumpften Ecken der würfelförmigen Krystalle positiv, die nicht abgestumpften negativ.

Turmalin. Für den Turmalin versuchte G. Rose**) die Lage der elektrischen Pole in Bezug auf die Krystallgestalt zu bestimmen, worüber Hauy (s. S. 349) sich sehr vorsichtig nur dahin geäussert, dass, soweit seine Beobachtungen reichten, das am einfachsten gebildete Ende den negativen Pol trage. Rose beachtete besonders die Stellung des Hauptrhomboëders zu dem dreiseitigen Prisma, das nebst einem sechsseitigen Prisma gewöhnlich die Seitenflächen der Turmalinkrystalle bildet. In den meisten Fällen erscheint dasjenige Ende der Hauptaxe, an welchem die Flächen des Hauptrhomboëders auf den Kanten des erwähnten dreiseitigen Prismas aufgesetzt sind, positiv, das andere dagegen, an welchem sie auf den Flächen dieses Prismas aufgesetzt sind, negativ. Doch finden sich auch Krystalle, bei welchen die Lage der Pole gerade die umgekehrte ist.***) An

---

*) Poggend. Ann. Bd. 39. S. 321; Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 88.

**) Abhandl. der Berl. Akad. 1836. S. 215.

***) Will man diese letzteren Krystalle wieder mit dem vorstehenden Gesetz in Einklang bringen, so muss man, wie G. Rose hervorhebt, entweder das an ihnen vorkommende Rhomboëder als das sogenannte Gegenrhomboëder oder die vorhandenen drei Prismenflächen als nicht dem gewöhnlichen, sondern dem anderen, dreiseitigen Prisma, welches jenes zu einem sechsseitigen ergänzt, angehörend betrachten. In seiner oben citirten Abhandlung von 1836 gab Rose der erstern Betrachtungsweise den Vorzug, während er in der bereits auch schon angeführten in Gemeinschaft mit Riess veröffentlichten Abhandlung die zweite für die wahrscheinlichere erklärt.

Der Umstand, dass Turmaline existiren, deren Pole in Bezug auf die Krystallform

manchen Krystallen treten ferner ausser jenem dreiseitigen Prisma zugleich die Flächen eines zweiten dreiseitigen Prismas auf, welche die Flächen des ersten zu einem vollständigen sechsseitigen ergänzen, so dass in diesen Fällen die Erkennung der Flächen des ersten Prismas unmöglich ist, wenn sie nicht durch die bisweilen neben ihnen erscheinenden Flächen der Hälfte eines zwölfseitigen Prismas ausgezeichnet sind. — Auch aus dem Auftreten der Flächen bestimmter Rhomboëder lässt sich die Lage der Pole beim Turmalin nicht mit absoluter Sicherheit erschliessen; denn wenn sich auch vorzugsweise die Flächen des ersten spitzern Rhomboëders am positiven, die Flächen des ersten stumpfern am negativen Pole finden, so erscheinen doch bisweilen die Flächen des ersten spitzern Rhomboëders auch am negativen, und die Flächen des ersten stumpferen am positiven Pole.*)

Die künstlichen Krystalle, von welchen Brewster nur ganz im Allgemeinen angegeben hatte, dass sie thermoelektrisch erregbar seien, waren ohne Beachtung geblieben. Um eine genauere Kenntniss der bei ihnen auftretenden elektrischen Erscheinungen zu erlangen, begann ich im Jahre 1833 eine genauere Untersuchung des Zuckers, der Weinsäure und des weinsauren Kali-Natrons**) (Seignettesalzes), an welche sich später die Prüfung des neutralen weinsauren Kalis***) anschloss.

An den Krystallen des Zuckers, der Weinsäure und des neutralen weinsauren Kalis entdeckte ich einen sehr deutlich ausgesprochenen

gerade entgegengesetzt liegen, musste bisher bei den Vorstellungen, die man sich in mehr oder weniger klarer Weise von der Entstehung der Thermoelektricität machte, allerdings sehr auffallend erscheinen, und es lag daher nahe, durch eine der obigen Annahmen diese Abweichung zu beseitigen. Nach den von mir in der letzten Zeit am Vesuvian und Beryll ausgeführten Untersuchungen wird man jedoch an den in Bezug auf die Form gerade entgegengesetzt liegenden Polen keinen Anstoss mehr nehmen dürfen, da, wie ich später mittheilen werde, auch bei den genannten Krystallen ein eben solcher Wechsel der Polaritäten in Bezug auf die Form vorkommt, der seinen Grund in den bei ihrer Bildung obwaltenden Umständen hat. Eben diese Beobachtungen am Vesuvian und Beryll werden auch für die oben S. 354 erwähnte eigenthümliche, von Forbes angeführte Vertheilung der Polarität an einem Turmalinkrystalle (beide Enden positiv, die Mitte negativ) das richtige Verständniss geben.

*) Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 67.

**) De thermoelectricitate crystallorum, Halae 1839; Pogg. Annal. Bd. 49 S. 493.

***) Pogg. Annal. Bd. 53. S. 620.

Hemimorphismus, und diesem entsprechend in der Richtung der unsymmetrisch ausgebildeten Axe eine stark polarelektrische Axe.

Zucker. Stellen wir die dem monoklinoëdrischen Systeme angehörigen Krystalle des Zuckers so, dass der klinodiagonale Hauptschnitt auf uns zugewandt ist und in ihm der spitze Winkel zwischen der Hauptaxe und der Klinodiagonale auf der vorderen Seite im oberen Quadranten liegt, so erscheinen am linken Ende der Orthodiagonale nur die Flächen des verticalen Prismas ∞ P; dagegen treten am rechten Ende der Orthodiagonale ausser diesen Flächen auch noch die zwei Flächen der rechten Hälfte eines sogenannten Klinoprismas (Klinodomas) Ꝑ ∞ auf. Dasjenige Ende der Orthodiagonale, welches die Flächen dieses Klinoprismas trägt und häufig verwachsen ist, zeigt beim Erkalten positive,*) das andere Ende dagegen, an welchem diese Flächen fehlen, negative Elektricität. Legen sich zwei Krystalle zu einem Zwillinge zusammen, so geschieht die Verwachsung mit denjenigen Enden der Orthodiagonale, an welchen sich die Flächen des Klinoprismas finden; es sind dann die freien Enden eines solchen Zwillinges negativ, die Mitte, wo die Verwachsung stattgefunden hat, positiv.

Weinsäuren. Aehnliche Verhältnisse und Vorgänge beobachtete ich bei den Krystallen der Weinsäure, welche ebenfalls dem monoklinoëdrischen Systeme angehören. Stellen wir das Axensystem wieder in der beim Zucker angegebenen Weise, so erscheinen die Weinsäurekrystalle gleichfalls in der Richtung der Orthodiagonale hemimorphisch: während am rechten Ende derselben sich nur die Flächen des verticalen Prismas ∞ P finden, treten ausser diesen auf der linken Seite noch zwei Flächen (die Hälfte) eines Klinoprismas Ꝑ ∞ auf. Mit diesem linken Ende verwachsen die Krystalle, wenn sie sich nach der Richtung der Orthodiagonale zu Zwillingen zusammenlegen. Dasjenige Ende der Orthodiagonale, an welchem sich nur die Flächen des Prismas ∞ P finden, zeigt beim Erkalten negative, das andere dagegen, an welchem ausser den genannten Flächen auch noch die Flächen des Klinoprismas Ꝑ ∞ auftreten, positive Elektricität. An

*) Selbstverständlich ist auch bei den künstlich aus wässerigen Lösungen erzeugten Krystallen die elektrische Polarität bei der Erwärmung gerade die entgegengesetzte als bei der Abkühlung.

den zuvor beschriebenen Zwillingskrystallen sind daher, ebenso wie beim Zucker, die nach aussen stehenden Enden negativ, die Mitte aber, wo die Verwachsung stattgefunden hat, positiv.

Ein weiteres Interesse gewinnen diese Beobachtungen durch die Entdeckung Pasteur's, dass ausser der gewöhnlichen Weinsäure, deren Krystalle die oben beschriebene Gestalt besitzen, noch eine zweite Weinsäure existirt, welche Pasteur*) durch Spaltung der sogenannten Traubensäure in diese neue Säure und die gewöhnliche Weinsäure erhielt. Diese neue Säure besitzt dieselbe chemische Zusammensetzung wie die gewöhnliche, und stimmt mit dieser auch in ihren physikalischen Eigenschaften überein, mit Ausnahme der Lage der den Hemimorphismus bedingenden Flächen des Klinoprismas Ꝑ∞ und der Drehungsrichtung der Polarisationsebene des Lichtes. Die Krystalle dieser zweiten Weinsäure haben nämlich zwar im Allgemeinen dieselbe Form mit genau denselben Winkeln, wie die zuvor beschriebenen Krystalle der gewöhnlichen Weinsäure; dagegen treten bei der oben angenommenen Stellung der Krystalle die Flächen des Klinoprismas Ꝑ∞, welche hemimorphisch sich nur an dem einen Ende der Orthodiagonale ausbilden, nicht wie bei der gewöhnlichen Weinsäure auf dem linken, sondern auf dem rechten Ende der Orthodiagonale auf. Die Formen der beiden Säuren sind Spiegelbilder von einander, wenn man die Krystalle mit ihren orthodiagonalen Hauptschnitten parallel zur Ebene eines Spiegels aufstellt. In elektrischer Hinsicht fand Pasteur eine in Bezug auf die Lage der hemimorphischen Flächen des Klinoprismas gleiche Vertheilung, wie ich sie bei der gewöhnlichen Weinsäure beobachtet hatte, d. h. das nur mit den Flächen des verticalen Prismas ∞P versehene Ende der Orthodiagonale ist beim Erkalten negativ, das entgegengesetzte Ende, welches ausser den Flächen ∞P auch noch die zwei Flächen des Klinoprismas Ꝑ∞ trägt, positiv. Mit dem Wechsel in der Lage der unsymmetrischen Flächen an den beiden Enden der Orthodiagonale haben also in gleicher Weise auch die elektrischen Pole gewechselt.

Die neue Säure unterscheidet sich ferner von der gewöhnlichen Weinsäure dadurch, dass ihre Lösung die Polarisationsebene des

*) Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. Bd. 28. S. 56.

Lichtes nach links ablenkt, während die Lösung der gewöhnlichen Weinsäure dieselbe um dieselbe Grösse nach rechts dreht. Pasteur hat hiernach die neue Säure mit dem Namen der Linkstraubensäure belegt, während die gewöhnliche Weinsäure als Rechtstraubensäure bezeichnet werden kann.

Weinsaures Kali. Bereits 1841*) habe ich auf den Zusammenhang der hemimorphischen Bildung beim Zucker und der Weinsäure mit der Eigenschaft ihrer Lösungen, die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen, hingewiesen; und gerade der Umstand, dass nach Biot's Messungen das neutrale weinsaure Kali ein sehr starkes Drehungsvermögen zeigt, bewog mich damals, die Krystalle dieses Salzes auf ihre Form und ihr elektrisches Verhalten genauer zu untersuchen. Ich fand in der That die Krystalle des neutralen weinsauren Kalis sehr stark hemimorphisch gebildet: an dem einen Ende der Hauptaxe zeigten die zum rhombischen Systeme gehörigen Krystalle eine dachförmige Zuschärfung,**) während sich am anderen Ende derselben eine gegen die Hauptaxe senkrechte Fläche fand. Das erstere Ende zeigte beim Erkalten positive, das zweite negative Elektricität.

Weinsaures Kali-Natron. Wenn auch in der Regel die beiden Weinsäuren die Verschiedenheit von rechts nach links in der Lage der unsymmetrischen Flächen auf ihre Salze übertragen, so kommen doch auch Fälle vor, in denen die Krystalle mancher Salze vollkommen symmetrisch ausgebildet sind. Dies letztere ist nach Pasteur***) namentlich der Fall bei den Krystallen des sogenannten Seignettesalzes (Doppelsalz aus weinsaurem Kali und Natron), wenn dasselbe aus der gewöhnlichen Weinsäure bereitet worden ist. Solche Krystalle ohne unsymmetrische Flächen lagen mir bei meinen früheren Untersuchungen dieses Salzes vor; sie gehören dem rhombischen Systeme an, und wenn wir die bei den tafelförmigen Individuen grössten

---

*) Pogg. Annal. Bd. 53. S. 620.

**) Ebend. S. 621.

***) In der zuvor citirten Abhandlung heisst es S. 92: Les cristaux de lévoracémate et de dextroracémate de soude et de potasse, obtenus en essayant de faire le racémate double de ces deux bases, diffèrent de ces sels obtenus directement avec les acides lévoracémique et tartrique isolés, en ce que, dans le premier cas, les facettes hémiédriques existent toujours, tandis qu'elles sont souvent absentes dans le second cas, dans le sel Seignette ordinaire, par exemple.

parallelen Flächen als die senkrecht gegen die Hauptaxe gerichteten Flächen 0 P betrachten, so werden die gewöhnlich vorhandenen seitlichen verticalen Flächen gebildet von ∞P, $\infty \breve{P} 2$, $\infty \breve{P} \infty$ und $\infty \bar{P} \infty$.

Nach meinen Beobachtungen ergab sich nun auf den Flächen $\infty \breve{P} \infty$, also an den Enden der Makrodiagonale, beim Erkalten negative, auf den Flächen $\infty \bar{P} \infty$, also an den Enden der Brachydiagonale, positive Elektricität. Auf den Flächen 0 P war mit Bestimmtheit eine elektrische Erregung nicht nachzuweisen.

Es kommen nun aber sehr häufig Krystalle vor, bei denen wahrscheinlich infolge des Anliegens auf der Bodenfläche nur die zu der einen Hälfte der Makrodiagonale gehörigen Flächen ∞P und $\infty \breve{P} 2$ ausgebildet sind; sie stellen nur eine der mittelst eines Schnittes durch die Hauptaxe und die Brachydiagonale entstandenen Hälften des zuvor beschriebenen vollständigen Krystalles dar.

Die Beobachtung hatte an den Enden der beiden Diagonalen der Basis keine Unsymmetrien oder hemimorphische Bildungen ergeben; beide Enden einer jeden Diagonale trugen dieselben Flächen, aber auch gleichnamige elektrische Pole. Es hätte also nahe gelegen, hieraus den Schluss zu ziehen, dass an den gleichgebildeten Enden einer Axe auch nur gleichnamige Elektricitäten auftreten können, und dass bei diesen Krystallen die Enden der Makrodiagonale negative, und die Enden der Brachydiagonale positive Zonen tragen. Indessen der allgemeinen Ansicht, dass im Gebiete der thermoelektrischen Krystalle überhaupt nur polarelektrische Axen existiren könnten, folgend, glaubte ich damals die eben beschriebenen Hälften, die an den beiden Enden der Makrodiagonale in der That hemimorphisch gebildet erschienen, als die wirklichen einfachen Krystalle, und die zuerst beschriebenen vollständigen Formen als Zwillinge, in denen sich gerade wie beim Zucker und der Weinsäure zwei einfache mit den elektrisch positiven Polen zusammengelegt hätten, betrachten zu müssen.*)

*) Es bedarf noch einer genauern Untersuchung, ob bei den Doppelsalzen der beiden Weinsäuren mit dem Kali und Natron nicht auch ein wirklicher Hemimorphismus sich zeigt; derselbe würde in der Richtung der Hauptaxe zu erwarten sein, und nach dieser müsste dann eine polarelektrische Axe auftreten. Ein solcher Krystall würde in seiner elektrischen Vertheilung einem sächsischen oder Adun-Tschiloner Topase

Im Jahre 1842*) jedoch gewann ich durch eine sorgfältige Untersuchung der Topaskrystalle die Ueberzeugung, dass die Annahme von ausschliesslich polarelektrischen Axen eine zu enge war, dass auch Axen mit gleichnamigen Polen an den Enden existirten. Gerade wie bei dem Seignettesalze fand ich bei den Topaskrystallen an den Enden der Brachydiagonale positive, an den Enden der Makrodiagonale negative Zonen, und berichtigte hiernach sofort meine frühere Ansicht über das elektrische Verhalten der vollständigen Krystalle des ebengenannten Salzes. Aus Mangel an geeigneten, an beiden Enden der Hauptaxe ausgebildeten Topaskrystallen wagte ich aber damals, obwohl bereits gewisse Beobachtungen darauf hinwiesen, noch nicht, auch an beiden Enden der Hauptaxe des Topases dieselbe Elektricität anzunehmen, und zwar besonders gehindert durch Hauy's Beobachtung zweier Topaskrystalle, welche an dem einen Ende der Hauptaxen nicht genau dieselben Flächen trugen als an den anderen, und daher Hauy veranlassten, den Topas überhaupt für hemimorph zu erklären.

In ihrer Abhandlung**) vom Jahre 1843 kehrten Riess und G. Rose wieder zu einer an die ältere Auffassung sich anschliessenden Ansicht zurück; sie nahmen im Topase zwei in der Brachydiagonale liegende gegen einander gekehrte polarelektrische Axen an. Die beiden negativen Pole derselben sollten in der Mitte der Diagonale zusammenfallen und die beiden positiven in den stumpfen brachydiagonalen Seitenkanten liegen. Sie bezeichneten diese eigenthümliche von ihnen aufgestellte Vertheilung der elektrischen Pole an den Krystallen als centralpolarisch.

Diese centralpolarische Vertheilung glaubten sie beim Prehnit***) ebenfalls annehmen zu müssen: auch dieser sollte zwei in der Brachydiagonale liegende gegen einander gekehrte polare Axen besitzen, deren negative Pole ebenso wie beim Topase in der Mitte zusammenfielen, während die positiven sich an den Enden der Brachydiagonale befänden.

Boracit. Es ist oben S. 349 berichtet worden, dass Hauy in

gleichen, der an dem einen Ende der Hauptaxe natürliche Flächen trägt, am andern aber von dem auf die Hauptaxe senkrechten Durchgange begrenzt wird.

*) Pogg. Annal. Bd. 56. S. 37.

**) Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 93.

***) Ebend. S. 91.

den acht Ecken der Boracitwürfel elektrische Pole fand, und dass Köhler (S. 355) die Bestimmung hinzufügte, dass die durch glatte Tetraëderflächen abgestumpften Ecken positive, die gar nicht oder durch rauhe Tetraëderflächen abgestumpften Ecken dagegen negative Elektricität besitzen. Um nun das elektrische Verhalten der Boracite vollständig kennen zu lernen, schien es mir nothwendig, auch die elektrische Beschaffenheit der Flächen zu erforschen. Behufs einer Verstärkung der oft nur schwachen Polarität der Flächen erhöhte ich die Temperatur über die sonst gewöhnlich benutzten Grade, und entdeckte im Jahre 1835, dass in der auf jeder Ecke auftretenden Polarität sowohl bei steigender, als auch bei sinkender Temperatur ein zweimaliger Wechsel eintritt.*) Hiernach sind also

		die Ecken mit glatten Tetraëderflächen	die nicht abgestumpften oder mit matten Tetraëderflächen versehenen Ecken
bei steigender Temperatur	zuerst	—	+
	dann	+	—
	darauf	—	+
	endlich	0	0
bei sinkender Temperatur	erst	+	—
	dann	—	+
	zuletzt	+	—

Die Würfelflächen, in deren Eckpunkten vier elektrische Pole, je zwei gleichnamige an den Endpunkten einer Diagonale, liegen, zeigen ebenfalls elektrische Spannungen;**) dabei treten auf ihnen dieselben Verschiedenheiten in dem elektrischen Verhalten, wie auf den Ecken hervor. Bei den Flächen der ersten Art erstreckt sich eine positive Zone von der einen positiven Ecke über die Mitte der Fläche hinweg bis zur diagonal gegenüberliegenden, bei den Flächen der zweiten Art verbreitet sich die negative Elektricität in entsprechender Weise; oft wird fast die ganze Fläche, im ersten Falle von der positiven, im zweiten von der negativen eingenommen; nur selten erscheint die Mitte der Fläche unelektrisch und besitzen dann auf

*) Quaestionis de thermoelectricitate crystallorum pars altera. Halae 1840; Pogg. Ann. Bd. 50 S. 471; Bd. 56 S. 58; Bd. 61 S. 281; Bd. 74 S. 231.

**) Diese Abhandll. Bd. VI S. 149: Ueber die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites.

ihr die von den Ecken ausgehenden elektrischen positiven und negativen Zonen fast gleich grosse Ausdehnung. Beim Erhitzen und Erkalten zeigen die Flächen in der Hauptsache dieselben Wechsel der Polaritäten wie die mit ihnen gleichnamigen Ecken.

Bergkrystall. Der Bergkrystall ist von Brewster in dem S. 351 mitgetheilten Verzeichnisse ohne weitere Angaben als thermoelektrisch aufgeführt worden. Gleich bei den ersten Versuchen gelang es mir, die elektrische Vertheilung auf seiner Oberfläche im Allgemeinen festzustellen.*) Der Bergkrystall zeigte hiernach drei gegen die Hauptaxe senkrechte polarelektrische Axen, so dass auf den Seitenflächen abwechselnd positive und negative Zonen auftraten. Jedoch lagen die Pole (Orte der stärksten Spannungen) nicht in der Mitte der Flächen, sondern erschienen nach der einen oder anderen Seite verschoben.

Dies veranlasste mich, später den Bergkrystall mit Rücksicht auf seine beiden als rechts- und linksdrehend unterschiedenen Formen einer neuen Prüfung**) zu unterwerfen. Dieselbe bestätigte das frühere Resultat und gab eine klare Einsicht in die krystallographischen und elektrischen Verhältnisse dieses Minerales.

Die sechsseitige Pyramide des Bergkrystalles ist nämlich nicht als die gewöhnliche sechsseitige Pyramide, sondern als ein rechtes oder linkes hexagonales Trapezoëder zu betrachten; es gehören bei ihr daher nicht die beiden in einem Sextanten der Basis befindlichen, sondern vielmehr die zwei an dem Eckpunkte einer Nebenaxe einander gegenüber liegenden Flächen (die rechte obere mit der linken unteren, die linke obere mit der rechten unteren) zu einem Systeme zusammen; und von den vier Flächen, welche um den Endpunkt einer Halbaxe liegen, sind also jedes Mal nur zwei dieser Flächen (eines jener Systeme) auf diesen Endpunkt zu beziehen, während die andern beiden Flächen den Endpunkten der benachbarten Halbaxen angehören.

Die bei den Bergkrystallen an den oberen und unteren Endpunkten der abwechselnden Seitenkanten auftretenden und dieselben auch äusserlich als rechte oder linke Individuen charakterisirenden

*) Quaestionis de thermoel. cryst. pars altera. S. 41. Poggend. Ann. 50 S. 606.

**) Diese Abhandll. Bd. XIII. S. 321.

Flächen gehören einem trigonalen Trapezoëder an, welches durch hemimorphische Ausbildung aus dem hexagonalen Trapezoëder entsteht, indem die an dem einen Ende einer Nebenaxe gelegenen Flächen des letztern wachsen, die an dem anderen Ende gelegenen aber verschwinden. In gleicher Weise ist die an denselben Seitenkanten, an welchen die trigonalen Trapezoëder liegen, auftretende trigonale Pyramide die hemimorphische Ausbildung einer sechsseitigen Pyramide der zweiten Art.

Auch die Flächen der sechsseitigen Pyramide, bei welcher, wie zuvor erwähnt, nur zwei der um einen Endpunkt einer Nebenaxe liegenden vier Flächen zu dieser Axe gehören, nehmen an einer solchen hemimorphischen Bildung durch ungleiche Ausbildung der zu entgegengesetzten Endpunkten einer Nebenaxe gehörigen Flächenpaare theil, so dass die sechsseitige Pyramide als Combination zweier in verwendeter Stellung befindlichen Rhomboëder (Haupt- und Gegenrhomboëder genannt) sich darstellt. Die Flächen dieser beiden Rhomboëder unterscheiden sich von einander aber nicht immer blos durch die Grösse, sondern öfter auch noch durch ihren Glanz und ihre Glätte. Die Flächen des Gegenrhomboëders weisen durch ihre schwächere Ausbildung auf ein minderes Hervortreten der zu ihnen gehörigen Halbaxe hin und sind also auf denjenigen Endpunkt der Nebenaxe zu beziehen, welcher die Flächen der trigonalen Pyramide trägt, während die Flächen des Hauptrhomboëders den in den anderen drei Kanten endenden Halbaxen angehören.

Der Bergkrystall ist hiernach in Bezug auf seine drei Nebenaxen hemimorphisch gebildet, und nach der Richtung dieser ursprünglich ausgebildeten Axen liegen also auch drei polarelektrische Axen; dabei fallen die positiven Pole dieser Axen in diejenigen Seitenkanten des Prismas, welche an ihrem oberen und unteren Ende die Flächen der trigonalen Pyramide tragen, die negativen Pole dagegen in die zwischenliegenden Kanten. Es ziehen sich nun die positiven Zonen von einer oberen Fläche des Gegenrhomboëders über die ihnen zugehörige Seitenkante, in welcher die positiven Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Gegenrhomboëders herab, während sich die negativen Zonen von einer oberen Fläche des Hauptrhomboëders über die zu ihnen gehörige Seitenkante, in welcher die negativen Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Hauptrhomboëders herab er-

strecken. Die elektrischen Zonen haben also eine schiefe Lage, und diese ist je nach Art des Krystalles verschieden; bei den sogenannten rechten Bergkrystallen gehen diese Zonen von rechts oben nach links unten, bei den linken Krystallen von links oben nach rechts unten. Die Lage der Zonen lässt sich an der Gestalt äusserlich leicht erkennen, wenn die Flächen der trigonalen Pyramide gestreift sind; diese Streifen laufen nämlich stets parallel mit den Combinationskanten der trigonalen Pyramide und des Hauptrhomboëders, und es haben die elektrischen Zonen dieselbe schiefe Lage, wie diese Streifung. Auch wenn die Krystalle nicht ringsum ausgebildet, sondern mit dem unteren Ende angewachsen und zu längeren Prismen ausgebildet sind, ist die zuvor angegebene schiefe Lage der elektrischen Zonen auf den Prismenflächen noch deutlich wahrzunehmen. — Störungen in dem regelmässigen Verlaufe der Zonen treten ein durch theilweise mangelhafte Ausbildungen und durch Zusammenwachsen rechter und linker Individuen zu einem einfach erscheinenden Krystalle.

Symmetrische (nicht hemimorphe) Krystalle.

Krystalle des rhombischen Systems.

Topas. Wenn ich auch bereits 1842 beim Topase an den beiden Enden einer jeden Diagonale der Basis eine gleichnamige Elektricität gefunden hatte (s. ob. S. 361), so vermochte ich doch aus Mangel an geeigneten Exemplaren über die Natur der Hauptaxe nicht zu entscheiden. Durch die bereitwillige Unterstützung seitens der Vorsteher ausgezeichneter Mineraliensammlungen mit möglichst vollkommenen Krystallen ausgerüstet, ist es mir infolge einer umfassenden Untersuchung des Topases*) gelungen, die bis dahin fast allgemein geltende Ansicht von der Nothwendigkeit eines polaren Gegensatzes an den Enden einer elektrischen Axe zu beseitigen, und das Verhalten der symmetrisch gebildeten Krystalle darzustellen. Die Abhandlung über die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases konnte ich mit folgenden Sätzen schliessen:

1) Die Thermoelektricität der Krystalle ist nicht durch den Hemimorphismus bedingt, sondern wahrscheinlich eine allgemeine Eigenschaft aller Krystalle, soweit die übrigen physikalischen Eigen-

*) Diese Abhandll. Bd. XIV. S. 357.

schaften ihr Auftreten und ihre Anhäufung bis zu messbarer Stärke überhaupt gestatten.

2) Da bei nicht hemimorphischen Krystallen die beiden Enden einer und derselben Axe krystallographisch gleichwerthig sind, so müssen dieselben sich auch elektrisch gleich verhalten, also dieselbe Polarität zeigen, falls sie eben eine wirklich gleiche Ausbildung erhalten haben.

3) Die Vertheilung der Elektricität auf nicht hemimorphischen Krystallen hängt ausser von dem molecularen Gefüge auch von der äusseren Gesammtform ab, und kann durch Veränderungen der letzteren in bestimmter Weise modificirt werden.

4) Wie der Hemimorphismus überhaupt in der Krystallographie als ein Ausnahmefall dasteht, so ist auch das Auftreten polarer, d. h. an den Enden mit entgegengesetzter Polarität erscheinender Axen ein Ausnahmefall, der eben durch die hemimorphische Bildung erzeugt wird.

Für den Topas speciell ist die elektrische Vertheilung im Allgemeinen folgende: Bei vollkommen ausgebildeten Topaskrystallen sind die Enden der Hauptaxe und der Brachydiagonale nebst den um- und anliegenden Flächenstücken positiv, die Enden der Makrodiagonale mit ihren Umgebungen aber negativ. Sind die Enden der Hauptaxe unvollkommen ausgebildet, wie bei den meisten brasilianischen Krystallen, so verschwindet daselbst die positive Elektricität, und tritt die negative an ihre Stelle. Eben diese negative Elektricität erscheint auch auf den angeschlagenen gegen die Hauptaxe senkrechten Durchgangsflächen, so wie auf künstlichen Schnittflächen, welche die an sich positiven brachydiagonalen Seitenkanten abstumpfen. So stellt z. B. ein sächsischer an dem oberen Ende vollkommen ausgebildeter, am unteren aber von einer Durchgangsfläche begrenzter Topas gewissermassen einen künstlich hemimorphisch gemachten Krystall dar, der infolge dieser Gestaltung nach der Hauptaxe eine polare Vertheilung der Elektricität (das obere Ende positiv, das untere negativ) zeigt, während die beiden Enden der Brachydiagonale positive und die beiden Enden der Makrodiagonale negative Elektricität entwickeln.

Schwerspath. Die Krystalle des Topases variiren im Ganzen nur wenig in ihrer Gestalt; sie bilden vorzugsweise verticale Säulen,

welche gewöhnlich mit dem einen Ende der Hauptaxe aufgewachsen sind. Dagegen bietet der Schwerspath eine viel grössere Mannichfaltigkeit der Form und des Wachsthumes dar; ich unterwarf daher die Krystalle desselben einer umfassenden Untersuchung,*) um den Einfluss des Wachsthumes und der äusseren Begrenzung auf die elektrische Vertheilung kennen zu lernen.

Nach der Art ihres Wachsthumes lassen sich die Krystalle des Schwerspathes in zwei Gruppen theilen, 1) in solche, bei denen das Wachsthum in der Richtung der Makrodiagonale, und 2) in solche, bei denen es in der Richtung der Brachydiagonale erfolgt ist.

Betrachten wir zunächst einen Krystall der ersten Gruppe, z. B. von Przibram, der vorzugsweise von den Flächen 0 P, ∞ P, $\frac{1}{2}$ $\bar{P}$ ∞ begrenzt ist, so sind die an den Endpunkten der Brachydiagonale von den Flächen $\frac{1}{2}$ $\bar{P}$ ∞ gebildeten horizontalen, und ebenso die an den Endpunkten der Makrodiagonale von den Flächen ∞ P gebildeten verticalen Kanten negativ, dagegen die Flächen ∞ P (mit Ausschluss der an den ebengenannten verticalen Kanten gelegenen Theile), so wie die Mitten der Flächen 0 P in mehr oder minder grosser Ausdehnung positiv. Treten an den Enden der Makrodiagonale die Flächen des Brachydomas $\breve{P}$ ∞ auf, so wird die negative Polarität an den Enden der Makrodiagonale schwächer; vergrössern sich jene Flächen $\breve{P}$ ∞ noch mehr, so erscheint auf ihnen, besonders wenn die Flächen ∞ P sehr klein werden, oder ganz verschwinden, positive Elektricität. Dehnen sich andererseits die Flächen ∞ P mit ihren positiven Theilen immer weiter nach den Enden der Brachydiagonale hin aus, so wird die negative Elektricität dort immer mehr verdrängt; kommen die Flächen ∞ P daselbst zum Durchschnitt, so sind die dadurch an den Endpunkten der Brachydiagonale entstehenden verticalen Kanten positiv, und die negative Elektricität erscheint auf den Resten der Flächen $\frac{1}{2}$ $\bar{P}$ ∞, so wie auf den Flächen 0 P, wo die sonst in der Mitte vorhandene positive Zone durch sie unterdrückt wird.

Bei den Krystallen der zweiten Gruppe, welche in der Richtung der Brachydiagonale gewachsen sind, wollen wir von einem einfachen Felsöbanyaer Krystalle mit nahe rhombischem Querschnitte, der hauptsächlich von den Flächen 0 P und ∞ P begrenzt wird,

*) Diese Abhandl. Bd. XV. S. 271.

ausgehen. Die Flächen $0 P$ sind bei ihm vorwaltend positiv, die prismatischen Seitenflächen ∞P dagegen im Allgemeinen negativ, mit wachsender Intensität gegen die Enden der Brachydiagonale hin. Entwickelt sich nun an den Enden der Brachydiagonale die Gestalt $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$, und an den Enden der Makrodiagonale die Gestalt $\breve{P} \infty$, so erscheinen die Flächen $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$ ganz oder doch zum Theil negativ, während die Flächen $\breve{P} \infty$, wenn die positiven Endflächen $0 P$ sehr gross sind, und die Krystalle eine Art von faseriger Ausbildung nach der Richtung der Makrodiagonale zeigen, wie die Krystalle von Dufton, schwache negative oder gar keine elektrische Spannung, wenn die Flächen $0 P$ aber eine geringere Ausdehnung (wie bei den Auvergner Krystallen) besitzen, positive Elektricität entwickeln.

Aragonit. Topas und Schwerspath haben keine Neigung Zwillingskrystalle zu bilden; dagegen existirt vom Aragonit wohl kein wirklich einfacher Krystall. Eine genauere Prüfung des Aragonites, wie solche im Nachfolgenden mitgetheilt ist, bot daher das Interesse dar, den Einfluss der Zwillingsbildung auf die thermoelektrischen Erscheinungen untersuchen zu können.

Auf den scheinbar einfachen Krystallen von der Form ∞P, $\infty \breve{P} \infty$ und $\breve{P} \infty$ ist die elektrische Vertheilung folgende: die brachydiagonalen Seitenkanten sind positiv, und ebenso die sie bildenden Flächen ∞P; es nimmt die Intensität dieser positiven Polarität von den brachydiagonalen Seitenkanten nach den von den Flächen ∞P und $\infty \breve{P} \infty$ gebildeten Kanten hin, ab. Die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ sind negativ. Die an dem einen ausgebildeten Ende der Hauptaxe befindlichen Flächen $\breve{P} \infty$ sind theils negativ, theils unelektrisch, theils positiv.

Legen sich nun Krystalle dieser Form zu Zwillingen, Drillingen, Vier- und Fünflingen zusammen, so behalten sie, so weit möglich, die zuvor angegebenen Polaritäten. Brachydiagonale Kanten von 116° sind positiv, Stücke der Flächen $\infty \breve{P} \infty$ überall, wo sie auftreten, negativ. Die Kanten von 128°, in welchen zwei Individuen sich zu einem Zwillinge vereinigen, erscheinen je nach den Umständen schwach positiv, unelektrisch oder negativ; die negative Elektricität tritt stets hervor, wenn die Krystalle eine faserige Structur und eine im Verhältniss zur Dicke grosse Höhe oder Länge besitzen. Eben dieses Verhalten zeigen auch die Nähte,*) in welchem auf einer Seitenfläche

*) S. die nachfolgende Abhandlung.

des zusammengesetzten Krystalles zwei ebenfalls in Zwillingsstellung befindliche Individuen einander berühren. Bei den mehrfach zusammengesetzten Krystallen finden sich gewöhnlich die Flächen 0 P; dieselben sind stets negativ elektrisch. Bei kleinen Krystallen vermag die negative Elektricität dieser beiden Endflächen der positiven auf den Seitenflächen das Gleichgewicht zu halten; vergrössern sich die Seitenflächen durch die Verlängerung des Krystalles, so reicht die negative Elektricität der Endflächen nicht aus, es treten dann auf den Zusammenfügungsstellen der Individuen die zuvor beschriebenen negativen Zonen hervor, und bei noch grösserer Länge dehnt sich die negative Elektricität der beiden Endflächen 0 P auch über die benachbarten Theile der Seitenflächen aus.*)

Prehnit. Nach richtiger Deutung der oben S. 361 erwähnten Beobachtungen von Riess und Rose gleicht der Prehnit in seinem elektrischen Verhalten dem Topase und Aragonite; an den Enden der Brachydiagonale liegen positive, an den Enden der Makrodiagonale negative Zonen.

Krystalle der schiefaxigen Systeme.

Aus diesen Systemen sind jetzt (nach Ausschluss der hemimorphen Krystalle des Zuckers und der beiden Weinsäuren) mit Bestimmtheit als elektrisch bekannt: Titanit, Euklas, Diopsid, Skolezit**) und Axinit.

Titanit. Beim Titanit habe ich ebensolche Wechsel in der Polarität der elektrischen Zonen wie beim Boracit entdeckt; jedoch wechselt auf diesen Krystallen die Elektricität bei steigender Tem-

*) Durch die Zwillingsbildung entstehen (s. d. folgende Abhandl.) Aragonitkrystalle, die gewissermassen hemimorphisch sind, auf der einen Seite von den Flächen $\infty \bar{P} \infty$ und gegenüber von den Flächen ∞P begrenzt; dieser Bildung entsprechend ist die erstere Seite negativ, die zweite positiv; scheinbar besitzen diese Krystalle also eine polarelektrische Axe. — Diese eben beschriebenen Beobachtungen am Aragonit erklären die von Riess und G. Rose am Skolezit gemachten Beobachtungen (Abhdl. der Berl. Akad. 1843 S. 81). Der Zwillingskrystall des Skolezits ist nur durch seine Zwillingsbildung hemimorphisch, und wenn er eine Art polarelektrischer Axe zeigt, so folgt daraus nicht, dass der einfache Krystall, weil er nicht hemimorphisch ist, unelektrisch sein müsse, sondern vielmehr, dass er ebenso wie der Aragonit vier Pole (je zwei einander diametral gegenüberliegende, gleichnamige) besitzt.

**) Aus Mangel an geeigneten Krystallen habe ich die elektrischen Vorgänge auf dem Euklas, Diopsid und Skolezit noch nicht speciell erforschen können. Ueber den Skolezit s. die vorstehende Anmerkung.

peratur nur ein Mal ihr Zeichen, und dem entsprechend auch nur ein Mal bei der Abkühlung. Uebrigens besitzt der Titanit vier elektrische Pole, welche im klinodiagonalen Hauptschnitte, je zwei gleichnamige einander diametral gegenüber liegen.*) Nehmen wir einen einfachen von den Gestalten ∞ P, 0 P, $\frac{1}{2}$ P ∞ und P ∞ begrenzten Titanitkrystall, so erstrecken sich die positiven Zonen von den Flächen 0 P hinüber auf die anliegenden Theile der Flächen $\frac{1}{2}$ P ∞, während die Flächen P ∞, so wie der Rest der Flächen $\frac{1}{2}$ P ∞ negative Polarität zeigen.

Axinit. Nach den Beobachtungen von Riess und Rose hat der Axinit ebenfalls vier elektrische, je zwei gleichnamige einander diametral gegenüberliegende Zonen.**)

Krystalle der einaxigen Systeme (des hexagonalen und tetragonalen Systems).

Wenn die Verschiedenheit der Axen im rhombischen Systeme hinreichend ist, um thermoelektrische Erscheinungen zu erzeugen, so muss auch der Unterschied zwischen der Hauptaxe und den Nebenaxen in den einaxigen Systemen zur Hervorbringung analoger Vorgänge genügen. Und in der That ist es mir bereits gelungen, auf den Krystallen des Idokrases, Apophyllits, Berylles und Kalkspathes elektrische Erregungen zu beobachten. Indem ich die ausführliche Mittheilung dieser Untersuchungen einer späteren Abhandlung vorbehalte, mögen hier nur, als Abschluss dieses Berichtes, die Hauptresultate verzeichnet werden.

Da bei den Krystallen des tetragonalen und hexagonalen Systemes nur eine Art von Gegensatz existirt, nämlich zwischen der Hauptaxe und den Nebenaxen, so werden auch nur hiernach die entgegengesetzten Elektricitäten sich vertheilen können; an den beiden Enden

*) Quaestionis de thermoelectr. cryst. pars altera S. 19. Pogg. Ann. B. 50 S. 244. Bd. 74 S. 239. Ich glaubte damals (1840) bei den Krystallen des Titanits nicht zwei sich kreuzende an den Enden gleichnamige elektrische Axen, sondern vielmehr zwei polarelektrische, einander parallele, nicht durch den Mittelpunkt des Krystalles gehende, mit den gleichnamigen Polen entgegengesetzt gerichtete Axen annehmen zu müssen. Die speciellen Resultate einer neueren umfassenden Untersuchung der Titanitkrystalle werde ich in einer der folgenden Abhandlungen mittheilen.

**) Abhandl. der Berl. Akad. 1843. S. 81. Riess und G. Rose nahmen für den Axinit, ebenso wie ich dies früher beim Titanit gethan, nicht zwei sich kreuzende, an den Enden gleichnamig elektrische, sondern vielmehr zwei parallele nicht durch den Mittelpunkt gehende polarelektrische Axen an.

der Hauptaxe wird sich die eine, senkrecht zu dieser Axe aber ringsum die andere Elektricität entwickeln,*) wobei, wie meine Beobachtungen lehren, der merkwürdige Fall eintritt, dass je nach der Bildungsweise der Krystalle die beiden Elektricitäten ihren Ort wechseln.**)

Idokras (*Vesuvian*). Bei den ringsum ausgebildeten Idokraskrystallen vom Wiluiflusse aus Sibirien sind die Enden der Hauptaxe (die Flächen 0 P und P) positiv, die Seitenflächen ∞ P und ∞ P ∞ aber negativ. Bei den an dem einen Ende angewachsenen Krystallen von Ala in Piemont ist die Vertheilung der Polaritäten die umgekehrte.

Apophyllit. Die Apophyllitkrystalle von Andreasberg zeigen auf den Flächen P positive, auf den Flächen ∞ P ∞ aber negative Spannungen.

Beryll. Bei den sibirischen Beryllen und den Smaragden ist die Endfläche 0 P positiv, die Seitenflächen ∞ P im Allgemeinen negativ. Bei den meisten kurzen und breiten Beryllen aus Elba ist Vertheilung der beiden Elektricitäten die entgegengesetzte.

Kalkspath. An einigen bis jetzt untersuchten, aber nur an dem einen Ende ausgebildeten Bruchstücken von Kalkspathkrystallen waren die Flächen des Rhomboëders R positiv, die Flächen des Skalenoëders R 3 aber negativ.***)

Alle in den letzten Abschnitten dieser Uebersicht mitgetheilten, von mir beobachteten Thatsachen haben die Richtigkeit der oben beim Topase ausgesprochenen Gesetze bestätigt; es ist also die Thermoelektricität eine allgemeine Eigenschaft aller Krystalle, soweit nicht ge-

*) Die eigenthümliche von Forbes beobachtete Vertheilung der Elektricität auf einem Turmaline würde sich erklären, wenn man annimmt, es habe ein nicht hemimorphisches Individuum vorgelegen.

**) Ist ein ähnlicher Wechsel der Polaritäten auf den Turmalinen der Grund, warum am positiven Ende die Flächen des Hauptrhomboëders (s. oben S. 355) bald auf den Kanten, bald auf den Flächen des dreiseitigen Prismas aufgesetzt sind?

***) Ob beim Apophyllit und Kalkspath auch die entgegengesetzten Vertheilungen ähnlich wie beim Idokrase und Beryll vorkommen, vermag ich wegen Mangel an geeigneten Krystallen noch nicht zu entscheiden.

wisse physikalische Eigenschaften ihr Auftreten unmöglich machen, und es zeigen an beiden Enden gleichartig gebildete Axen an ihren Enden dieselbe, hemimorphisch gebildete Axen dagegen an ihren Enden entgegengesetzte Polarität. Die von mir ausgeführten Untersuchungen weisen aber ferner noch hin auf einen Einfluss des Wachsthums und der auftretenden natürlichen Krystallformen, so wie der künstlich hervorgebrachten Gestaltveränderungen, dessen Erforschung erst noch weiter vorschreiten muss, bevor es möglich sein wird, eine vollständige Theorie für alle auf den Krystallen wahrgenommenen elektrischen Vorgänge aufzustellen.

Thermoelektrisches Verhalten der Aragonitkrystalle.

Wenn die thermoelektrische Erregung des Aragonites bisher gänzlich unbekannt geblieben ist, so dürfte der Grund dafür wohl in dem Umstande zu suchen sein, dass man früher die Krystalle dieses Minerales entweder gar nicht oder höchstens gelegentlich einer oberflächlichen Prüfung unterworfen hat, weil man, befangen in der Ansicht, nur hemimorphisch gebildete Krystalle seien überhaupt thermoelektrisch erregbar, von vornherein ein negatives Resultat erwartete; denn die elektrische Spannung auf der Oberfläche der Aragonite wäre hinreichend stark gewesen, um sie mit denselben Mitteln, welche bei den sächsischen Topasen und den Schwerspäthen zu ihrer Erkennung gedient haben, ebenfalls nachzuweisen. Und in der That gelang es mir, als ich durch die Untersuchung des Topases und des Schwerspathes die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass auch nicht hemimorphisch gebildete Krystalle elektrisch werden, gleich bei der ersten Prüfung eines böhmischen Aragonits freie Elektricität auf seiner Oberfläche wahrzunehmen.

Während die in meinen beiden letzten Abhandlungen in Bezug auf ihr thermoelektrisches Verhalten untersuchten Krystalle des Topases*) und des Schwerspathes**) niemals (wenigstens so viel mir bekannt ist) eigentliche Zwillingsformen zeigen, dürfte gerade entgegengesetzt beim Aragonit wohl kaum ein wirklich einfacher Krystall gefunden werden: alle Krystalle desselben sind mehr oder weniger ein Aggregat von Zwillingen. Dieser Umstand hat mich besonders bewogen, den thermoelektrischen Erscheinungen auf den Aragonit-

*) Bd. XIV dieser Abhandlungen.

**) Bd. XV dieser Abhandlungen.

krystallen eine sehr eingehende Untersuchung angedeihen zu lassen, um einen etwa vorhandenen Einfluss der Zwillingsbildung auf die Erregung der Elektricität zu entdecken. Es würde dies gerade bei dem genannten Minerale um so leichter möglich gewesen sein, als einerseits die elektrische Vertheilung auf der allen Gebilden zu Grunde liegenden, aus wenigen Gestalten zusammengesetzten Form sehr einfach und bestimmt hervortritt, und andererseits die Zwillingsbildung sich häufig in der mannichfachsten Weise zur Erzeugung von Drillingen, Vierlingen und Fünflingen wiederholt.

In der nachstehenden Abhandlung werde ich einen Theil meiner Beobachtungen, soweit sie zu einer klaren Darlegung der thermoelektrischen Vorgänge auf den Aragoniten erforderlich sind, mittheilen.

Die Stärke der Elektricität auf den Aragoniten ist, wie schon zuvor angedeutet, ungefähr dieselbe, wie auf vielen Topasen und Schwerspäthen; es konnte daher das bei der Untersuchung der letztgenannten Krystalle von mir angewandte Verfahren*) auch für die analogen Beobachtungen auf den Aragoniten mit Erfolg benutzt werden.

Für die Unterstützung meiner Untersuchung durch Darleihung geeigneter Krystalle habe ich Herrn Geheimen Bergrath Naumann, Herrn Professor Zirkel, Herrn Professor Sandberger, Herrn Professor Weisbach und Herrn Professor Stelzner meinen verbindlichsten Dank zu sagen.

I. Scheinbar einfache Krystalle des Aragonits.

Um Wiederholungen zu vermeiden, werde ich das elektrische Verhalten der Aragonitkrystalle gleich auf die Darlegung ihrer Formverhältnisse folgen lassen.

A. Krystallformen.

Die gewöhnliche Form der scheinbar einfachen Aragonitkrystalle, welche überhaupt dem rhombischen Systeme angehören, wird von den Gestalten ∞P, $\infty \breve{P} \infty$ und $\breve{P} \infty$ gebildet. Fig. I. stellt den Querschnitt des Prismas ∞P, und Fig. II. den Querschnitt eben

*) Abhandl. der K. Sächs. Gesellsch. der Wissenschaften Bd. XIV S. 377 ff., und Bd. XV S. 273.

dieses an den Enden der Makrodiagonale durch $\infty \breve{P} \infty$ abgestumpften Prismas, wie es gewöhnlich bei den böhmischen Aragoniten auftritt, dar.

Nehmen wir den Winkel des Prismas ∞P an den Enden der Brachydiagonale 116° 10′,*) und den über dem Ende der Hauptaxe liegenden Winkel des Brachydomas $\breve{P} \infty$ 108° 26′, so ergibt sich das Verhältniss der drei Axen, wenn a die Hauptaxe, b die Brachydiagonale und c die Makrodiagonale bedeutet,

$$a : b : c = 1 : 0{,}8641 : 1{,}3874.$$

Die Anzahl der beim Aragonite beobachteten Krystallgestalten ist keine grosse; es finden sich

1) Grundpyramide P.
2) Pyramiden der Hauptreihe: $\frac{1}{2} P$, $10 P$, $24 P$.
3) Brachydiagonale Pyramiden: $\frac{1}{2} \breve{P} 2$, $\breve{P} 2$, $2 \breve{P} 2$ und $6 \breve{P} \frac{4}{3}$.
4) Makrodiagonale Pyramiden: $\frac{1}{2} \bar{P} 2$.
5) Verticales Hauptprisma: ∞P.
6) Brachydiagonale horizontale Prismen oder Brachydomen: $\frac{1}{2} \breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, $2 \breve{P}\infty$, $3 \breve{P}\infty$, $5 \breve{P}\infty$, $6 \breve{P}\infty$, $16 \breve{P}\infty$, $20 \breve{P}\infty$ und $24 \breve{P}\infty$.
7) Makrodiagonale horizontale Prismen oder Makrodomen: $\frac{1}{2} \bar{P} \infty$, und $\bar{P}\infty$.
8) Flächenpaar senkrecht gegen die Hauptaxe: $0 P$.
9) Flächenpaar senkrecht gegen die Makrodiagonale: $\infty \breve{P} \infty$.

Uebrigens sind die gewöhnlichen Krystalle, welche hauptsächlich von den Gestalten ∞P, $\infty \breve{P} \infty$ und $\breve{P}\infty$ begrenzt werden, keine einfachen Krystallindividuen, sondern, wie der nächste Abschnitt zeigen wird, mehr oder weniger ein Aggregat von einfachen Krystallen, welche sich in der später zu beschreibenden Zwillingsstellung aneinander gelegt haben. Da jedoch diese häufig eingeschobenen Zwillingslamellen (s. S. 382) keinen wesentlichen Einfluss auf die Vertheilung der Elektricität ausüben, so werde ich die betreffenden Krystalle als einfache behandeln, und ihr elektrisches Verhalten im Folgenden darstellen.

---

*) Der Kürze wegen werde ich sowohl im Texte als auch in den beigegebenen Figuren die beiden Winkel dieser Rhomben, welche also 116° 10′ und 63° 50′ betragen, gewöhnlich in runder Zahl 116° und 64° setzen. Entsprechend soll der Winkel

B. Thermoelektrisches Verhalten der (scheinbar) einfachen Aragonitkrystalle.

Die von mir untersuchten scheinbar einfachen Aragonitkrystalle von Horschenz bei Bilin waren an dem einen Ende der Hauptaxe (dem oberen) mehr oder weniger vollkommen ausgebildet, am anderen (unteren) dagegen verbrochen, und zeigten meistens eine Combination der Gestalten ∞P, $\infty \breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$, P und $2\breve{P}2$.

Ich werde die auf einem Theile derselben ausgeführten Beobachtungen in den dieser Abhandlung beigefügten Zeichnungen darstellen, indem ich in das Netz*) die beobachteten elektrischen Spannungen eintrage und zur leichteren Uebersicht die positiven Regionen durch eine gelblichbraune, die negativen aber durch eine grünliche Farbe kenntlich mache. Das Netz ist dabei in einer brachydiagonalen Seitenkante aufgeschnitten angenommen worden.

Während die ersten sieben Krystalle (Nr. 1 bis 7) zur Darlegung der normalen Vertheilung der Elektricität auf den einfachen Aragonitkrystallen dienen, geben die folgenden (Nr. 8 bis 12) Auskunft über die durch Abweichungen in der Ausdehnung einzelner Krystallflächen bedingten Modificationen.

Bevor ich zu den auf den einzelnen Krystallen ausgeführten Beobachtungen übergehe, wird es zweckmässig sein, eine allgemeine Uebersicht der elektrischen Vertheilung auf den einfachen Krystallen des Aragonites zu geben, weil solche die spätere Darlegung der speciellen Untersuchung der einzelnen Individuen wesentlich abzukürzen gestattet.

Das elektrische Verhalten der in Frage stehenden Aragonitkrystalle ist sehr einfach. Die Flächen $\infty \breve{P}\infty$ sind beim Erkalten negativ**) und bei hinreichender Grösse bleibt die negative Elektricität

---

zwischen ∞P und $\infty \breve{P}\infty$, welcher $121^0\ 55'$ misst, zu 122^0 angenommen werden (Fig. II).

*) Die Netze sind entweder in natürlicher oder in halber linearer Grösse gezeichnet. Im ersteren Falle findet sich neben der Abbildung das Zeichen $^1/_1$, im zweiten das Zeichen $^1/_2$.

**) Die im Texte angegebene Beschaffenheit der Elektricität bezieht sich, wie schon oben ausgesprochen, stets auf den Zustand des Erkaltens; beim Erwärmen ist, ebenso wie bei den übrigen thermoelektrischen Krystallen, die Polarität gerade die entgegengesetzte.

auf sie beschränkt; dagegen sind die Flächen ∞P positiv, und zwar nimmt auf ihnen die positive Spannung nach den von ihnen gebildeten brachydiagonalen Kanten hin zu.

Sind die Bruchstücke (Nr. 1 bis 5) bis zum unteren verbrochenen Ende hin klar, so wächst sowohl die positive Elektricität auf den Flächen ∞P, als auch die negative auf den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ in der Richtung von oben nach unten. Wird aber die Masse des Krystalles (Nr. 6 u. 7) am unteren Ende unrein und undurchsichtig, so wachsen beide Elektricitäten in der eben angegebenen Richtung nur bis zum Beginne des undurchsichtigen Theiles, und nehmen dann auf diesem an Stärke wieder ab. Einen ähnlichen schwächenden Einfluss äussern auch trübe Massen, welche in dem Krystalle Nr. 1 am unteren Ende der Fläche 5, und in dem Krystalle Nr. 5 oberhalb der Mitte unter der Fläche 2 liegen.

Die Flächen $\breve{P} \infty$ zeigen meistens schwache negative Spannungen, welche von den mit den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ gebildeten Kanten bis zur obersten Endkante hin abnehmen, so dass die letztgenannte (von den Flächen $\breve{P} \infty$ gebildete) Kante selbst unelektrisch erscheint. Nur bei den beiden in der oberen Hälfte sehr klaren, in der unteren aber trüben Krystallen Nr. 6 und 7 habe ich auf den Flächen $\breve{P} \infty$ schwache positive Polarität beobachtet.*)

Die mehr oder weniger unebenen Bruchflächen am unteren Ende sind theils negativ (und zwar entweder in ihrer ganzen Ausdehnung, oder mit positiven Zonen an den Enden der Brachydiagonale), theils aber auch positiv (mit negativen Zonen neben den Flächen $\infty \breve{P} \infty$).

Wenn die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ an Grösse abnehmen (Nr. 8), so verbreitet sich am unteren Ende die negative Polarität von ihnen aus über die benachbarten Theile der Flächen ∞P. Wenn dagegen die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ sich so sehr ausdehnen, dass die Krystalle als nach der Richtung der Makrodiagonale flach gedrückte Tafeln erscheinen und die Flächen ∞P also nur eine geringe Grösse besitzen (Nr. 10), so greift umgekehrt die positive Elektricität von den Flächen

*) Auch an einigen der weiterhin beschriebenen Zwillinge (Nr. 13, 19, 20 und 21) erscheinen die Flächen $\breve{P} \infty$ positiv.

∞P auf die benachbarten Theile der Flächen $\infty\breve{P}\infty$ über. In diesem letzten Falle ist häufig eine der Flächen $\infty\breve{P}\infty$ mangelhaft ausgebildet, und fehlen auf ihrer Seite die Flächen ∞P; der Krystall stellt dann gewissermassen nur eine mittelst eines durch die brachydiagonalen Seitenkanten geführten Schnittes abgetrennte Hälfte dar. Infolge dieser Bildung nimmt auf der eben bezeichneten Fläche $\infty\breve{P}\infty$ die negative Spannung, besonders auf dem oberen Theile, ab (Krystall Nr. 11), und geht selbst in die positive über (Kryst. Nr. 12).

Krystall Nr. 1 (Fig. III).

An dem Fig. III*) in seinem Netze dargestellten Krystalle ist die Fläche 5**) namentlich nach unten hin unvollkommen ausgebildet; es scheinen daselbst weniger reine Massen sich in Platten aufgelegt zu haben. Die negative Elektricität nimmt deshalb am unteren Ende dieser Fläche wieder ab. Das obere Ende ist gut ausgebildet, das untere unregelmässig verbrochen. Auf den Flächen $\breve{P}\infty$ werden zwei eingeschobene Lamellen (s. S. 382) sichtbar.

Krystall Nr. 2 (Fig. IV).

Da die Flächen $\breve{P}\infty$ am oberen Ende zum Theil rauh, die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ aber stark horizontal gestreift sind, so lassen sich die sicherlich auch vorhandenen Zwillingslamellen nicht wohl erkennen. Das untere Ende ist ziemlich eben verbrochen.

Krystall Nr. 3 (Fig. V).

Das obere Ende des Fig. V gezeichneten Krystalles ist sehr vollkommen ausgebildet; das untere ziemlich uneben verbrochen.

Krystall Nr. 4 (Fig. VI).

Auf der unteren Hälfte der Fläche 5 hat sich eine ungefähr

*) Zur leichteren Orientirung auf den Tafeln werde ich der Nummer der Figur, welche einen beobachteten Krystall darstellt, stets die Nummer des betreffenden Krystalles voranstellen.

**) Die Bedeutung dieser Zahlen ergibt sich sofort aus der Zeichnung.

2 Mm. dicke Platte aufgelegt. Das untere Ende des Krystalles Nr. 4 (Fig. VI) ist schief, aber ziemlich eben abgebrochen.

Krystall Nr. 5 (Fig. VII).

Der in halber linearer Grösse gezeichnete Krystall Fig. VII ist 8 Centimeter lang, im Ganzen ziemlich rein, schliesst aber trübe Massen ein; namentlich liegt eine solche etwas oberhalb der Mitte unter der Fläche 2, und bedingt die daselbst auftretende Schwächung der Elektricität.

Krystall Nr. 6 (Fig. VIII).

Der in Fig. VIII in halber linearer Grösse dargestellte, dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall ist in seinen oberen drei Fünfteln sehr klar und durchsichtig, wird aber in den unteren zwei Fünfteln undurchsichtig und erscheint daselbst auf seinen äusseren Begrenzungsflächen weniger vollkommen ausgebildet. Am unteren Ende ist er sehr unregelmässig verbrochen. Die Flächen $\breve{P}\infty$ am oberen Ende zeigen positive Spannungen.

Krystall Nr. 7 (Fig. IX).

Auch dieser in halber Grösse abgebildete Krystall (Fig. IX) ist in der oberen Hälfte sehr klar, in der unteren aber unrein und trübe. Wie bei dem vorhergehenden sind die Flächen $\breve{P}\infty$ am oberen Ende positiv.

Krystall Nr. 8 (Fig. X).

Die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ haben bei diesem Krystalle (Fig. X) nur eine geringe Grösse; infolge dessen greift die ihnen angehörige negative Elektricität unten über die Ränder hinweg etwas auf die Flächen ∞P über.

Krystall Nr. 9 (Fig. XI).

Während bei dem vorhergehenden Krystalle die beiden Flächen $\infty\breve{P}\infty$ sehr schmal waren, tritt bei dem Krystalle Nr. 9 (Fig. XI) eine sehr starke Verschmälerung zweier gegenüberliegenden Flächen ∞P ein. Da jedoch die beiden anderen Flächen ∞P noch eine

hinreichende Grösse besitzen, so treten in der elektrischen Vertheilung auf den Flächen ∞P keine Verschiebungen ein.

Das obere Ende des vorliegenden Krystalles ist stark verletzt, das untere sehr unregelmässig verbrochen.

Krystall Nr. 10 (Fig. XII).

Bei diesem Krystalle (Fig. XII) sind die beiden Flächen 4 und 6 sehr schmal, die zwischen ihnen liegende Fläche 5 aber sehr breit, so dass ein Schnitt längs der brachydiagonalen Seitenkanten den Krystall in eine vordere dickere und eine hintere dünnere Platte spalten würde. Die Fläche 5 ($\infty \breve{P} \infty$) ist übrigens vollkommen eben und spiegelnd ausgebildet.

Eine Folge der geringen Grösse der Flächen 4 und 6 ist das Uebergreifen der ihnen angehörigen positiven Elektricität auf die benachbarten Theile der Fläche 5.

Krystall Nr. 11 (Fig. XIII).

Der Fig. XIII gezeichnete Krystall stellt gewissermassen nur die vordere Hälfte eines längs der brachydiagonalen Seitenkanten gespaltenen Krystalles dar; es fehlen nämlich die Flächen 4 und 6 (bis auf einen kleinen Rest der letzteren am unteren Ende). Die sehr verbreiterte Fläche 5 ist (mit Ausnahme eines kleinen hervorstehenden Stückes unten neben dem Reste der Fläche 6) glänzend und hebt sich unter fortwährenden oscillatorischen Combinationen mit Brachydomen, so dass die Dicke des Krystalles (in der Richtung der Makrodiagonale) am unteren Ende etwas grösser ist, als am oberen.

Die obere Hälfte der Fläche 5 erscheint nicht elektrisch oder sehr schwach positiv.

Krystall Nr. 12 (Fig. XIV).

Der Krystall Nr. 12 (Fig. XIV) gleicht in seiner Bildung dem vorhergehenden; auch ihm fehlen die Flächen 4 und 6 (nur von der Fläche 4 zeigen sich am unteren Ende geringe Reste). Die grosse Fläche 5 ist in ihrer ganzen Ausdehnung glänzend und durch Auftreten oscillatorischer Combinationen mit steilen Brachydomen etwas wellenförmig; sie ist fast überall positiv elektrisch.

II. Zwillinge.

Der Aragonit hat eine ausserordentliche Neigung Zwillinge zu bilden und zwar nach dem im rhombischen Systeme sehr häufig vorkommenden Gesetze, dass die Zwillingsebene, d. h. die Ebene, in welcher sich die beiden Krystalle aneinander legen, eine Fläche des Prismas ∞P ist. Die beiden den Zwilling bildenden Individuen haben also ihre Hauptaxen parallel, dagegen die Diagonalen der Basis gegen einander geneigt; sie sind entweder nur aneinander oder durcheinander gewachsen.

A. Zwillinge aus zwei nur aneinander gewachsenen Individuen.

a. Einfache Zwillinge.

α) Krystallformen.

Es seien ABCD und DCFE (Fig. XV) die Durchschnitte zweier Prismen ∞P; zur Bildung eines Zwillinges legen sich dieselben mit den Flächen, deren Durchschnitt mit der Ebene des Papiers die Seite CD darstellt, aneinander. Der Winkel ADE beträgt 128^0 (oder genauer $127^0\ 40'$).

An den beiden Individuen tritt nun aber nicht blos die Gestalt ∞P auf, sondern es erscheinen auch entweder nur auf einer oder auf beiden Seiten die Flächen $\infty \breve{P} \infty$.

Treten diese Flächen $\infty \breve{P} \infty$ nur auf der Seite des einspringenden Winkels BCF (sie möge die Rückseite heissen) in GH und IK auf, so dehnen sie sich so weit aus, dass sie in der Kante L zusammenstossen und daselbst einen Winkel von 116^0 einschliessen. Die bei G und K entstehenden Winkel betragen 122^0. Ein solcher Zwilling, dessen Umfang durch ADEKLG bezeichnet wird, stellt gewissermassen einen in der Richtung DL hemimorphisch gebildeten Krystall dar.

Treten die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ auch auf der vorderen Seite (Fig. XVI) in MN und NP auf, so entsteht daselbst ein einspringender Winkel MNP $= 116^0$. Je nach der Grösse der Flächen MN und NP dringt dieser Winkel mehr oder weniger tief ein.

Vergrössert sich der eine Krystall, z. B. der rechte, etwas, so erscheint auf der Vorderseite die Fläche $\infty \breve{P} \infty$ nur an ihm in P′ Q′,

während sie am kleineren Krystalle fehlt (Fig. XVII). Es schneiden sich dann die Linien AQ′ und P′Q′ unter einem spitzen Winkel von 6°, so dass der überstumpfe Winkel bei Q′ 186° beträgt. — Vergrössert sich der linke Krystall und tritt an ihm die Fläche $\infty \breve{P} \infty$ auf, so entsteht der Fig. XVIII gezeichnete Querschnitt.

Sehr gewöhnlich legen sich zahlreiche Individuen (wie in Fig. XIX) in Zwillingsstellung aneinander, so dass sämmtliche Zusammensetzungsflächen einander parallel sind, und die geradstelligen Individuen einerseits und die ungeradstelligen andererseits sich in paralleler Stellung befinden. Dabei wird die Breite der einzelnen Individuen oft so gering, dass eine grössere Anzahl derselben nur eine dünne Lamelle bildet, welche zwischen zwei grösseren Individuen eingelagert ist, und auf den Flächen $\breve{P} \infty$ und $\infty \breve{P} \infty$ des Gesammtkrystalles nur als ein mehr oder weniger breiter Streifen erscheint.

Fast in allen scheinbar einfachen Aragonitkrystallen finden sich solche Lamellen (UV, WX Fig. XX), und zwar oft in mehrfacher Wiederholung; auch gehen sie bisweilen (Fig. XX) mit beiden Flächenpaaren ∞P parallel.

β) Thermoelektrisches Verhalten.

In Betreff der elektrischen Vertheilung auf den Zwillingskrystallen lässt sich im Allgemeinen das Gesetz aufstellen, dass die Polarität, wie wir sie bei einfachen Krystallen beobachtet haben, auch bei den zusammengesetzten, soweit möglich, erhalten bleibt. Die Flächen ∞P sind früher positiv gefunden worden, und zwar mit wachsender Intensität nach den brachydiagonalen Kanten hin, die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ dagegen negativ. Wo also auf dem Umfange der Zwillinge die Flächen ∞P auftreten,*) wird die elektrische Spannung positiv sein, und ebenso wie früher nach den brachydiagonalen Seitenkanten hin zu- und nach den makrodiagonalen hin abnehmen; wo dagegen die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ erscheinen, wird negative Polarität auftreten müssen.

*) Ich mache darauf aufmerksam, dass ein Winkel von 116° bei diesen Zwillingen nicht immer auf eine brachydiagonale Seitenkante hinweist; bei L (Fig. XV bis XVIII) entsteht ein Winkel von eben dieser Grösse durch das Zusammenstossen der Flächen GL und LK.

Hat der Zwilling den Fig. XV im Querschnitte dargestellten Umfang ADEKLG, so zeigen die Flächen KL und LG, als der Gestalt $\infty\breve{P}\infty$ angehörig, negative Elektricität; auf den übrigen vier Flächen tritt dagegen die positive auf, und zwar mit wachsender Stärke gegen die Kanten A und E hin. In D (Fig. XV) stossen zwei makrodiagonale Seitenkanten aneinander; es muss daher die positive Spannung nach D hin abnehmen, und die specielle Prüfung ergibt die Kante D entweder unelektrisch oder an dem unteren Ende des Krystalles selbst bereits schwach negativ.*) Ein solcher Zwillingskrystall, der, wie oben schon bemerkt, in der Richtung der Zusammensetzungsfläche eine hemimorphe Bildung darstellt, zeigt auch in elektrischer Hinsicht nach eben dieser Richtung, falls die Kante D unelektrisch ist, den polaren Gegesatz einer solchen.

Treten nun an der Kante D beide Flächen $\infty\bar{P}\infty$ oder nur eine derselben auf (Fig. XVI bis XVIII), so erscheint auf diesen Flächen (MN und NP in Fig. XVI, Q' P' in Fig. XVII und P' Q'' in Fig. XVIII) negative Spannung, welche auch wohl auf die unmittelbar anliegenden Theile der Flächen ∞P etwas übergreift.

Bei mehreren Zwillingen sind die Flächen $\breve{P}\infty$ positiv, während sie bei anderen fast unelektrisch erscheinen.

Die Netze dieser Zwillingskrystalle sind so gezeichnet, dass sie in der Fig. XV bis XVIII mit L bezeichneten Seitenkante aufgeschnitten erscheinen. Behufs leichterer Orientirung sind die Kanten mit denselben Buchstaben wie in den bezüglichen Querschnitten versehen.

Krystall Nr. 13 (Fig. XXI).

Fig. XXI stellt das Netz des Krystalles Nr. 13 in natürlicher Grösse dar. Sein Querschnitt gleicht dem Fig. XV abgebildeten. Die Zwillingskante D wurde bei specieller Untersuchung in ihrer oberen Hälfte unelektrisch, in ihrer unteren sehr schwach negativ gefunden.

Krystall Nr. 14 (Fig. XXII).

Der Fig. XXII in natürlicher Grösse dargestellte Krystall besitzt

*) Bei den durchwachsenen Zwillingen, so wie bei den Drillingen und noch mehr zusammengesetzten Krystallen erscheint diese Zwillingskante sogar meistens negativ.

gleichfalls den Querschnitt Fig. XV. Die beiden Flächen GL und LK zeigen oscillatorische Combinationen der Flächen $\infty\breve{P}\infty$ mit steileren Brachydomen, infolge dessen die Dicke des Krystalles nach dem unteren Ende hin zunimmt. Die Zwillingskante bei D ergab sich bei specieller Prüfung ohne elektrische Spannung, nur am unteren Ende erschien sie schwach negativ.

Krystall Nr. 15 (Fig. XXIII).

Auch dieser Fig. XXIII in natürlicher Grösse abgebildete Krystall besitzt den Querschnitt Fig. XV, nur zeigt sich schon auf der rechten Seite von D eine äusserst schmale Fläche P′ Q″ (Fig. XVIII); indess erscheint die Zwillingskante D noch unelektrisch. Der Krystall ist am oberen Ende sehr vollkommen ausgebildet und rein; nach dem unteren Ende hin wird die Masse etwas unreiner.

Krystall Nr. 16 (Fig. XXIV).

Den Querschnitt des Krystalles Nr. 16 stellt Fig. XVIII dar. Da an diesem Zwillinge in P′ Q′ eine Fläche $\infty\ddot{P}\infty$ des linken Individuums an der Oberfläche erscheint, so muss auf ihr negative Elektricität auftreten.

Krystall Nr. 17 (Fig. XV).

Der Krystall Nr. 17 ist sehr rein und durchsichtig, und zeigt im Wesentlichen den Querschnitt Fig. XVII; es liegt also die Fläche P′ Q′ links von P′. Infolge eingeschobener Lamellen, welche gerade durch die Zusammenfügungsfläche gehen, tritt aber auch rechts von P′ eine sehr schmale Fläche P′ Q″ (Fig. XVIII) auf. Diese Bildung hat zur Folge, dass auf beiden Seiten von P′ (Fig. XXV) negative Elektricität erscheint, sich aber stärker nach links als nach rechts ausbreitet. Auf den Flächen GL und LK nehmen die elektrischen Spannungen in der Nähe der Kante L ab.

Krystall Nr. 18 (Fig. XXVI).

Der dem Freiberger Museum gehörige, Fig. XXVI in halber Grösse dargestellte Krystall hat den Querschnitt Fig. XVII. Die Fläche P′ Q′ ist breiter als bei den vorhergehenden Zwillingen. So-

wohl das rechte als das linke Individuum zeigt eingeschobene Lamellen, die sich auch auf den verticalen Seitenflächen von oben bis unten hin verfolgen lassen. Auch bei ihm nimmt die negative elektrische Spannung auf den Flächen GL und LK nach L hin ab.

Krystall Nr. 19 (Fig. XXVII).

Der Fig. XXVII in seinem Netze in halber Grösse gezeichnete Krystall gehört ebenfalls der Freiberger Sammlung. In der oberen Hälfte gleicht sein Querschnitt der Fig. XVI, in der unteren aber der Fig. XVII; doch zeigen die Flächen in dem einspringenden Winkel N (Fig. XVI) eine mangelhafte Ausbildung. Auf den Flächen GL und LK nimmt die negative Spannung nach L hin ab. Die Flächen $\breve{P}\infty$ sind positiv.

Krystall Nr. 20 (Fig. XXVIII u. XXIX).

Der Krystall Nr. 20 (Fig. XXVIII a und b) ist gleichfalls der Freiberger Sammlung entliehen. Sein Querschnitt gleicht Fig. XVI, nur ist der einspringende Winkel N sehr tief, wie ihn Fig. XXVIII b. darstellt. Es sind also die beiden Individuen, von denen das linke breiter ist als das rechte, nur dünne Platten; die eine Fläche ∞P am rechten Individuum PE fehlt fast ganz, und die entsprechende Fläche ∞P am linken Individuum AM ist sehr schmal; beide Individuen gleichen also den Krystallen Nr. 11 und 12 und zeigen daher auch wie Nr. 12 auf den neben M und P gelegenen Flächen $\infty\breve{P}\infty$ nicht negative, sondern positive Polarität. Die auf den Flächen MN und NP beobachteten, im Verhältniss zu den auf den anderen Flächen gemessenen Werthen sehr beträchtlichen positiven Spannungen verdanken wohl ihre Stärke dem Umstande, dass beide in dem einspringenden Winkel liegenden positiven Flächen $\infty\breve{P}\infty$ vereint auf den genäherten, mit dem Goldblättchen des Elektrometers in Verbindung stehenden Draht vertheilend einwirken. Die Flächen $\breve{P}\infty$ sind positiv.

b. Doppelzwillinge.

α) Krystallformen.

Nicht ganz selten kommt der Fall vor, dass sich zwei einfache Zwillinge, wie sie zuvor beschrieben wurden, mit den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ zu einem Doppelzwillinge zusammen legen (Fig. XXIX und XXX). Dabei dehnen sich gewöhnlich auf der einen Seite die Flächen KE und K′E′ so weit aus, dass sie eine einzige Ebene bilden, und dadurch den zwischen ihnen liegenden einspringenden Winkel EPK′ verschwinden lassen; auf der anderen Seite bleibt der einspringende Winkel AMG′. Hat der Querschnitt des vordern Zwillingskrystalles die Gestalt Fig. XV, so zeigt der Doppelzwilling auf seinen Seitenflächen nur einen einspringenden Winkel AMG′, welcher nicht der Bildung des einfachen Zwillings, sondern der Bildung des Doppelzwillings seine Entstehung verdankt. Besitzt der vordere Zwilling die Gestalt Fig. XVII, so erscheint auf der Fläche A′P′ noch eine Einknickung A′Q′P′ (Fig. XXX). Bei Bruchstücken, denen das obere ausgebildete Ende, auf welchem sonst die Bildung eines Doppelzwillings sogleich sichtbar ist, fehlt, lässt sich die Zusammensetzung noch sehr leicht aus der Form des Querschnittes und der Grösse der Kantenwinkel erkennen.

Wenn der Winkel AMG′ auf der zweiten Seite ebenfalls überwächst und zugleich am oberen Ende die Rinne zwischen beiden Zwillingen sich ausfüllt, so geht der Doppelzwilling in einen gewöhnlichen Zwilling über. Man kann daher auch den Doppelzwilling als einen an gewissen Stellen in der vollkommenen Ausbildung zurückgebliebenen gewöhnlichen Zwilling betrachten.

β) Thermoelektrisches Verhalten.

Wie oben schon bemerkt, verwachsen bei den Doppelzwillingen auf der einen Seite die Flächen KE und K′E′ (Fig. XXX) mehr oder weniger in eine einzige Fläche; auf der anderen gegenüberliegenden Seite bleibt dagegen der einspringende Winkel AMG′ fortbestehen. In diesem einspringenden Winkel treten nun Theile der Fläche $\infty \breve{P} \infty$ an die Oberfläche, während dieselben auf der ersten Seite durch die Erweiterung der Flächen ∞P (KE und K′E′) überdeckt

sind. Es muss also in dem einspringenden Winkel AMG′ und in seiner Nähe negative Polarität sich zeigen. Auf der ersten Seite wird aber bei vollkommener Ueberwachsung (Fig. XXX) die Intensität der positiven Spannung von der Seitenkante E′ aus nach beiden Seiten hin regelmässig abnehmen (Krystall Nr. 22); ist jedoch die Spalte noch nicht vollständig geschlossen, so wird auf der Fläche E′K die positive Spannung von E′ bis gegen die Spalte hin erst ab-, und dann jenseits der Spalte wieder zunehmen.

Krystall Nr. 21 (Fig. XXXI).

Der Fig. XXXI in seinem Netze dargestellte Krystall gehört der Freiberger Sammlung; die Form seines Querschnittes gibt Fig. XXX, jedoch ist der einspringende Winkel K′PE (Fig. XXIX) nicht vollständig überwachsen. Links neben P′ tritt ein Stück P′Q′ der Fläche $\infty\breve{P}\infty$ auf. Es müssen also auf diesem Krystalle negative Zonen liegen auf den Flächen LK und GL, auf P′Q′ und auf G′M. Die Flächen $\breve{P}\infty$ sind positiv.

Krystall Nr. 22 (Fig. XXXII).

Der Krystall Nr. 22 (Fig. XXXII) ist an beiden Enden verbrochen; am oberen zeigt er nur noch geringe Reste einzelner Flächen $\breve{P}\infty$, nach unten hin wird seine Masse unrein und undurchsichtig. Der einspringende Winkel K′PE (Fig. XXIX) ist vollkommen überwachsen; links neben P′ findet sich gleichfalls ein Stück P′Q, der Fläche $\infty\breve{P}\infty$, so dass Fig. XXX seinen Querschnitt am oberen Ende vollkommen darstellt. Nach unten zu verwächst auch der Winkel AMG′ etwas mehr.

B. Durchwachsungs-Zwillinge.

a. Krystallform.

Die Durchwachsungszwillinge (ebenso die Drillinge und noch mehrfach zusammengesetzten Krystalle) zeigen meistens eine andere Constitution als die zuvor beschriebenen Horschenzer Krystalle: während letztere als eine einzige dichte Masse erscheinen, stellen sich

die Zwillinge mit Durchwachsungen gewöhnlich als ein Aggregat zahlreicher dünnerer oder dickerer, mehr oder weniger dicht mit einander verwachsener, der Hauptaxe paralleler Stängel oder Fasern dar. Diese einzelnen Krystallfasern bestehen ebenso wie die einfachen Krystalle von Horschenz aus verticalen Säulen mit den Flächen ∞P und $\infty \breve{P} \infty$, deren Enden durch Brachydomen zugeschärft sind. Da sie meistens gleiche Länge besitzen, so bilden sie mit ihren Köpfen zwei gegen die Axe senkrechte Flächen 0 P, die entweder bei vollkommener Verwachsung eben und ziemlich glänzend sind, oder durch ihre Vertiefungen noch deutlich die Köpfe der einzelnen Fasern unterscheiden lassen. In den selteneren Fällen, wo die Anzahl der den zusammengesetzten Krystall bildenden Individuen eine nur geringe ist, treten die Enden derselben als eben so viele Schneiden auf.

Das innere Gefüge der Aragonite nach gewissen Richtungen ist in ausgezeichneter Weise von Leydolt mittelst der durch Anätzen der natürlichen und der künstlich angeschliffenen Flächen in verdünnter Essig- oder Salzsäure erzeugten Figuren studirt und durch Zeichnungen erläutert worden; *) diese Untersuchungen zeigen, dass der innere Bau der Aragonitkrystalle oft ein sehr complicirter ist, und dass die äussere Begrenzung durchaus nicht hinreicht, um die innere Zusammensetzung bis auf die kleinsten eingelagerten Massen zu erkennen. Die Zusammensetzung ändert sich auch häufig innerhalb desselben Krystalles von einem Querschnitte zum anderen.

Für die vorliegende Untersuchung der thermoelektrischen Eigenschaften der Aragonite wird eine Kenntniss der wesentlichen Stücke, aus welchen die Krystalle bestehen, und namentlich der an der Oberfläche liegenden, genügen; ich werde mich daher auf die Angabe der aus den äusseren Begrenzungen erkennbaren Theile beschränken können, wozu in den allermeisten Fällen der Umstand, dass ein Zerschneiden und Anätzen der geliehenen ausgezeichneten Krystalle nicht möglich war, auch noch gebieterisch zwingt.

Die Angabe und Stellung der einzelnen Individuen, aus denen nach der Beschaffenheit der äusseren Flächen ein Aragonitkrystall besteht, lässt sich in einfacher und übersichtlicher Weise durch die

*) Sitzungsberichte der math. naturw. Classe der Wiener Akad. 1856 Bd. 19 S. 10.

schon von Hauy gewählte Zusammenstellung der rhombischen Querschnitte der einzelnen Individuen zu einem geschlossenen Ringe geben. Ich werde dieselbe daher überall anwenden, bemerke aber ausdrücklich, dass dieselbe keine Andeutung über die Bildung der Krystalle und die Ausfüllung der inneren leer gelassenen Räume liefern soll. Hauy's Versuche, die innere Structur zu erklären, entsprechen durchaus nicht dem wahren Vorgange, der schon naturgemässer durch die nachstehende Auffassung Leydolt's dargestellt wird.

Zwei seitlich von den Flächen ∞P und $\infty \breve{P}\infty$ begrenzte Krystalle A und B (Fig. XXXIII) legen sich mit zwei Flächen ∞P nach der Linie $z\beta$ zu einem Zwillinge zusammen; beide wachsen über die Zusammensetzungsfläche hinaus und bilden die Theile A' und B', die sich ebenso wie A und B in der richtigen Zwillingsstellung befinden. Die zwischen A und B einerseits, und zwischen A' und B' anderseits liegenden Räume werden durch ein gleichmässiges Fortwachsen der Krystalle wie bei den Horschenzer Zwillingen ausgefüllt, so dass bei y und y' Winkel von 128° entstehen; die Zusammensetzungsflächen zy und zy' sind eben. Ausserdem erweitern sich die Krystalle aber auch in den zwischen A und B', so wie A' und B gelegenen Raum hinein, erzeugen hier aber keine ebene Zusammensetzungsfläche; es erfolgt vielmehr, weil sich hier die Krystalltheilchen nicht in der eigentlichen Zwillingsstellung befinden, ein fortwährendes Ineinandergreifen der Theile des einen Individuums in die des anderen, so dass in dem Raume zwischen A und B', so wie zwischen A' und B eine Art kammförmiger Naht zx, zx' entsteht. Diese Naht ist auf der äusseren Fläche stets erkennbar, erscheint sogar öfter als eine von kleinen daselbst auftretenden Flächen $\infty \breve{P}\infty$ gebildete Rinne. Auf den Seitenflächen geht sie nicht immer geradlinig parallel mit den Kanten, sondern verläuft je nach der grösseren Ausdehnung des einen oder anderen Krystalles mehr oder weniger unregelmässig.

Fig. XXXIV stellt die nach der Aetzung für einen solchen durchwachsenen Molinaer Zwilling von Leydolt gegebene Zusammensetzung dar; die Theile der einzelnen Individuen sind durch die eingeschriebenen Buchstaben A und B kenntlich gemacht. Während die Berührungsflächen zwischen A und B, und ebenso zwischen A' und B' eben sind, greifen die Stücke A und B', so wie B und A' mit kammförmigen Nähten in einander.

Indess ist wahrscheinlich die Zusammensetzung wenn nicht aller, so doch einer grösseren Anzahl dieser Zwillinge noch complicirter, als die Leydolt'sche Darstellung annimmt. Wenn man nämlich Drillinge oder Vierlinge in einer mit der Hauptaxe parallelen Ebene durchschneidet, so findet man, wie schon Senarmont*) beobachtet hat, auf den Schnittflächen eigenthümliche Zeichnungen, wie ich solche auf Taf. III Fig. LXXV nach einem dem Freiberger Museum gehörigen Krystalle abgebildet habe; es gehen von der Mitte des Krystalles Fasern nach der oberen und der unteren Endfläche, aber auch nach den Seitenflächen. Ein durchschnittener Zwilling stand mir nicht zu Gebote; indess macht es mir der Krystall Nr. XXXVIII, der gerade in der Mitte von zwei fast senkrecht gegen die Hauptaxe stehenden kleinen Krystallen durchwachsen ist, sehr wahrscheinlich, dass eine ähnliche Structur, wie sie in Fig. LXXV für einen Drilling gezeichnet wurde, auch bei den Zwillingen vorkommt.

Nach der Weise, wie im Folgenden die Zusammensetzung der vielfachen Krystalle dargestellt werden soll, gibt Fig. XXXV den Querschnitt eines durchwachsenen Zwillings. Nähte finden sich bei L und K.

Bei Durchwachsungszwillingen und ebenso bei den Drillingen Vierlingen u. s. w. kommt oft ein Stück eines Krystalles zu dem Stücke eines andern, der mit ihm in Zwillingsstellung steht, in eine solche Lage (wie z. B. in Fig. XXXV A' zu B), dass die Flächen ∞ P (EK und KF), welche der Zwillingsfläche parallel sind, in eine Ebene fallen. Man erhält diese Lage, wenn man das Stück A parallel mit sich nach A' verschiebt. Um diese gegenseitige Stellung (A' zu B oder B' zu A) von zwei Krystallstücken, die sich zu einander in Zwillingsstellung befinden, kurz bezeichnen zu-können, werde ich sie die parallel verschobene Zwillingsstellung nennen, während die Stellung A zu B oder A' zu B' die eigentliche Zwillingsstellung heissen mag. Wo zwei in parallel verschobener Zwillingsstellung stehende Krystallstücke aneinander stossen, ist auf der Oberfläche stets eine Naht sichtbar, die sich kammförmig ins Innere fortsetzt. Dagegen erscheinen die Flächen wie HG und GF, oder CD und DE, welche zwei Stücken angehören, die sich in der eigentlichen Zwillings-

*) Annal. de chim. et de phys. 3 Sér. 1854. Bd. 41 S. 63.

stellung befinden und einen Winkel von 128° einschliessen, ohne Naht, glatt und glänzend.

Ich erwähnte schon oben, dass die Ausbildung in den verschiedenen Querschnitten der zusammengesetzten Krystalle sich etwas ändert. So sind bei den Durchwachsungszwillingen (Fig. XXXV) sehr oft die Flächen HG, GF, CD und DE nur in der Mitte vollkommen glatt und eben ausgebildet, während an dem unteren und oberen Ende der Kanten G und D noch die einzelnen den Krystall bildenden Fasern sichtbar bleiben.

Die Netze der vier im Nachfolgenden beschriebenen Krystalle sind in einer der Zwillingskanten G aufgeschnitten gezeichnet.

b. Thermoelektrisches Verhalten.

Die elektrischen Vorgänge auf den durchwachsenen Zwillingen lassen sich aus der eben beschriebenen Zusammensetzung mit Rücksicht auf die bei den einfachen Krystallen gemachten Beobachtungen leicht herleiten. In den vier Seitenkanten C, E, F und H (Fig. XXXV) liegen die Endpunkte der Brachydiagonale, an welchen auf den einfachen Krystallen die positive Polarität auftritt; dieselbe wird also auch bei den vorliegenden Zwillingen auf diesen Kanten und den benachbarten Flächenstücken erscheinen.

Bei den Horschenzer Zwillingen mit dem Querschnitte Fig. XV zeigte die Kante D entweder keine oder eine sehr schwache negative Spannung. Bei dem Durchwachsungs-Zwillingskrystall Nr. 23 (Fig. XXXVI) erscheinen die entsprechenden Kanten D und G ebenfalls nicht elektrisch; dagegen tritt bei den drei folgenden Krystallen Nr. 24, 25 und 26 auf diesen Kanten die negative Polarität auf, und zwar um so stärker und um so mehr über die anliegenden Flächenstücke sich ausdehnend, je länger (oder höher) die Krystalle im Verhältnisse zu ihrer Dicke sind.

Bei den nachstehend beschriebenen vier Krystallen verhält sich die Höhe zur Dicke (letztere gemessen als Abstand der beiden einander gegenüberliegenden Kanten D und G) der Reihe nach wie 1 : 1,19; 1 : 0,629; 1 : 0,345; 1 : 0,144; und in derselben Reihenfolge nehmen, wie die Zeichnungen XXXVI bis XXXIX nachweisen, die negativen Zonen an Ausdehnung auf den Seitenflächen zu.

In gleicher Weise verhalten sich auch die bei L und K (Fig. XXXV) befindlichen Nähte: während sie bei Krystall Nr. 23 (Fig. XXXVI) unelektrisch oder selbst noch schwach positiv sind, tritt auf ihnen bei den drei folgenden Krystallen Nr. 24, 25 und 26 immer stärkere und ausgedehntere negative Polarität auf.

Die Endflächen 0 P sind stets mehr oder weniger stark negativ.

Einer der Gründe für die mit der Höhe der Krystalle zunehmende Ausbreitung der negativen Polarität auf den Seitenflächen liegt in dem Umstande, dass wenn die Seitenflächen in ihrer gesammten Erstreckung positiv wären; die negative Elektricität auf den beiden Endflächen allein den positiven Spannungen auf den langgestreckten Seitenflächen das Gleichgewicht nicht würde halten können; es müssen daher die negativen Zonen an den Kanten D und G und an den Nähten L und K um so mehr hervortreten, je länger die Krystalle im Verhältnisse zu ihrer Dicke werden.

Als Beweis für die Richtigkeit der vorstehenden Annahme kann auch der Umstand dienen, dass, während bei kurzen (oder mässig hohen) Krystallen die positiven Zonen auf den Seitenflächen sich bis zum oberen und unteren Rande erstrecken, bei dem sehr hohen Zwillingskrystalle Nr. 26 und ebenso bei dem weiterhin beschriebenen sehr hohen Drillingskrystalle Nr. 38, sich die negative Elektricität der beiden Endflächen 0 P auch noch über die benachbarten Stücke der Seitenflächen ausbreitet.

Indess bedingt die im Verhältnisse zur Dicke grössere Höhe nicht allein das Auftreten der negativen Polarität auf den Zwillingskanten und Nähten; es werden in dem folgenden Abschnitte unter den vielfachen Krystallen einige vorkommen, bei denen trotz ihrer geringen Höhe doch auf den Zwillingskanten negative Elektricität erscheint; es wird also die innere Structur für die negative Beschaffenheit der Zwillingskanten und der Nähte auf den Seitenflächen ebenfalls von Bedeutung sein.

Krystall Nr. 23 (Fig. XXXVI).

Der kleine, jedenfalls von Molina stammende Krystall ist farblos und ziemlich durchsichtig. Seine Höhe beträgt 6,1 Mm., seine Dicke (gemessen in der Richtung von D zu G) 7,2 Mm. Die Kanten D

und G und die Naht K auf der Fläche 2 zeigen sich unelektrisch, während an der anderen Naht L auf der Fläche 5 noch eine sehr schwache positive Spannung wahrnehmbar ist.

Krystall Nr. 24 (Fig. XXXVII).

Der mit röthlichem Eisenthon imprägnirte Krystall stammt ebenfalls von Molina. Seine Höhe misst 19,4 Mm., seine Dicke 12,2 Mm. Die Zwillingskanten D und G sind bis auf geringe Strecken am oberen und unteren Ende gut ausgebildet (d. h. von glatten ebenen Flächen umgeben). Sowohl die beiden Zwillingskanten D und G, als auch die beiden Nähte auf den Flächen 2 und 5 sind negativ, die letzteren aber, namentlich die auf der Fläche 2 fast am Rande liegende Naht, nur sehr schwach.

Krystall Nr. 25 (Fig. XXXVIII).

Der ebenfalls aus Aragonien stammende Krystall Nr. 25 gehört dem Werner-Museum in Freiberg; die hie und da in die klare Masse eingeschlossenen Thontheilchen sind von graulicher Farbe. In seiner Mitte ist auf der Fläche 2 ein etwas grösserer und ein etwas kleinerer Aragonitkrystall fast senkrecht gegen die Hauptaxe durch ihn hindurchgewachsen. Auch aus der Mitte der Fläche 5 ragt ein kleinerer Krystall, der vielleicht eine Verlängerung eines der beiden zuvor genannten Krystalle ist, hervor; oberhalb desselben findet sich eine Grube, aus welcher ein etwas dickerer Krystall herausgebrochen ist.

Die Höhe des Krystalles Nr. 25 beträgt 32,5 Mm., die Dicke 11,2 Mm.

Die Zwillingskanten D und G sind negativ, und die von ihnen ausgehenden negativen Zonen haben auf den Flächen ∞ P eine grössere Ausdehnung gewonnen als bei dem vorhergehenden Krystalle. Die Nähte auf den Flächen 2 und 5 sind schwach negativ.

Krystall Nr. 26 (Fig. XXXIX).

Der gleichfalls dem Werner-Museum in Freiberg gehörige Krystall Nr. 26 ist an den Zwillingskanten D und G etwas unvollkommen ausgebildet; die ihm anhaftenden dünnen Thonschichten sind von

rothbrauner Farbe. Die Höhe des Krystalles misst 67,5 Mm., die Dicke 10,7 Mm.

Die negativen Zonen der Kanten D und G zeigen bei diesem Krystalle eine noch grössere Ausdehnung, als bei dem vorhergehenden. Die Nähte sind mässig stark negativ. Von den Endflächen breitet sich die negative Zone auch über die benachbarten Theile der Seitenflächen aus.

III. Drillinge, Vierlinge und Fünflinge.

Die Drillinge und ebenso die Vier- und Fünflinge entstehen durch eine wiederholte Zwillingsbildung nach dem oben S. 381 angegebenen Gesetze.

a. Krystallformen.

A. *Drillinge.*

A. Drillinge aus nur aneinandergelegten Individuen.

Ein solcher Drilling entsteht, wenn sich an zwei benachbarte Flächen ∞P eines Krystalles zwei andere Krystalle in Zwillingsstellung anlegen.*) Es können nun jene beiden Flächen den spitzen oder den stumpfen Winkel des rhombischen Querschnittes einschliessen.

Liegen die beiden Flächen um den spitzen Winkel, so stellt Fig. XL die Anordnung dar; treten noch auf beiden Seiten die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ hinzu, so entsteht der in der Figur mit ausgezogenen Linien gezeichnete Querschnitt. Schrauf hat einen solchen Drilling von Horschenz abgebildet;**) mir selbst stand keiner zur Verfügung. In seinem thermoelektrischen Verhalten wird sich ein solcher Drilling sehr wahrscheinlich an den unter Nr. 20 beschriebenen Zwilling anschliessen.

*) Der Fall, wo das Anlegen an zwei parallele Flächen statt hat, ist schon oben erwähnt und wird nicht als Drillingsbildung bezeichnet.

**) Sitzungsberichte der Wiener Akademie, math.-naturw. Klasse. Bd. LXII S. 73; Taf. IV. Fig. 24. Schrauf hat den Krystall an beiden Enden ausgebildet dargestellt; wahrscheinlich ist derselbe aber nur an dem einen Ende vollkommen ausgebildet gewesen. Sollten beide Enden ausgebildet sein, so würde die thermoelektrische Untersuchung von grossem Interesse sein, indem mir bis jetzt kein an beiden Enden ausgebildeter Krystall von Horschenz bekannt geworden ist.

Wenn dagegen die beiden Flächen, an welche sich die beiden anderen Krystalle anlegen, den stumpfen Winkel einschliessen, so entsteht der Fig. XLI gezeichnete Querschnitt. Da der stumpfe Winkel des Rhombus nur 116° 10′ beträgt, so können die drei Krystalle den Raum um den oberen Eckpunkt nicht vollständig schliessen; die Summe der daselbst zusammenstossenden Winkel beträgt nur 348° 30′, so dass also zwischen B und C ein leerer Sector von 11° 30′ (in runder Angabe 12°) übrig bleibt.

Es ist mir nicht wahrscheinlich, dass ein solcher Drilling mit offener Spalte zwischen B und C vorkommt; bei den von mir beobachteten Krystallen wird jene Spalte entweder mittelst Durchwachsung von A oder durch Einschiebung eines vierten zu B oder C in Zwillingsstellung befindlichen Individuums geschlossen, wie beim Krystalle Nr. 27.

B. Drillinge mit Durchwachsungen.

Die verschiedenen Drillingsformen, welche bei ringsum geschlossener, ungefähr kreisförmiger Gestalt überhaupt möglich sind, lassen sich leicht herleiten, wenn man von den beiden Formen ausgeht, in welchen alle drei Krystalle A, B und C durchgewachsen sind.

Solcher Formen existiren zwei (Fig. XLII u. XLIII), je nachdem sich an das Individuum A die benachbarten B und C in der eigentlichen oder in der parallel verschobenen Zwillingsstellung angelegt haben. Das eine Individuum A spielt nämlich eine etwas andere Rolle als die beiden anderen B und C und bildet gewissermassen den Grundstock, auf welchem sich der Drilling aufbaut.

Zur leichteren Orientirung in den Zeichnungen werde ich den Buchstaben A, B und C noch kleinere Buchstaben anhängen, welche angeben, mit welchem Individuum das Betreffende in Zwillingsstellung sich befindet. C_A bedeutet also das Individuum C, welches mit A in Zwillingsstellung ist; A_{BC} bedeutet das Individuum A, welches gleichzeitig mit B und C in Zwillingsstellung steht. Ob die betreffenden Stücke der Krystalle sich in der eigentlichen oder in der parallel verschobenen Zwillingsstellung finden, geht sofort aus ihrer Lage in der Zeichnung hervor;*) bilden nämlich die Flächen ∞P

*) Sind bisweilen die beiden Theile von B oder C als B und B′, oder C und

zweier Stücke an der Berührung einen Winkel von 128°, so haben diese Theile die eigentliche Zwillingsstellung; fallen aber jene Flächen in eine Ebene, so stehen sie in der parallel verschobenen Zwillingsstellung, wobei an den Berührungsstellen eine Naht (s. S. 389) sichtbar wird. Nur bei dem Individuum A erscheint es zweckmässig, stets seine beiden Theile durch die Bezeichnung A (der vordere) und A′ (der hintere Theil) zu unterscheiden.

Fig. XLII stellt einen Drilling dar, in welchem sowohl A als auch B und C durchgewachsen sind, und B und C sich an ihren Berührungsflächen mit A in der eigentlichen Zwillingsstellung befinden. Ich selbst habe keinen Drilling von dieser Form beobachtet; jedoch bildet Leydolt einen solchen ab.*)

Fig. XLIII zeigt einen Drilling, bei welchem zwar ebenfalls alle drei Individuen durchgewachsen sind, die Theile B und C aber an ihren Berührungsflächen mit A nicht in der eigentlichen, sondern in der parallel verschobenen Zwillingsstellung befindlich sind. Die Entstehung eines solchen Drillingskrystalles erläutert Leydolt**) durch die folgende Darstellung.

Es seien Fig. XLIV A, B und C die Individuen, welche nach Art von Fig. XLI sich zu einem Drillinge aneinander gelegt haben; dieselben wachsen über die Zusammensetzungsflächen hinaus fort, erzeugen die Stücke A′, B′ und C′ und würden so einen sechsstrahligen Stern erzeugen.***) Werden nun die Räume zwischen den sechs Strahlen ausgefüllt, so treffen in vier Sextanten AC′, AB′ A′C und A′B die Stücke der einzelnen Individuen in der parallel verschobenen Zwillingsstellung zusammen, und bilden also kammförmige Nähte, welche sich durch eine Furche auch auf der Oberfläche zu erkennen geben. In den beiden Sextanten BC′ und B′C kommen aber Stücke miteinander in Berührung, die zu einander nicht in Zwillingsstellung stehen; dieselben bilden nach Leydolt's Untersuchungen eine sehr unregelmässig verlaufende Verbindungsfläche.

C′ unterschieden, so ist dies geschehen, um im Texte die beiden Theile genau und kurz bezeichnen zu können.

*) Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. 19 S. 18 Taf. 4 Fig. 44. Der betreffende Krystall stammt von Leogang oder Herrengrund.

**) Ebend. S. 21.

***) Eine solche Form bildet Leydolt Fig. 45 unter den Leoganger und Herrengrunder Krystallen ab.

Fig. XLV stellt die nach Leydolt aus den Aetzfiguren sich ergebende Zusammensetzung eines solchen Drillings im Durchschnitte dar. Zwischen A und B', A und C', A' und B, A' und C liegen kammförmige Nähte, während zwischen B und C', so wie zwischen B' und C die Verbindungsfläche unregelmässig verläuft.

Wo zwei Individuen, wie B und C, welche zu einem dritten A in Zwillingsstellung sich befinden, aneinander stossen, bildet sich auf der Oberfläche entweder wie in Fig. XLII ein Winkel von 168° oder wie in Fig. XLIII ein solcher von 192°; beide Winkel ergänzen einander zu 360°.

Die Bildung dieses letzten Drillings Fig. XLIII lässt sich aber auch noch anders auffassen. Während der Drilling Fig. XLII in der Weise entsteht, dass die Seitenkrystalle B und C sich an zwei den stumpfen Winkel einschliessende Flächen des mittleren Individuums A anlegen, wird ein Drilling von der Form Fig. XLIII erzeugt, wenn die beiden Seitenkrystalle B und C sich an zwei den spitzen Winkel einschliessende Flächen des mittleren Individuums A anlegen.

Man erkennt aus den beiden Zeichnungen Fig. XLII und XLIII sogleich, dass, wenn der Umfang des Drillings eine ungefähr kreisförmige Gestalt erhalten soll, das Individuum A stets durchwachsen muss. Sollte in Fig. XLII das hintere Stück A' ausfallen, so würden die benachbarten Stücke B und C sich sehr weit ausdehnen müssen, um endlich in einer Kante von 12° zum Durchschnitt zu gelangen; bei der Stellung in Fig. XLIII würde aber, wenn man das hintere Stück A' fortnimmt, durch die Vergrösserung der benachbarten Stücke B und C der Raum gar nicht mehr geschlossen werden.

Die überhaupt verschiedenen möglichen Formen der Drillinge sind bereits von Senarmont*) aufgestellt worden. Ausser den beiden Fig. XLII und XLIII gezeichneten, bei denen alle drei Individuen durchgewachsen sind, sind zwei Formen möglich mit Durchwachsung nur zweier Individuen (unter denen aber jedenfalls A), nämlich Fig. XLVI**) und XLVII, und eine Form mit alleiniger Durchwachsung von A (Fig. XLVIII).

*) Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. 1854. Bd. 41 S. 60 ff.

**) Einen Drilling von der Form Fig. XLVI habe ich unter den vielen von mir untersuchten Krystallen nicht gefunden.

In der zuvor citirten Abhandlung »Note sur les groupements crystallins de l'aragonite, de la withérite et de l'alstonite« spricht Senarmont die Ansicht aus, dass alle Krystalle aus Molina (und auch wohl aus Bastennes) sich auf die zuvor beschriebenen fünf Drillingsformen (Fig. XLII, XLIII, XLVI, XLVII und XLVIII) und auf die Zwillingsgestalt Fig. XXXV reduciren lassen; er hebt namentlich hervor, dass unter mehr als 60 untersuchten Krystallen von Molina sich keiner fand, der mit Ausnahme einiger Unregelmässigkeiten nicht in eine dieser Formen gepasst hätte. *)

Im Folgenden wird sich aber zeigen, dass diese Annahme Senarmont's, wonach alle Krystalle von Molina und Bastennes nur Drillinge oder Zwillinge sein sollen, zu eng ist. Allerdings besteht ein Theil der zusammengesetzten Krystalle jener Fundorte nur aus Zwillingen oder Drillingen mit Durchwachsung eines oder zweier oder resp. dreier Individuen; aber der bei weitem grösste Theil derselben stellt Vierlinge und Fünflinge dar. Indessen bildet ein Drilling immer, so zu sagen, die Grundform, und es wird daher die Uebersicht erleichtern, wenn ich später die auf ähnlicher Grundform aufgebauten Drillinge, Vier- und Fünflinge in Betreff ihres elektrischen Verhaltens zusammenfasse.

B. Vier- und Fünflinge.

A. Vier- und Fünflinge aus nur an einander gelegten Individuen ohne Durchwachsung.

Ebenso wie bei den Drillingen können sich zur Bildung eines Vierlings die vier Individuen um den spitzen oder um den stumpfen Eckpunkt des rhombischen Querschnittes lagern.

Fig. XLIX stellt den Fall dar, wo sich die vier Individuen um einen spitzen Eckpunkt gruppiren. Treten die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ hinzu, so entsteht der in seinen Linien ausgezogene Querschnitt.

---

*) J'ai observé plus de soixante cristaux de Molina, et, sauf quelques irrégularités de détail, je n'y ai jamais rencontré un groupement, qui ne rentrât dans l'un des modes précédents. Ces irregularités tiennent à ce que chacun des individus accolés est quelque fois traversé lui-même par des bames hémitropiques très minces.

Schrauf*) bildet einen solchen Zwilling von Horschenz ab; mir selbst stand für die elektrische Prüfung keiner zur Verfügung.

Fig. L zeigt die Lage der vier Individuen A, B, C und D, falls sich dieselben um den stumpfen Eckpunkt gruppiren. B und C stehen in Zwillingsstellung zu A, und D in eben solcher gegen B, wie dies auch in der Figur aus den angehängten kleineren Buchstaben zu entnehmen ist. Da die vier Winkel von 116° 10′ zusammen mehr als 360° betragen, so fallen die Rhomben C und D zum Theil übereinander; in der Natur können also diese beiden Individuen sich nur theilweise entwickeln. Wo die beiden Stücke aneinander stossen, bildet sich durch die Flächen ∞P an jedem derselben die stumpfe Kante von 116° (α, β in Fig. L) aus, und zwischen beiden entsteht ein einspringender Winkel, der innerlich (als überstumpfer) gemessen 232° beträgt (der äussere Winkel misst also 128°). Die Flächen $\gamma\alpha$ und $\delta\beta$ würden unter einem Winkel von 104° zusammenstossen. Die Verbindungsfläche beider Individuen C und D verläuft im Innern ebenso wie zwischen B und C unregelmässig.

Fig. LV stellt den Querschnitt eines solchen Krystalles (Nr. 28) vor, der von mir untersucht und auf sein thermoelektrisches Verhalten geprüft worden ist.

Obgleich die Figur L um die Verbindungsebene (or) von A und B symmetrisch ist, so werde ich doch für die Vierlinge dieselbe Stellung der Zeichnungen beibehalten, welche ich bei den Drillingen angewendet habe, weil, wie bereits früher bemerkt, ein Individuum, das stets mit A bezeichnet werden soll, sich auch bei den Vierlingen vorzugsweise geltend macht.

Analog den Vierlingen bilden sich nun auch die Fünflinge.

Es können sich zuerst die fünf Individuen um den spitzen Rhombenwinkel lagern, und dann entsprechende Querschnitte, wie Fig. XLIX, erzeugen; doch erinnere ich mich nicht, dass ein solcher Fünfling beobachtet worden ist.

Sodann können die fünf Individuen sich aber auch Fig. LI um den stumpfen Winkel des Rhombus gruppiren, indem sich an den

*) Auf der oben angeführten Tafel Fig. 25. Auch bei diesem Krystalle sind beide Enden als ausgebildet gezeichnet, und es findet sich der Zusatz: »Die Fig. 25 stellt den Krystall naturgetreu dar«.

Krystall C noch ein Krystall E, ebenso wie D an B in Zwillingsstellung anlegt. Indess dürfte wohl kein solcher Fünfling, der nur durch Aneinanderlegen ohne Durchwachsung eines Individuums gebildet ist, existiren.

B. Vier- und Fünflinge mit Durchwachsungen.

Es würde nicht schwer sein, alle mittelst Durchwachsung eines oder mehrerer Individuen oder des Auftretens ihrer anderen Hälften überhaupt möglichen Formen der Vier- und Fünflinge aufzustellen; ich beschränke mich jedoch auf die Darstellung der von mir wirklich beobachteten,*) und werde der Kürze und Uebersichtlichkeit wegen den Angaben über ihre Zusammensetzung gleich die elektrischen Beobachtungen anschliessen. Ich habe die Reihenfolge nach Möglichkeit so gewählt, dass ich im Allgemeinen von den einfacheren Bildungen zu den zusammengesetzteren vorschreite.

Um aus der Beschaffenheit der äusseren Begrenzungsflächen der vielfach zusammengesetzten Krystalle mit möglichster Leichtigkeit die Zusammensetzung, so weit sie eben sich in dem äusseren Aussehen ausprägt, erkennen zu können, möge hier im Zusammenhange nochmals an folgende Thatsachen erinnert werden.

Wenn zwei glatte Flächen, welche keine Naht zeigen, eine Kante von 128° bilden, so sind sie die prismatischen Seitenflächen zweier Krystalle, welche in dieser Kante in der eigentlichen Zwillingsstellung zusammenstossen.

Wenn auf einer ebenen Fläche eine Naht sich zeigt, so gehören die beiden in derselben aneinander grenzenden Flächenstücke zwei Krystallen an, welche sich in der parallel verschobenen Zwillingsstellung befinden.

Wenn auf einer ebenen Fläche zwei Nähte sich finden, so weisen dieselben auf ein in dieses Individuum eingeschobenes Stück eines anderen hin, das mit ihm in parallel verschobener Zwillingsstellung steht.

Winkel von 168° und 192° werden von Flächen gebildet, welche

*) Unter den von Leydolt in der oben angeführten Abhandlung gezeichneten Krystallen befinden sich noch einige im Folgenden nicht abgebildete Formen.

zwei Krystallen angehören, die beide zu einem dritten Individuum in Zwillingsstellung stehen.

Ein überstumpfer Winkel von 232° (oder ein einspringender Winkel von 128°) (wie c in Fig. LV), zu dessen beiden Seiten Kanten von 116° liegen, zeigt an, dass diese Kanten die stumpfen Seitenkanten zweier Krystalle (D und C) sind, von denen jeder zu einem anderen Krystalle (D zu B, und C zu A) in Zwillingsstellung steht, während diese beiden anderen Krystalle B und A sich unter einander wieder in Zwillingsstellung befinden.

Infolge der Einschaltungen kann der Fall eintreten, dass die beiden Flächenstücke, welche unmittelbar in einer Zwillingskante von 128° zusammenstossen, gar nicht zwei Individuen angehören, die zu einander in Zwillingsstellung sich befinden (wie D und C), die aber zu zwei anderen (B und A), deren Flächen sich in jener Kante unter dem genannten Winkel schneiden würden, in parallel verschobener Zwillingsstellung stehen. Man erkennt diese Einschaltungen leicht daran, dass die Flächen, welche den Winkel von 128° bilden, nicht glatt sind, sondern eine Naht zeigen; auch ist dann oft die Kante nicht scharf, sondern zeigt eine kleine Rinne (einspringender Winkel 104°, innerer überstumpfer 256°).

Ich will diesen Fall durch ein bestimmtes Beispiel erläutern, und wähle dazu einen von Leydolt auf seine Structur untersuchten Krystall.

Ein einfacher Durchwachsungszwilling, wie solcher im Querschnitte Fig. XXXV, und in seinem inneren Gefüge Fig. XXXIV abgebildet ist, hat 4 Kantenwinkel von 116°, die paarweise auf jeder Seite liegen, und ausserdem (vorn und hinten) zwei Kantenwinkel von 128°. Die vier Flächen, welche die Winkel von 128° einschliessen sind glatt, während die Flächen zwischen den beiden Kanten von 116° eine Naht zeigen.

Es kommen nun aber scheinbare Durchwachsungszwillinge vor, welche genau denselben Querschnitt haben, und sich nur dadurch von dem vorhergehenden unterscheiden, dass auch die Flächen, welche die Winkel von 128° einschliessen eine Naht zeigen. In der von Leydolt gezeichneten Figur liegen diese Nähte bei α, β, γ und δ. Dieselben weisen darauf hin, dass neben A (und A') ein Stück eines Individuums eingeschoben ist, welches mit ihm in parallel verscho-

bener Zwillingsstellung steht, und dass ebenso neben B (und B') ein Stück eines andern Individuums D eingeschaltet, welches sich mit B in parallelverschobener Zwillingsstellung befindet. A und B', sowie A' und B, ebenso B und D, B' und D', A und C, A' und C' berühren sich in kammförmigen (durch die Striche angedeuteten) Nähten; soweit A und B, und andererseits A' und B' zusammenstossen, ist die Zusammensetzungsfläche (von b bis b') eben; wo aber D und C zusammenstossen (längs bg und b'g') verlaufen die Berührungsflächen unregelmässig. Die betreffenden Krystalle sind also keine Zwillinge, sondern Vierlinge.

Der Bau der meisten zusammengesetzten Aragonitkrystalle ist wahrscheinlich viel complicirter, als die im Folgenden gezeichneten Umrisse erkennen lassen. Schon Senarmont*) hat, wie bereits oben S. 390 erwähnt, bei Krystallen von Molina, besonders aber von Bastennes eine eigenthümliche faserige Structur auf angeschliffenen Flächen wahrgenommen. Er sagt:

Des fibres parallèles et de longueur inégale, séparées par de petits canaux vides et irréguliers, sont groupées par faisceaux, les uns normalement aux deux bases hexagonales, les autres normalement aux six faces verticales des prismes, de façon que, quand on brise un pareil crystal, ces faisceaux se séparent, imitant grossièrement huit pyramides opposées par le sommet vers le centre du crystal.

Or les caractères optiques prouvent que toutes les fibres, soit verticales, soit horizontales, ont leurs axes crystallographiques principaux parallèles. Les prismes rhomboïdaux, qui composent ces groupes sont, comme toujours, mâclés par hemiotropie, mais tous, et sans exception, verticaux. La direction divergente des divers groupes de fibres n'est donc pas produite par une inversion, et cette structure tient à quelque autre cause qui ne paraît pas facile à découvrir.

In Fig. LXXV habe ich die angeschliffenen Flächen abgebildet, welche auf einem aus Aragonien stammenden Krystalle durch einen mit der Hauptaxe parallelen Schnitt entstanden waren. Der dem Freiberger Museum gehörige Krystall ist ein Drilling von dem Fig. XLVIII und LVII gezeichneten Querschnitte; seine Structur erscheint sehr faserig und aus seinen Seitenflächen ragen die Köpfe zahlreicher kleiner

*) Annal. de chim. et de phys. 3. Sér. 1854 Bd. 41. S. 63.

Krystalle hervor. Der Schnitt, durch welchen der Krystall in zwei Hälften getheilt wurde, ging durch die stumpfen Winkel von A und A'. Während die nach oben und unten laufenden Fasern grauweisslich aussehen, zeigen die seitwärts gehenden eine mehr ins Röthliche ziehende Färbung.

Die eben beschriebene Structur findet sich aber nicht blos bei Krystallen, welche ein sehr faseriges Aussehen zeigen und aus deren Seitenflächen kleine Krystalle hervorragen; es zerbrach bei meinen Versuchen ein mit fast überall glatten Seiten- und Endflächen versehener Krystall Nr. 48 von dem Fig. LXI gezeichneten Querschnitte in der Richtung von dem einspringenden Winkel 192° links vorn nach der Naht zwischen A' und C rechts hinten mit ziemlich ebenen Flächen; auf beiden Bruchflächen ist selbst im ungeschliffenen Zustande eine ähnliche Structur, wie sie Fig. LXXV gezeichnet ist, deutlich zu erkennen.

Auf Schnittflächen senkrecht gegen die Hauptaxe erscheint nach Senarmont ein sechsstrahliger Stern, bei welchem, wenn der Schnitt durch die Mitte des Krystalles geführt ist, die Strahlen im Mittelpunkte sich treffen, während in einem weiter nach dem Ende hin gelegenen Querschnitte die Strahlen nicht bis zur Mitte reichen, sondern von den Eckpunkten eines Sechseckes ausgehen, dessen Seiten dem äusseren Umfange des Krystalles parallel sind. Diese letztere Structur habe ich bei sehr vielen Krystallen schon auf den natürlichen Flächen 0P deutlich wahrgenommen; bei manchen Krystallen scheinen auf eben diesen Flächen die Strahlen sich auch bis zur Mitte zu erstrecken.

b. Thermoelektrisches Verhalten der Drillinge, Vier- und Fünflinge.

Das thermoelektrische Verhalten der mehrfach zusammengesetzten Aragonitkrystalle lässt sich um so leichter und kürzer übersichtlich zusammenstellen, als auf ihnen ähnlich elektrische Vorgänge, wie auf den Durchwachsungszwillingen beobachtet werden.

Die Endflächen sind stets negativ, oft in nicht unbeträchtlicher Stärke; ebenfalls negativ, wenn auch nur schwach, erscheinen die freistehenden schneidenförmigen, von Brachydomen begrenzten oberen

und unteren Enden der einzelnen Individuen, wofern die Verwachsung derselben nicht vollständig ist (wie bei Nr. 33, 34 und 39).

Die Seitenflächen der zusammengesetzten Krystalle werden vorzugsweise von den Flächen des Prismas ∞P gebildet, und nur sehr untergeordnet kommen auch die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ auf der äusseren Fläche zum Vorschein.

Bei den einfachen Aragonitkrystallen waren nun die Flächen ∞P und besonders die von ihnen gebildeten brachydiagonalen Seitenkanten (von 116°) positiv, und die Stärke der positiven elektrischen Spannung nahm von diesen Kanten aus nach den Flächen $\infty \bar{P} \infty$ oder nach den makrodiagonalen Kanten hin ab; die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ zeigten die entgegengesetzte negative Polarität. Bei den zusammengesetzten Krystallen werden wir also ebenfalls auf den Flächen ∞P und besonders auf den brachydiagonalen Kanten (von 116°) der einzelnen Individuen positive Elektricität zu erwarten haben, während negative Polarität nur da erscheinen kann, wo Theile der Flächen $\infty \bar{P} \infty$ oder makrodiagonale Seitenkanten in der Oberfläche liegen.

Die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ treten bisweilen, wie bei Nr. 27 und 33 an dem einen oder anderen Individuum in grösserer oder geringerer Breite auf, und zeigen dann in der That negative Spannungen.

Makrodiagonale Kanten (auch wohl versehen mit kleinen Flächen $\infty \bar{P} \infty$), oder wenigstens die Grenzen zwischen den Flächen ∞P und $\infty \bar{P} \infty$ stossen in den Zwillingskanten von 128° und in den Nähten, in welchen sich zwei in parallel verschobener Zwillingsstellung befindliche Individuen berühren, aneinander. Daher kann unter geeigneten Umständen an diesen Kanten (nebst den benachbarten Flächenstücken) und an den Nähten negative Polarität hervortreten. Sehr begünstigt wird dies Hervortreten durch eine im Verhältnisse zur Dicke grössere Höhe (oder Länge) des Krystalles, und, wie es scheint, auch durch eine stark faserige oder stängelige Structur. Doch tritt auf diesen Zwillingskanten auch bei einigen ziemlich dicht scheinenden kurzen Krystallen (Nr. 35, 36 und 37) die negative Elektricität auf, so dass wir die beiden angeführten Umstände nicht als die für das negative Verhalten dieser Kanten allein maassgebenden Ursachen betrachten dürfen.*) Durch eine sehr grosse Länge des

*) Welchen Einfluss die S. 402 beschriebene und in Fig. LXXV im Durchschnitte

Krystalles wird endlich, um zwischen den positiven und negativen Zonen das Gleichgewicht herzustellen, ein Uebergreifen der negativen Elektricität von den natürlichen Endflächen 0 P auf die anliegenden Stücke der Seitenflächen bedingt.

Hiernach zeigen also die Seitenflächen bei kurzen Krystallen, wenn keine Zwillingskanten von 128° vorhanden sind, auf ihrer ganzen Oberfläche positive Polarität; auch die Nähte sind noch schwach positiv oder höchstens unelektrisch. Auf den mit Nähten versehenen Seitenflächen nimmt dann die positive Spannung von den an beiden Seiten der Fläche liegenden brachydiagonalen Kanten (von 116°) nach der Naht hin ab. Finden sich an den kurzen Krystallen Zwillingskanten (von 128°), so sind sie bei sehr dichtem*) Gefüge meistens noch schwach positiv oder auch unelektrisch; die positive Spannung der beiden anliegenden Seitenflächen nimmt dann gegen diese Kante hin ab. Bisweilen erscheinen diese Kanten nebst den anliegenden Theilen der sie bildenden Flächen aber auch negativ. Die Nähte zeigen sich schwach positiv oder unelektrisch oder auch schwach negativ.

Nimmt die Höhe (oder Länge) der Krystalle zu, und erscheint ihr Gefüge mehr faserig oder stängelig, so zeigen die Zwillingskanten (von 128°) stets negative Elektricität, welche sich über immer grössere Stücke der sie bildenden Flächen ausbreitet, je länger der Krystall wird. Die Nähte sind entweder unelektrisch oder mehr oder weniger negativ.

Bei noch grösserer Länge der Krystalle werden auch, wie schon bemerkt, die Seitenflächen am oberen und unteren Rande durch Uebergreifen der Polarität der Endflächen negativ.

In der Tiefe der einspringenden Kanten von 192°, welche durch zwei Flächen ∞P gebildet werden, die zweien zu einem dritten in Zwillingsstellung befindlichen Individuen angehören, findet sich gewöhnlich keine elektrische Spannung (z. B. Krystall Nr. 34, 40); jedoch bei sehr langen Krystallen (wie Nr. 38) erscheint auch in dieser Rinne negative Elektricität.

---

abgebildete Structur auf das Hervortreten der negativen Elektricität auf den Zwillingskanten haben kann, bleibt noch zu ermitteln.

*) Soviel sich äusserlich beurtheilen lässt.

Werden die Zwillingskanten (von 128°) an solchen Krystallen, wo sie bei vollkommener Ausbildung negativ sein würden, durch Einschaltung nur schmaler Stücke (wie z. B. Krystall Nr. 32 und 39) gespalten, so bleiben sie noch negativ; vergrössern sich diese Stücke, so wird die negative Elektricität durch die positive Elektricität der daselbst auftretenden brachydiagonalen Kanten der eingeschobenen Stücke überwunden (z. B. Krystall Nr. 43).

Alle übrigen zuvor nicht erwähnten Theile der Seitenflächen sind positiv.

Krystall Nr. 27 (Fig. LIII und LIV).

Der dem Freiberger Museum gehörige farblose Krystall von Herrengrund ist am unteren Ende, wo er angesessen hat, verbrochen; seine Durchsichtigkeit nimmt gegen das untere Ende hin ab. Er ist nach dem Schema Fig. LIII gebildet; die Lücke zwischen B und C wird durch das keilförmige Stück eines vierten mit B in Zwillingsstellung befindlichen Individuums D ausgefüllt. Durch das Auftreten schmaler Flächen $\infty \breve{P} \infty$ findet sich auf der von A und B gebildeten Kante eine kleine Rinne; die Kante zwischen A und C, wo ebenfalls die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ erscheinen, ist etwas mangelhaft ausgebildet. Oberhalb der Flächen $\infty \breve{P} \infty$ erscheinen kleine Flächen von Brachydomen. Die obere Endfläche $0P$ ist glänzend und zeigt die Zusammensetzung sehr bestimmt; jedes der drei grossen Individuen A, B und C trägt auf dieser Fläche eine deutliche mit der Brachydiagonale parallele Streifung. Fig. LIV stellt das Netz in natürlicher Grösse dar.

Die Kanten, in denen A und B, sowie A und C zusammenstossen, nebst den benachbarten Flächenstücken, und ebenso die Lücke mit ihrer Ausfüllung erscheinen negativ, während die drei stumpfen brachydiagonalen Seitenkanten (von 116°) der drei grossen Individuen positive Polarität besitzen. Auf dem Umfange wechseln also drei positive Zonen mit drei negativen ab. Die obere Endfläche zeigt keine deutlich ausgesprochene Elektricität.

Krystall Nr. 28 (Fig. LV und LVI).

Der in seiner Masse farblose Krystall ist in den oberen Theilen stellenweise mit einem röthlichen Thone imprägnirt. Er ist an beiden Enden ausgebildet und trägt daselbst die ebenen, nur wenig glänzenden

Flächen 0 P. Auf der unteren Fläche, etwas seitwärts, ist ein anderer kleiner Krystall fast senkrecht gegen die Axe des grossen angewachsen. Fig. LV stellt die Form seines Querschnittes und Fig. LVI sein Netz in natürlicher Grösse dar. Die Höhe (Länge) des Krystalles misst 28,8 Mm., der Abstand der stumpfen Seitenkanten des Individuums A von der gegenüberliegenden Zwillingskante BD aber 14,6 Mm. (Verhältniss der Höhe zur Dicke 1 : 0,507.)

Da der Vierlingskrystall drei Seitenkanten von 128° trägt, so wechseln auf seinem Umfange ebenso wie bei dem vorhergehenden drei negative Zonen mit drei positiven ab; es sind nämlich die drei Kanten zwischen A und B, B und D, A und C negativ, dagegen die stumpfen brachydiagonalen Seitenkanten der Krystalle A, B, und C und D positiv. Die beiden Endflächen zeigen negative Polarität.

Krystall Nr. 29 (Fig. LVII).

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 29 (aus Aragonien) hat ein dichtes, nicht faseriges Aussehen; seine Farbe ist durch eingesprengte Thontheilchen etwas röthlichbraun. Die Seiten- und Endflächen sind ziemlich vollkommen ausgebildet; nur aus der einen Seitenfläche ragt unter einem Winkel von ungefähr 70° ein kleiner Krystall und aus der oberen Fläche 0 P die Ecke eines zweiten solchen Krystalles hervor.

Die Gestalt des Querschnittes dieses Krystalles stellt Fig. LVII dar; in der Nähe des unteren Endes zeigt sich an der Zwillingskante zwischen A und B unterhalb der äusseren Hülle noch ein kleines eingeschobenes Stück eines Individuums D, wie solches in Fig. LX abgebildet ist. Die Höhe des Krystalles beträgt 16,6 Mm., seine Dicke*) 18,2 Mm. (Verhältniss der Höhe zur Dicke 1 : 1,09.)

Bei der geringen Höhe des Krystalles im Verhältnisse zur Dicke sind die Seitenflächen in ihrer ganzen Ausdehnung positiv; auch die beiden Zwillingskanten von 128° und die beiden Nähte (zwischen A′ und B, und A′ und C) zeigen noch schwache positive Spannungen.

Die Endflächen 0 P sind stark negativ.

*) Als Dicke dieses und der folgenden Krystalle ist der Abstand der brachydiagonalen Kanten der beiden Stücke A und A′ genommen.

Das elektrische Verhalten der Seitenflächen ist durch eine farbige Linie auf dem Umfange des Querschnittes angedeutet.

Krystall Nr. 30 (Fig. LVII).

Der etwas gelbliche Krystall Nr. 30 aus Aragonien gehört dem Freiberger Museum; er hat ein dichtes Aussehen und die Form seines Querschnittes wird ebenfalls durch Fig. LVII dargestellt. Seine Höhe misst 6,6 Mm., seine Dicke 10,6 Mm. (Verhältniss 1 : 1,61.)

In seinem elektrischen Verhalten gleicht er dem vorhergehenden; seine sämmtlichen Seitenflächen sind positiv, in abnehmender Stärke nach den Zwillingskanten von 128° hin; die Endflächen sind in ihrer ganzen Ausdehnung stark negativ.

Krystall Nr. 31 (Fig. LVII und LVIII).

Der aus Aragonien stammende und gleichfalls dem Freiberger Museum gehörige Krystall Nr. 31 hat eine mehr faserige Structur. Seine Höhe (Länge) ist 22,0 Mm., seine Dicke 10,6 Mm. (Verhältniss 1 : 0,482.) Die Form seines Querschnittes gleicht Fig. LVII; Fig LVIII stellt sein Netz in natürlicher Grösse dar.

Infolge der im Verhältnisse zur Dicke grösseren Höhe und der faserigen Structur tritt auf den beiden Zwillingskanten von 128° und deren Umgebung, so wie auf den Nähten, in welchen sich A' mit B und C berührt, negative Polarität auf. Die übrigen Theile der Seitenflächen sind positiv, die Endflächen ziemlich stark negativ. In dem Netze Fig. LVIII ist diese Vertheilung specieller dargestellt.

Krystall Nr. 32 (Fig. LIX).

Auch die Structur dieses Krystalles aus Aragonien erscheint etwas faserig. Fig. LIX stellt die Form seines Querschnittes dar; an der Zwillingskante von A und B finden sich kleine Einschiebsel von C und D, wie solche die Zeichnung nachweist. An der brachydiagonalen Kante von C ist ein kleiner Krystall aufgewachsen. Der Krystall Nr. 32 ist 9,7 Mm. hoch und 9,6 Mm. dick (Verhältniss 1 : 0,99).

In seiner elektrischen Vertheilung, welche durch Farben in dem Querschnitte (Fig. LIX) angedeutet ist, gleicht er im Allgemeinen dem vorhergehenden; die beiden Zwillingskanten zwischen A und B, A und C sammt den nächsten Umgebungen sind negativ, die übrigen Theile der Seitenflächen aber positiv; selbst die Naht zwischen A' und C zeigte sich noch schwach positiv, während die Naht zwischen A' und C keine Elektricität darbot; ein Umstand, der wohl durch die geringe Länge des Krystalles bedingt wird. Die beiden Endflächen sind negativ.

Krystall Nr. 33 (Fig. LX).

Die sechs Stücke, aus welchen der dem Freiberger Museum gehörige und aus Aragonien stammende Krystall Nr. 33 zusammengesetzt ist, sind sehr gut zu erkennen, weil ihre oberen und unteren Enden freistehen, und von einem steilen rauhflächigen Brachydoma schneidenförmig zugeschärft sind. Fig. LX stellt die Form seines Querschnittes dar. Seine Höhe beträgt 30,6 Mm., seine Dicke 12,6 Mm. (Verhältniss 1 : 0,412.)

Da das zwischen A und B eingeschaltete Stück D nur schmal ist, so erscheint die von A und B gebildete Zwillingskante, ebenso wie die Zwillingskante zwischen A und C, sammt den zunächst liegenden Flächenstücken negativ; indess hat die negative Zone auf der Kante (A, C) eine grössere Ausdehnung und Stärke, als auf der von D unterbrochenen Kante (A, B). Da ferner auf der hinteren Seite des Krystalles an den beiden Individuen B und D die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ auftreten,*) so finden sich auf diesen Flächen nochmals negative Zonen. Alle übrigen Theile der Seitenflächen sind positiv. In der Zeichnung des Querschnittes Fig. LX ist diese Vertheilung durch die Farben sichtbar gemacht.

Die schneidenförmigen rauhen Enden der einzelnen Individuen sind schwach negativ.

Krystall Nr. 34 (Fig. LXI und LXII).

Der gleichfalls dem Freiberger Museum gehörige Krystall aus

*) In der Zeichnung sind dieselben sofort aus den Winkeln von 122° zu erkennen.

Aragonien Nr. 34 ist stark mit einer rothbraunen Thonmasse imprägnirt und besteht aus vier grossen Stücken A, A', B, C und einem etwas kleineren D. Dieselben sind an ihren Enden frei ausgebildet und zeigen am unteren Ende besonders vier durch steile rauhflächige Brachydomen zugeschärfte Schneiden, während am oberen Ende einige dieser Schneiden sich in mehrere kleinere auflösen. Die Höhe des Krystalles misst 52 Mm., seine Dicke 23 Mm. (Verhältniss 1 : 0,44.) Fig. LXI stellt die Form seines Querschnittes dar.

In dem Fig. LXII in halber Grösse gezeichneten Netze ist die elektrische Vertheilung dargestellt. Die vollkommen ausgebildete Zwillingskante (A, C) ist negativ; die Zwillingskante (A B) ist durch D gespalten, und an der daselbst hervortretenden brachydiagonalen Kante von D erscheint positive Elektricität; dagegen tritt die negative wieder auf den Nähten auf, in welchen sich A' und C, A' und B, B und D berühren; der einspringende Winkel, in welchem A und D zusammenstossen, zeigt sich unelektrisch. Alle übrigen Theile der Seitenflächen sind positiv. Die an den Enden hervorragenden Schneiden besitzen negative Polarität.

Krystall Nr. 35 (Fig. LXIII).

Der mit einer bräunlichrothen Thonmasse imprägnirte Krystall stammt gleichfalls aus Aragonien und gehört der Freiberger Sammlung. Bis auf eine kleine Stelle an der rechten Fläche von A, wo er angelegen hat, ist er ziemlich vollkommen ausgebildet; an beiden Enden wird er von sehr ebenen, wenn auch nur wenig glänzenden Flächen 0 P begrenzt. Die Zwillingskante zwischen A und B von 128° ist in der Mitte des Krystalles ungefähr zwei Millimeter breit vollkommen von den Flächen A und B ausgebildet; dagegen tritt oberhalb und unterhalb dieser Stelle ein Einschiebsel D hervor, wie solches in dem Querschnitte Fig. LXIII gezeichnet ist. Der Krystall ist 23,2 Mm. hoch und 25,6 Mm. dick (Verhältniss 1 : 1,10).

In der Fig. LXIII, welche die Gestalt des Querschnittes darstellt, ist die elektrische Vertheilung auf den Seitenflächen durch die Farben angedeutet. Schwache negative Elektricität findet sich auf der Zwillingskante (A, B) und auf den Nähten, wo A' und B, A' und C, und C und E zusammenstossen; alle übrigen Theile der Seiten-

flächen sind positiv. Die beiden Endflächen zeigen sehr starke negative Polarität.

Krystall Nr. 36 (Fig. LXIV).

Der Krystall Nr. 36 aus Aragonien gehört dem Würzburger mineralogischen Museum. In der oberen Hälfte ist er vollkommener ausgebildet als in der unteren. Fig. LXIV stellt die Form seines Querschnittes dar; an der Stelle, wo A und B sonst die Zwillingskante bilden, finden sich zwei Einschiebsel C und D, und ein drittes, einem zu C in Zwillingsstellung befindlichen Individuum E angehöriges Stück ist zwischen A′ und B eingeschaltet. Aus zwei Seitenflächen ragen die Köpfe kleiner eingewachsener Krystalle heraus. Der Krystall ist 18 Mm. hoch und 19,8 Mm. dick (Verhältniss 1 : 1,1). Die elektrische Vertheilung auf den Seitenflächen ist in dem Querschnitte angedeutet. Die Seitenflächen sind positiv, mit Ausnahme der Zwillingskante (A, C) und der anliegenden Flächenstücke; es tritt also bei diesem Krystalle trotz seiner im Verhältniss zur Dicke nur geringen Höhe auf dieser Kante negative Polarität hervor; dagegen sind die Nähte noch positiv oder unelektrisch. Die beiden Endflächen 0 P sind stark negativ.

Krystall Nr. 37 (Fig. LXV).

Der mit bräunlichrothem Thone stellenweise imprägnirte Krystall aus Aragonien gehört dem hiesigen mineralogischen Museum. Er ist ziemlich vollkommen ausgebildet; die beiden Endflächen 0 P zeigen mässigen Glanz. Fig. LXV stellt die Form seines Querschnittes dar. An der brachydiagonalen Kante von C ist ein anderer kleiner Aragonitkrystall eingewachsen. Die Höhe des Krystalls Nr. 37 beträgt 16,5 Mm., die Dicke 16,7 Mm. (Verhältniss 1 : 1,01.)

Die elektrische Vertheilung auf den Seitenflächen ist in dem Querschnitte Fig. LXV angedeutet. Die einzige überhaupt vorhandene Zwillingskante (A, B) ist negativ, ebenso wie die drei Nähte, in welchen sich A′ und B, A′ und C, und A und B′ berühren; der einspringende Winkel zwischen B′ und C zeigt keine deutlichen Spuren von Elektricität. Die übrigen Theile der Seitenflächen sind positiv, die Endflächen 0 P stark negativ.

Krystall Nr. 38 (Fig. LXVI).

Der durch seine beträchtliche Länge ausgezeichnete und dem Freiberger Museum gehörige Krystall Nr. 38 stammt aus Aragonien; er ist durch eingemengte Thonmassen bräunlich gefärbt, und zeigt eine stark stängliche Zusammensetzung, so wie sehr tiefe Nähte auf seiner Oberfläche an den Berührungsstellen zweier in parallel verschobener Zwillingsstellung befindlicher Individuen. Fig. LXV stellt die Form seines Querschnittes dar, während in Fig. LXVI sein Netz in halber Grösse abgebildet ist. Die beiden Endflächen 0 P sind eben. Seine Höhe misst 75,4 Mm., seine Dicke 17,0 Mm. (Verhältniss 1 : 0,186.)

Die elektrische Vertheilung ist in das Netz Fig. LXVI eingetragen. Die Zwillingskante (A, B), die Nähte zwischen B und A', A' und C, B' und A, so wie der einspringende Winkel zwischen B' und C sind negativ; die übrigen Theile der Seitenflächen erscheinen positiv, jedoch mit Ausnahme der an dem oberen und unteren Ende gelegenen Stücke, auf welche (ebenso wie bei dem langen Zwillingskrystalle Nr. 26) die negative Elektricität von den Endflächen her übergreift. Auf den Endflächen selbst ist die negative Spannung ziemlich stark.

Krystall Nr. 39 (Fig. LXVII).

Der Krystall Nr. 39 gleicht den beiden unter Nr. 33 und 34 beschriebenen; er besteht aus einer geringen Anzahl von Individuen, deren Enden frei zu Schneiden ausgebildet sind; sein Fundort ist jedenfalls Aragonien. Fig. LXVII stellt die Form seines Querschnittes dar, in welchem die elektrische Vertheilung auf seinen Seitenflächen durch Farben angedeutet ist. Die Ausbildung auf der rechten Seite bei D und B' erscheint etwas mangelhaft. Seine Höhe misst 38,4 Mm., seine Dicke 10,7 Mm. (Verhältniss 1 : 0,27.)

Die durch die Einschiebsel C und D gespaltene Zwillingskante (A, B) zeigt, weil diese eingeschobenen Stücke nur schmal sind, noch negative Polarität; eben dieselbe findet sich auf den Nähten, in welchen A' mit B und A mit B' zusammenstossen. Die übrigen Theile der Seitenflächen geben positive Spannungen.

Krystall Nr. 40 (Fig. LXVIII).

Der Querschnitt des dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Krystalles aus Aragonien Nr. 40 hat die Form Fig. LXVIII. Seine Farbe ist graulich und seine beiden Endflächen 0 P sind mit einer graulichen Thonmasse überzogen. Er ist 16,7 Mm. hoch und 18,4 Mm. dick (Verhältniss 1 : 1,10).

Da die Zwillingskanten zwischen A und B durch die eingeschobenen Stücke D und C, und die Zwillingskante zwischen A und C durch das eingeschaltete fünfte Individuum E weit gespalten sind, so kann auf ihnen keine negative Polarität erscheinen; es zeigt sich auf den daselbst hervortretenden brachydiagonalen Kanten der betreffenden Individuen die diesen Kanten entsprechende positive Elektricität. Die sämmtlichen Kanten und Seitenflächen sind also positiv, mit Ausnahme der auf den Flächen vorhandenen Nähte, welche eine schwache negative Spannung zeigen, und des einspringenden Winkels (von 192°) zwischen A und E, welcher keine Elektricität besitzt. Die beiden Endflächen sind stark negativ.

Krystall Nr. 41 (Fig. LXIX).

Der Krystall Nr. 41 (aus Aragonien) gehört dem Würzburger Museum. Fig. LXIX stellt die Form seines Querschnittes dar. Auf den Endflächen 0 P findet sich eine Andeutung eines sechsstrahligen Sternes, dessen Strahlen von der Mitte aus gegen die Nähte und den einspringenden Winkel nach der Peripherie hin mehr oder weniger geradlinig laufen. Der Krystall ist 9,8 Mm. hoch, und 16,6 Mm. dick (Verhältniss 1 : 1,69).

Auf den Seitenflächen ist nirgends negative Polarität zu finden, weil der Krystall nur kurz ist und keine ausgebildete Zwillingskante von 128° besitzt; jedoch nimmt, weil das eingeschobene Stück D nur schmal ist, die positive Spannung nach der Stelle hin, wo die Zwillingskante zwischen A und B entstehen würde, und ebenso gegen die Nähte hin, in welchen die Krystallstücke aneinander stossen, ab, so dass mehrere der letzteren keine elektrische Spannung zeigen. Die Endflächen sind stark negativ.

Krystall Nr. 42 (Fig. LXX).

Der von Bastennes bei Dax im Dep. de Lande stammende Krystall gehört der Freiberger Sammlung. Er hat die ob. S. 396 beschriebene Bildung; seinen Querschnitt stellt Fig. LXX dar. Die einzelnen mehr oder weniger starken Stängel oder Fasern, aus welchen der Krystall zusammengesetzt ist, haben zwar fast genau gleiche Länge, doch sind ihre Köpfe nicht in eine Ebene verschmolzen, sondern die Köpfe der einzelnen Fasern treten als von einem Brachydoma gebildete Schneiden deutlich hervor. Aus ihnen ergibt sich die Zusammensetzung des Krystalles in seinem Innern als mit der Fig. LXV nach Leydolt gezeichneten übereinstimmend. Seine Höhe beträgt 31 Mm., seine Dicke 32 Mm. (Verhältniss 1 : 1,03.)

Die Seitenflächen sind positiv, die einspringenden Winkel unelektrisch, die Endflächen negativ.

Krystall Nr. 43 (Fig. LXXI).

Der Krystall Nr. 43 stammt aus Aragonien und gehört dem Freiberger Museum. Fig. LXXI stellt die Form seines Querschnittes dar. Auf den Endflächen erscheint ein sechsstrahliger Stern; in der oberen Fläche 0 P steckt ein anderer kleiner Krystall, dessen eine Seitenfläche fast im Niveau der Ebene 0 P liegt. Die Höhe des Krystalles Nr. 43 misst 12 Mm., die Dicke 17,3 Mm. (Verhältniss 1 : 1,44.)

Die Seitenflächen sind positiv, zwei Nähte unelektrisch, die Endflächen stark negativ.

Krystall Nr. 44 (Fig. LXXII).

Den Querschnitt dieses Krystalles von Bastennes stellt seiner Form nach Fig. LXXII dar. Auf seinen Endflächen 0 P sind sternförmige Zeichnungen sichtbar. Seine Höhe misst 20,3 Mm., seine Dicke 25,7 Mm. (Verhältniss 1 : 1,26.)

Die elektrische Vertheilung gleicht im Allgemeinen der auf dem vorhergehenden Krystalle beobachteten.

Krystall Nr. 45 (Fig. LXXIII).

Die Gestalt des Querschnittes des ebenfalls von Bastennes stam-

menden Krystalles Nr. 45 stellt Fig. LXXIII dar. Auf den Endflächen erscheinen sternförmige Zeichnungen. Seine Höhe beträgt 18,2 Mm., seine Dicke 25,6 Mm. (Verhältniss 1 : 1,41.)

Die elektrische Vertheilung gleicht der auf den beiden vorhergehenden Krystallen beobachteten.

Krystall Nr. 46 (Fig. LXXIV).

Die Form des Querschnittes dieses Krystalles von Bastennes ist Fig. LXXIV abgebildet. Seine Höhe misst 20 Mm, seine Dicke 26,5 Mm. (Verhältniss 1 : 1,32.)

Die elektrische Vertheilung auf seiner Oberfläche gleicht der auf dem vorhergehenden Krystalle beobachteten.

Krystall Nr. 47 (Fig. LXXV).

Der aus Aragonien stammende und dem Freiberger Museum gehörige Krystall Nr. 47 ist schon oben S. 402 beschrieben worden. Er zeigt einen Querschnitt von der Form Fig. LVII und eine sehr faserige Structur; aus seinen Seitenflächen ragen zahlreiche kleine Aragonitkrystalle hervor.

Infolge seiner Zusammensetzung muss sich also, wie bei Krystall Nr. 31 Fig. LVIII, auf den Seitenflächen negative Elektricität an den beiden Zwillingskanten zwischen A und B, und A und C nebst den anliegenden Flächenstücken und auf den Nähten zwischen A′ und B und A′ und C finden.

Der Krystall ist in einer durch die brachydiagonale Seitenkante der Stücke A und A′ gehenden Ebene zerschnitten. Diese Schnittflächen, welche polirt worden waren, sind Fig. LXXV abgebildet, und zeigen die eigenthümliche faserige oben S. 402 beschriebene Bildung.

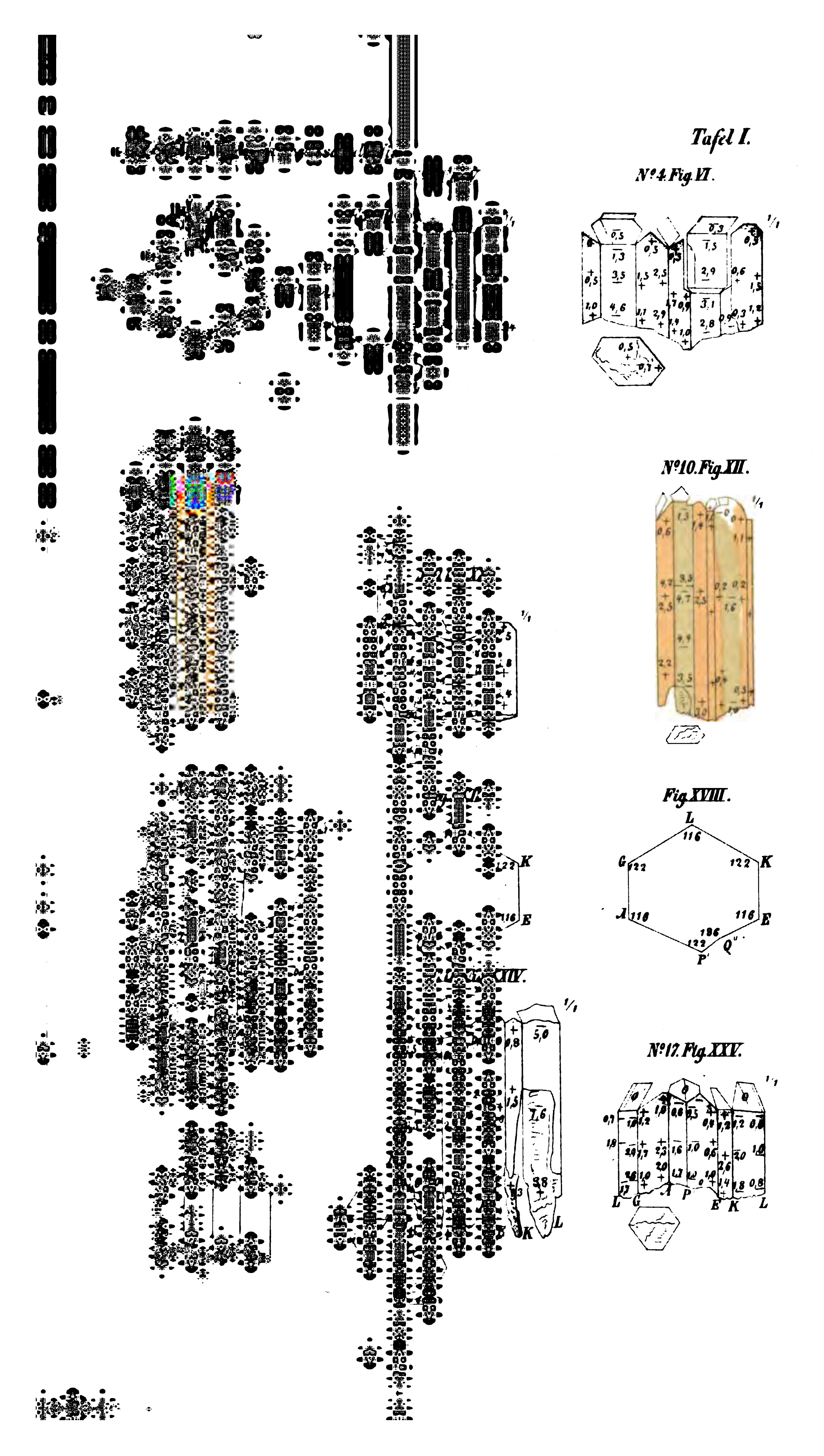
Auf den äusseren Begrenzungsflächen der beiden Hälften stimmt die elektrische Vertheilung mit den obigen Voraussetzungen überein; die negativen Zonen treten daselbst in grosser Ausdehnung und Intensität hervor. Infolge dessen zeigen die beiden Schnittflächen fast in ihrer ganzen Ausdehnung positive Spannungen; nur auf der linken Schnittfläche fand sich oben noch eine kleine negative Stelle.

Krystall Nr. 48.

Der schon oben S. 403 erwähnte Krystall Nr. 48 aus Aragonien besitzt anscheinend ein dichtes Gefüge; Fig. LXI stellt die Form seines Querschnittes dar. Seine Höhe misst 16,6 Mm. und seine Dicke 20 Mm. (Verhältniss 1 : 1,2.)

Der Krystall war in der Richtung von dem einspringenden Winkel links zwischen A und D bis zur Naht rechts zwischen A' und C in einer ziemlich ebenen Fläche durchgebrochen. Auf der rohen Bruchfläche sieht man, wie gleichfalls S. 403 schon hervorgehoben, auch ohne Politur die Faserbildung, ähnlich wie sie Fig. LXXV darstellt; die von dem Mittelpunkte seitlich verlaufenden Fasern treten nach dem einspringenden Winkel zwischen A und D etwas stärker hervor, als auf der andern Seite nach der Naht zwischen A' und C, hin.

Da auf den äusseren Seitenflächen dieses Krystalles infolge seiner Zusammensetzung die positive Elektricität vorherrscht, so sind die Bruchflächen negativ, mit Ausnahme des Stückes, auf welchem die stärkere seitliche Faserbildung sich zeigt, also von der Mitte der Bruchfläche bis zu dem einspringenden Winkel zwischen A und D; dieses Stück ist auf beiden Hälften positiv, und zwar erweitert sich die positive Zone von der Mitte nach demjenigen Rande der Bruchfläche, welcher in dem einspringenden Winkel zwischen A und D liegt, so weit, dass sie ungefähr die Hälfte dieses Randes einnimmt, und also nur das obere und untere Viertel desselben noch negativ bleibt. Diese beiden positiven Zonen fallen beim Zusammenlegen der beiden Krystallhälften aufeinander.



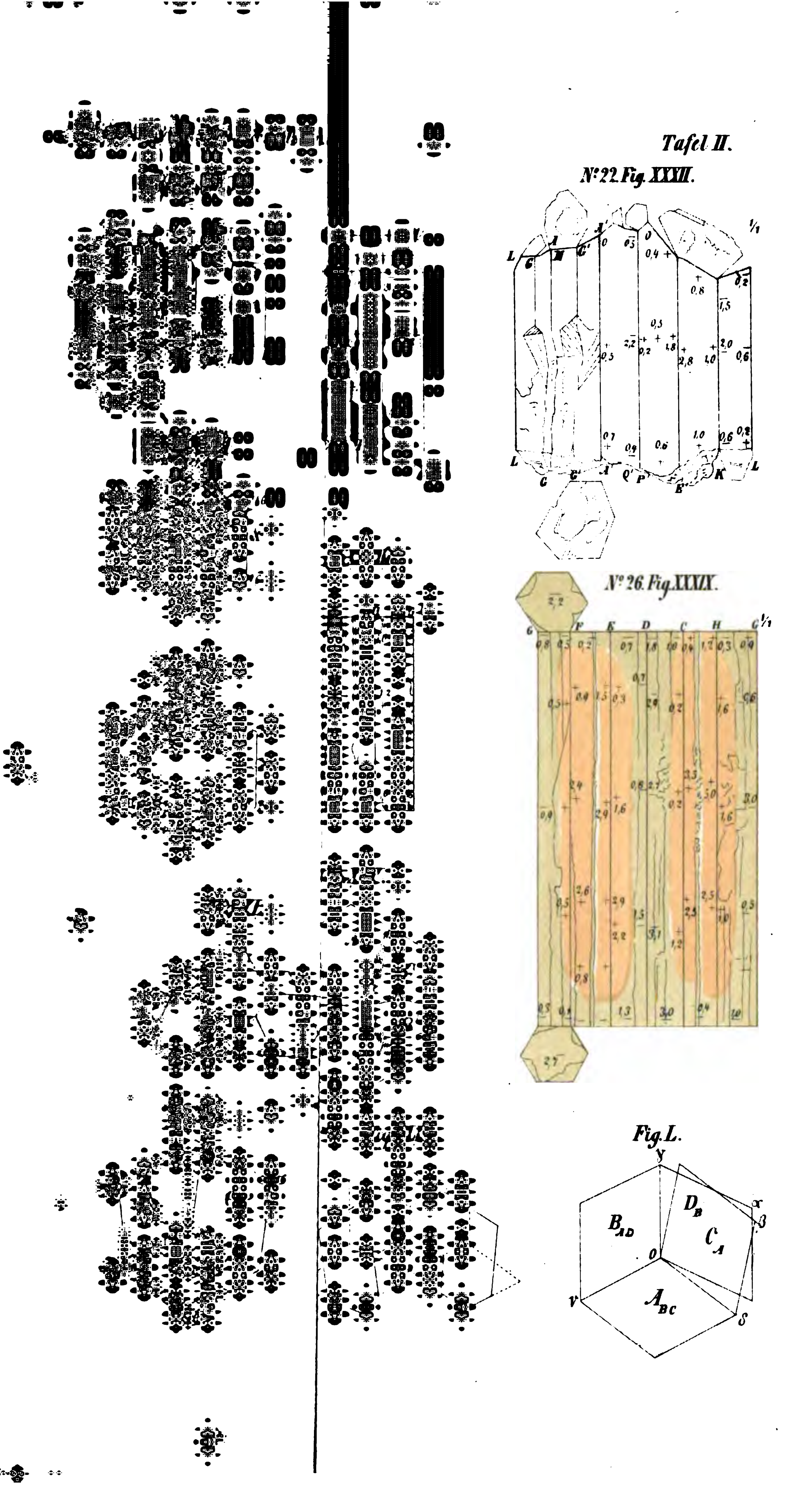
Tafel I.

Nº 4. Fig. VI.

Nº 10. Fig. XII.

Fig. XVIII.

Nº 17. Fig. XXV.

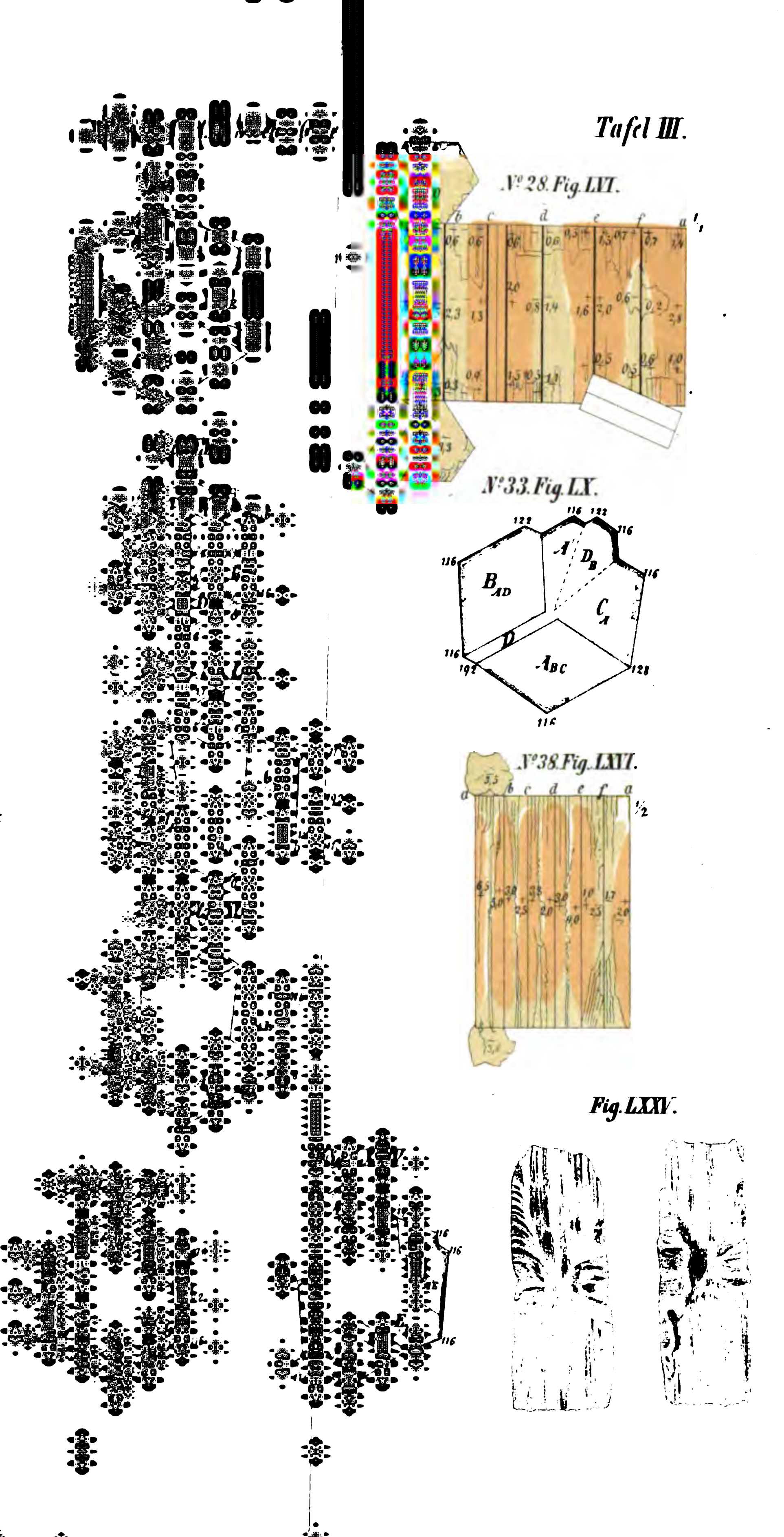


Tafel II.

N° 22. Fig. XXXII.

N° 26. Fig. XXXIX.

Fig. L.



Tafel III.
Nº 28. Fig. LVI.
Nº 33. Fig. LX.
Nº 38. Fig. LXVI.
Fig. LXXV.

ÜBER DIE

DEN

KRÄFTEN ELEKTRODYNAMISCHEN URSPRUNGS

ZUZUSCHREIBENDEN

ELEMENTARGESETZE.

VON

CARL NEUMANN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

N° VI.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1873.

Vom Verfasser übergeben den 31. März 1873.
Der Abdruck vollendet den 12. Juli 1873.

ÜBER DIE DEN KRÄFTEN ELEKTRODYNAMISCHEN URSPRUNGS ZUZUSCHREIBENDEN ELEMENTARGESETZE.

VON

CARL NEUMANN.

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem. Omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae. Jam illa certo temporis momento divina quadam necessitate coucta emerget.

C. G. J. JACOBI.

Die durch elektrische Ströme provocirten Kräfte können mit Rücksicht auf die Art und Weise ihrer Wirkung in folgende Classen eingetheilt werden:

(*a.*) die von Ampère (1820) entdeckten Kräfte; sie sind ihrem Ursprunge nach als elektrodynamische, ihrer Wirkung nach als ponderomotorische Kräfte zu bezeichnen;

(*f.*) die von Faraday (1831) entdeckten Kräfte; sie sind ihrem Ursprunge nach wiederum als elektrodynamische, hingegen ihrer Wirkung nach als elektromotorische Kräfte zu charakterisiren.

Dass das von Ampère selber für die Kräfte (*a.*) aufgestellte Elementargesetz mancherlei Bedenken unterworfen ist, und dass durch solche Bedenken das sich anlehnende von Weber für die Kräfte (*f.*) gegebene Elementargesetz miterschüttert wird, unterliegt keinem Zweifel. Ich werde daher die wirklichen Elementargesetze dieser Kräfte (*a.*) und (*f.*) einstweilen als völlig unbekannt ansehen; ihre Auffindung ist das eigentliche Ziel der nachfolgenden Untersuchungen.

Die Voraussetzungen, auf denen diese Untersuchungen beruhen, sind ausgezeichnet durch ihre Einfachheit; und wenn auch von einer absoluten Sicherheit derselben selbstverständlich nicht die Rede sein kann, so dürften doch (bei dem gegenwärtigen Zustande unserer Kenntnisse und Vorstellungen) schwerlich andere aufzufinden sein, welche einen höheren Grad von Sicherheit, gleichzeitig aber auch die für den verfolgten Zweck ausreichenden Mittel darbieten.

(1.) *Die erste Voraussetzung* besteht in der Annahme des allgemeinen Princips der lebendigen Kraft, sowie in der Annahme desjenigen Gesetzes, welches von Joule aufgestellt worden ist für die durch einen elektrischen Strom hervorgebrachten Wärmemengen.

(2.) *Die zweite Voraussetzung* besteht in der Annahme zweier von meinem Vater aufgestellten Integralgesetze. Beide beziehen sich auf gleichförmige elektrische Stromringe und dürften, auf Grund experimenteller Prüfungen, als ziemlich feststehend zu betrachten sein.

Das eine derselben betrifft die Kräfte (*a.*), und sagt aus, dass die von zwei Stromringen (der genannten Art) während der Zeit dt aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit

$$= - JJ_1 dQ$$

ist, wo J, J_1 die beiden Stromintensitäten bezeichnen, während Q (das sogenannte Potential, bezogen auf die Stromeinheit) einen Ausdruck vorstellt, der lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage und Gestalt der beiden Ringe.

Das zweite jener beiden Gesetze betrifft die Kräfte (*f.*), und sagt aus, dass die Summe der von dem einen Ringe während der Zeit dt in dem andern Ringe inducirten elektromotorischen Kräfte

$$= + d(J_1 Q)$$

ist, wo J_1 die Stromintensität des inducirenden Ringes bezeichnet, während Q dieselbe Bedeutung hat wie vorhin.

(3.) *Die dritte Voraussetzung* besteht in gewissen den Kräften (*a.*) und (*f.*) beizulegenden Grundeigenschaften, nämlich in folgenden Annahmen:

Erstens: Die von einem Stromelement $J_1 Ds_1$ auf ein anderes Stromelement JDs ausgeübte Kraft (*a.*) ist proportional dem Product JJ_1, sonst aber nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente.

Zweitens: Die von einem Stromelement $J_1 Ds_1$ während der Zeit dt in irgend einem Punkte eines Conductors inducirte Kraft (*f.*) ist zerlegbar in zwei respective mit J_1 und dJ_1 proportionale Kräfte; diese Kräfte sind, abgesehen von den genannten Factoren, nur noch abhängig von der relativen Lage, sowie von der Aenderung der relativen Lage, und verschwinden, sobald die relative Lage und der Werth von J_1 constant bleiben.

Drittens: Jedes Stromelement ist, hinsichtlich der von ihm ausgehenden Kräfte (*a.*) und (*f.*) ersetzbar durch seine sogenannten Componenten.

Ich werde also die Elementargesetze der Kräfte (*a.*) und (*f.*) als völlig unbekannt betrachten, und dieselben aus den eben genannten Voraussetzungen (1.), (2.), (3.) abzuleiten versuchen. Es bleibt noch übrig, einige Andeutungen zu geben über die Eintheilung meiner Untersuchung in einzelne Abschnitte.

Der erste Abschnitt enthält eine Reihe rein mathematischer Sätze, welche gewissermaassen das Rüstzeug repräsentiren, von welchem zur Durchführung meiner Untersuchungen bald dies bald jenes Stück erforderlich war. Trotz ihrer gelegentlichen Entstehungsweise haben jene Sätze allmählig zu einem gewissen System sich vereinigt. Dass ich dieses System von der Hauptuntersuchung abtrenne, und derselben vorangehen lasse, dürfte für die Uebersichtlichkeit und Verständlichkeit meiner Expositionen von wesentlichem Nutzen sein.

Der zweite Abschnitt bezieht sich ausschliesslich auf das Princip der lebendigen Kraft. Auf Grund derjenigen Fundamentalgleichungen:

$$\begin{aligned} mx'' &= X, & u &= k\mathfrak{X}, \\ my'' &= Y, & v &= k\mathfrak{Y}, \\ mz'' &= Z, & w &= k\mathfrak{Z}, \end{aligned}$$

durch welche die ponderomotorischen Kräfte einerseits und die elektromotorischen Kräfte andererseits definirt sind, und unter Anwendung des schon erwähnten Joule'schen Gesetzes, entwickele ich den analytischen Ausdruck jenes Princips, und gelange in solcher Weise zu einer bestimmten Formel, der die elektrostatischen und elektrodynamischen Kräfte zu entsprechen haben. Werden nun für die ersteren die von Coulomb und Kirchhoff aufgestellten Gesetze in Anwendung gebracht, so bleiben in dieser Formel als unbekannte Kräfte nur noch die elektrodynamischen übrig, d. i. die Kräfte (*a.*) und (*f.*).

Im dritten Abschnitt werden zunächst (§. 1, 2, 3) die aus den Grundeigenschaften für die Kräfte (*a.*) und (*f.*) resultirenden Formeln dargelegt, — Formeln, welche noch behaftet sind mit neun unbekannten Functionen der Entfernung: ϱ, $\bar{\varrho}$, σ, τ, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$.

Sodann wird (§. 4) dargethan, dass diese unbekannten Functionen,

unter Anwendung des Princips der lebendigen Kraft, sich auf drei reduciren lassen, nämlich auf ϱ, $\bar{\varrho}$, ω. Hieran schliessen sich (in §. 5) gewisse Summationen und Transformationen, welche für die weiter folgenden Betrachtungen von Nutzen sind.

Sodann werden von mir (§. 6, 7) die beiden Integralgesetze zur Anwendung gebracht, und zwar in der Weise, dass ein gewisser Specialfall des einen Gesetzes als Vehicel zur weiteren Entwickelung der Theorie dient, hingegen alles übrige in jenen beiden Gesetzen enthaltene Material als Controle benutzt wird zur Prüfung der gefundenen Resultate. Hiebei reduciren sich die unbekannten Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, ω auf eine, nämlich auf ω.

Nunmehr können (§. 8) die für die Kräfte (*a.*) und (*f.*) erhaltenen Formeln nämlich die diesen Kräften zuzuschreibenden Elementargesetze, abgesehen von der noch unbekannten Function ω, in völlig bestimmter Fassung dargelegt werden.

Es handelt sich endlich (§. 9) um die Ermittelung der Function ω. — Das in den beiden Integralgesetzen enthaltene Q (das sogenannte Potential, bezogen auf die Stromeinheit) ist, in Folge experimenteller Untersuchung, seinem analytischen Ausdrucke nach mit Sicherheit bekannt für den Fall beträchtlicher Entfernungen. Diese Kenntniss führt zur Bestimmung von ω, selbstverständlich wiederum nur für den Fall beträchtlicher Entfernungen. Bei Substitution des in solcher Weise für ω erhaltenen Werthes wird das den Kräften (*a.*) entsprechende Elementargesetz identisch mit dem Ampère'schen Gesetz, während gleichzeitig das den Kräften (*f.*) entsprechende Elementargesetz identisch wird mit demjenigen, zu welchem ich bereits bei einer früheren Gelegenheit auf anderem Wege gelangt war.

Schliesslich theile ich (§. 10) gewisse Resultate mit, zu denen man durch Anwendung der gefundenen Elementargesetze auf körperliche Leiter gelangt, — Resultate, welche ausgezeichnet sind durch ihre Einfachheit, und als Verallgemeinerungen der von meinem Vater für lineare Leiter aufgestellten Integralgesetze angesehen werden können.

Der vierte Abschnitt enthält eine mit der des vorhergehenden Abschnitts im Ganzen parallel fortlaufende Untersuchung, von jener verschieden durch etwas andere Grundlagen. — In neuerer Zeit ist nämlich der Gedanke aufgetaucht, dass die gegenseitige ponderomo-

torische Einwirkung zweier elektrischen Stromelemente möglicherweise nicht nur in gewöhnlichen Kräften, sondern daneben vielleicht auch in gewissen Drehungsmomenten bestehen könne. Einer solchen Möglichkeit entsprechend bedürfen alsdann die den ponderomotorischen Wirkungen (*a.*) zuzuschreibenden Grundeigenschaften einer etwas anderen Fassung, während die Grundeigenschaften der elektromotorischen Einwirkungen (*f.*) dieselben bleiben, wie früher. Es erschien mir nun von Interesse zu sein, diejenige Theorie zu entwickeln, welche sich ergiebt, wenn man die Voraussetzungen (1.) und (2.) ungeändert lässt, die Voraussetzung (3.) hingegen in der angedeuteten Weise modificirt.

Diese Theorie führt hinsichtlich der Wirkungen (*a.*) und (*f.*) zu zwei Elementargesetzen, welche, bezogen auf den Fall beträchtlicher Entfernungen, noch behaftet sind mit einer unbekannten Constanten k. Uebrigens ist die Gestalt der beiden Gesetze eine abschreckend complicirte. Auch zeigt sich, dass eine wesentliche Vereinfachung nur in dem einen Falle eintritt, dass man jener Constanten k den Werth (-1) zu Theil werden lässt. Alsdann aber werden die in Rede stehenden beiden Gesetze identisch mit denjenigen, zu welchen der vorhergehende Abschnitt hingeleitet hat.

Erster Abschnitt.

Ueber eine gewisse Classe von Integralen.

§. 1.

Präliminarien.

Eine geschlossene Curve mag im Folgenden kurzweg mit dem Namen Ring bezeichnet werden. Auf einem gegebenen Ringe wollen wir uns jederzeit auch eine bestimmte Umlaufsrichtung festgesetzt denken, in welcher (von einer festen Marke aus) die Bogenlängen zu rechnen, und gleichzeitig auch die Integrationen auszuführen sind. Die Bogenlängen zweier (in dieser Richtung) aufeinander folgenden Punkte mögen mit s und $s + Ds$, ihre Coordinaten mit x, y, z und $x + Dx$, $y + Dy$, $z + Dz$ bezeichnet sein; zugleich sei

$$(1.)\qquad \frac{Dx}{Ds} = \ , \qquad \frac{Dy}{Ds} = \mathrm{B}, \qquad \frac{Dz}{Ds} = \ ;$$

so dass also A, B, Γ die Richtungscosinus des Elementes Ds vorstellen.

Sind zwei Ringe (s) und (s_1) gegeben, und sind Ds und Ds_1 irgend zwei Elemente derselben, so mögen die Buchstaben r, ϑ, ϑ_1, ϵ in derselben Bedeutung wie bei Ampère gebraucht werden. Es sei nämlich:

(2.)
r die gegenseitige Entfernung der Elemente Ds, Ds_1;
ϑ, ϑ_1 die Winkel, unter welchen Ds, Ds_1 geneigt sind gegen die Richtung r $(Ds_1 \rightarrow Ds)$;
ϵ der Winkel, den Ds und Ds_1 mit einander einschliessen.

Ferner werde gesetzt:

$$(3.)\qquad r^2 = R,\quad \cos\vartheta = \Theta,\quad \cos\vartheta_1 = \Theta_1,\quad \cos\epsilon = \mathrm{E}.$$

Diese Grössen r, ϑ, ϑ_1, ϵ oder R, Θ, Θ_1, E mögen kurzweg die den beiden Elementen entsprechenden Ampère'schen Argumente heissen.

Differenzirt man die Entfernung r nach s und s_1, d. i. nach den Bogenlängen ihrer beiden Endpunkte, so erhält man die bekannten Relationen:

$$(4.)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial s} &= \Theta, & \frac{\partial R}{\partial s} &= 2r\Theta,\\
\frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\Theta_1, & \frac{\partial R}{\partial s_1} &= -2r\Theta_1,\\
\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} &= -\Theta\Theta_1, & \frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial R}{\partial s_1} &= -4R\Theta\Theta_1,\\
r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1} &= \Theta\Theta_1 - \mathrm{E}, & \frac{\partial^2 R}{\partial s\partial s_1} &= -2\mathrm{E}.
\end{aligned}$$

Ist f irgend eine Function von r, so mögen die Differentialquotienten von f nach r mit

$$(5.a)\qquad f',\ f'',\ f''',\ \ldots,$$

andererseits aber die nach R genommenen Differentialquotienten mit

$$(5.b)\qquad f^{\mathrm{I}},\ f^{\mathrm{II}},\ f^{\mathrm{III}},\ \ldots$$

bezeichnet werden, so also z. B. zwischen f' und f^{I} die Relation stattfindet: $f' = 2rf^{\mathrm{I}}$.

§. 2.

Ueber die Transformation von Ring-Integralen in Flächen-Integrale.

Sind

$$U = U(x, y, z), \quad V = V(x, y, z), \quad W = W(x, y, z)$$

beliebige Functionen der Coordinaten x, y, z, so kann das über irgend einen Ring (geschlossene Curve) erstreckte Integral

$$\Sigma[UDx + VDy + WDz],$$

nach einem von H. Hankel*) aufgestellten Satz, umgewandelt werden in ein anderes Integral, welches sich ausdehnt über alle Elemente $D\omega$ einer von dem Ringe begrenzten Fläche. Diese Umwandlung drückt sich aus durch die Formel:

$$(6.) \quad \Sigma[UDx + VDy + WDz] =$$
$$= \Sigma\left[\left(\beta\frac{\partial U}{\partial z} - \gamma\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \left(\gamma\frac{\partial V}{\partial x} - \alpha\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \left(\alpha\frac{\partial W}{\partial y} - \beta\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right]D\omega.$$

Dabei sind linker Hand unter Dx, Dy, Dz die rechtwinkligen Projectionen des Elementes Ds des gegebenen Ringes zu verstehen; andererseits repräsentiren α, β, γ die Richtungscosinus derjenigen auf $D\omega$ errichteten Normale, welche zur Richtung Ds ebenso liegt, wie die z Achse zur xy Richtung.**) — Die Formel (6.) kann übrigens (für gewisse Zwecke bequemer) auch folgendermaassen ausgedrückt werden.

---

*) H. Hankel: Zur allg. Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten, (eine von der philosophischen Facultät der Georgia Augusta am 4. Juni 1861 gekrönte Preisschrift, Göttingen), daselbst pag. 35.

Ein etwas anderer Beweis für diesen Satz ist von mir gegeben worden in meiner »Theorie der elektrischen Kräfte« (welche demnächst im Verlage von Teubner erscheinen wird), daselbst pag. 88. Wenn ich Hankels Namen dort nicht erwähnt habe, so findet solches darin seine Erklärung, dass ich jenen Satz (den ich seit langer Zeit gefunden und in meinen Vorlesungen benutzt habe) als mein Eigenthum betrachten zu dürfen glaubte. In der That bin ich erst ganz neuerdings auf die betreffende Stelle der Hankel'schen Schrift aufmerksam geworden.

**) Denkt man sich um den Anfangspunkt des Coordinatensystems in der xy Ebene eine Kreisperipherie beschrieben, und längs dieser Peripherie einen Punkt in Bewegung, welcher von der positiven x Achse ausgehend nach Durchlaufung von 90° zur positiven y Achse gelangt, so soll die in solcher Weise definirte Bewegungsrichtung kurzweg die xy Richtung genannt werden.

Erster Satz. Es ist:

$$(7.)\qquad \Sigma[UDx + VDy + WDz] = \Sigma\left[\frac{\Delta U}{\Delta x} + \frac{\Delta V}{\Delta y} + \frac{\Delta W}{\Delta z}\right] D\omega,$$

wo alsdann $\frac{\Delta}{\Delta x}$, $\frac{\Delta}{\Delta y}$, $\frac{\Delta}{\Delta z}$ die symbolischen Bedeutungen haben:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta x} &= \beta\frac{\partial}{\partial z} - \gamma\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\Delta}{\Delta y} &= \gamma\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\Delta}{\Delta z} &= \alpha\frac{\partial}{\partial y} - \beta\frac{\partial}{\partial x}; \end{aligned}$$

dabei repräsentiren $D\omega$ ein Element der vom Ringe begrenzten Fläche, und α, β, γ die Richtungscosinus derjenigen auf $D\omega$ errichteten Normale, welche zur Umlaufsrichtung des Ringes ebenso liegt, wie die zAchse zur xyRichtung.

Bringt man die Formel (6.) oder (7.), statt auf U, V, W selber, auf $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial x}$ in Anwendung, so gelangt man sofort zu folgendem

Zusatz I. Die Formel (7.) bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten unter dem Integralzeichen nach x differenzirt, hiebei aber α, β, γ als Constanten behandelt. In gleicher Weise darf natürlich nach y oder z, oder mehrmals hintereinander nach x, y, z differenzirt werden.

Zusatz II. Das Integral

$$\Sigma[UDx + VDy + WDz]$$

ist immer Null, sobald U, V, W Constanten sind.

Sind nun ferner:

$$\begin{aligned} L &= L(x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P &= P(x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ Q &= Q(x, y, z, x_1, y_1, z_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

beliebig gegebene Functionen von den Coordinaten zweier Punkte: x, y, z, x_1, y_1, z_1, so kann das über irgend zwei Ringe (s) und (s_1) hinerstreckte Integral:

$$\Sigma\Sigma[LDxDx_1 + \ldots + PDyDz_1 + QDzDy_1 + \ldots]$$

einer analogen Transformation unterworfen werden. Dabei mögen unter dem Zeichen $\Sigma\Sigma'$ im Ganzen neun Glieder gedacht werden, entsprechend den Combinationen

$$\begin{matrix} DxDx_1, & DyDx_1, & DzDx_1, \\ DxDy_1, & DyDy_1, & DzDy_1, \\ DxDz_1, & DyDz_1, & DzDz_1; \end{matrix}$$

so dass also die Anzahl jener gegebenen Functionen $L, \ldots, P, Q, \ldots$ ebenfalls gleich neun ist. — Der grösseren Uebersichtlichkeit willen deuten wir das Integral an durch

$$\Sigma\Sigma[(UU_1)DxDx_1 + \ldots + (VW_1)DyDz_1 + (WV_1)DzDy_1 + \ldots];$$

so dass z. B. L bezeichnet ist durch das Symbol (UU_1), ebenso P durch (VW_1), u. s. w. — Solches festgesetzt führt eine zweimalige Anwendung der Formel (7.) sofort zu folgendem Resultat.

Zweiter Satz. Es ist:

$$(9.)\quad \Sigma\Sigma[(UU_1)DxDx_1 + \ldots + (VW_1)DyDz_1 + (WV_1)DzDy_1 + \ldots] = \\ = \Sigma\Sigma'\left[\frac{\Delta^2(UU_1)}{\Delta x\Delta x_1} + \ldots + \frac{\Delta^2(VW_1)}{\Delta y\Delta z_1} + \frac{\Delta^2(WV_1)}{\Delta z\Delta y_1} + \ldots\right]D\omega D\omega_1,$$

wo $\frac{\Delta}{\Delta x}, \frac{\Delta}{\Delta y}, \frac{\Delta}{\Delta z}$ und $\frac{\Delta}{\Delta x_1}, \frac{\Delta}{\Delta y_1}, \frac{\Delta}{\Delta z_1}$ die Bedeutungen haben:

$$(10.)\quad \begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta x} &= \beta\frac{\partial}{\partial z} - \gamma\frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\Delta}{\Delta x_1} &= \beta_1\frac{\partial}{\partial z_1} - \gamma_1\frac{\partial}{\partial y_1}, \\ \frac{\Delta}{\Delta y} &= \gamma\frac{\partial}{\partial x} - \alpha\frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\Delta}{\Delta y_1} &= \gamma_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \frac{\Delta}{\Delta z} &= \alpha\frac{\partial}{\partial y} - \beta\frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\Delta}{\Delta z_1} &= \alpha_1\frac{\partial}{\partial y_1} - \beta_1\frac{\partial}{\partial x_1}; \end{aligned}$$

hier repräsentiren $D\omega$ und $D\omega_1$ zwei Elemente der von den beiden Ringen begrenzten Flächen, ferner α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die Richtungscosinus derjenigen auf $D\omega$ und $D\omega_1$ errichteten Normalen, welche zu den Umlaufsrichtungen der Ringe ebenso liegen, wie die zAchse zur xyRichtung.

In ähnlicher Weise, wie bei (7.) ergiebt sich auch hier ein entsprechender

Zusatz I. Die Formel (9.) bleibt richtig, wenn man unter dem Integralzeichen auf beiden Seiten nach x, y, z, x_1, y_1, z_1 (beliebig oft) differenzirt, falls man nur bei einer solchen Operation die Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ wie Constanten behandelt.

Zusatz II. Das Integral (9.) wird immer Null sein, sobald (UU_1), ... (VW_1), (WV_1), ... lineare Functionen von x, y, z, x_1, y_1, z_1 sind.

§. 3.

Ueber gewisse Integrale, welche abhängen von zwei gegebenen Ringen.

Für zwei beliebig gegebene Functionen

$$P = P(x, y, z, x_1, y_1, z_1),$$
$$Q = Q(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$$

wird offenbar jederzeit die Formel stattfinden:

$$(11.)\qquad P\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial s\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(Q\frac{\partial P}{\partial s}\right).$$

Es mögen nämlich (ebenso wie bisher) x, y, z und x_1, y_1, z_1 die Punkte zweier beliebig gegebenen Ringe, und s und s_1 ihre Bogenlängen vorstellen. Aus (11.) folgt durch Integration über beide Ringe sofort:

$$(12.)\qquad \Sigma\Sigma'\left[P\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial s\partial s_1}\right] DsDs_1 = 0.$$

Nimmt man für P die Werthe: $P = 1$, $P = x - x_1$, $P = yz_1 - zy_1$, so erhält man successive die Formeln:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} &\Sigma\Sigma'\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1} DsDs_1 = 0, \\ &\Sigma\Sigma'\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1}(x - x_1)\right] DsDs_1 = 0, \\ &\Sigma\Sigma'\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1}(yz_1 - zy_1) - Q(\mathrm{B}\Gamma_1 - \Gamma\mathrm{B}_1)\right] DsDs_1 = 0, \end{aligned}$$

wo $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ die Richtungscosinus von Ds, Ds_1 vorstellen.

Sind nun $r, \vartheta, \vartheta_1, \varepsilon, R, \Theta, \Theta_1, \mathrm{E}$ die Ampère'schen Argumente für Ds, Ds_1 (2.), und bezeichnet f eine nur von r abhängende Function, so wird (vergl. (5.)):

$$\frac{\partial f}{\partial s} = f^{\mathrm{I}}\frac{\partial R}{\partial s},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial s_1} = f^{\mathrm{II}}\frac{\partial R}{\partial s}\frac{\partial R}{\partial s_1} + f^{\mathrm{I}}\frac{\partial^2 R}{\partial s\partial s_1},$$

also mit Rücksicht auf (4.):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial s_1} = -4Rf^{\mathrm{II}}\Theta\Theta_1 - 2f^{\mathrm{I}}\mathrm{E}.$$

Nimmt man also in (13.) für Q die Function f, so gelangt man zu folgendem Resultat:

Dritter Satz. Für jede Function $f = f(r)$ und für jedes Paar von Ringen gelten die Formeln:

$$
(14.)\quad
\begin{aligned}
\Sigma\Sigma[4Rf^{II}\Theta\Theta_1]DsDs_1 &= -\Sigma\Sigma[2f^{I}\mathrm{E}]DsDs_1,\\
\Sigma\Sigma[4Rf^{II}\Theta\Theta_1(x-x_1)]DsDs_1 &= -\Sigma\Sigma[2f^{I}\mathrm{E}(x-x_1)]DsDs_1,\\
\Sigma\Sigma[4Rf^{II}\Theta\Theta_1(yz_1-zy_1)]DsDs_1 &= -\Sigma\Sigma[2f^{I}\mathrm{E}(yz_1-zy_1)+f(\mathrm{B}\Gamma_1-\Gamma\mathrm{B}_1)]DsDs_1,
\end{aligned}
$$

die Integrationen hinerstreckt über zwei beliebig gegebene Ringe.

Vierter Satz. Für jede Function $f = f(r)$ und für jedes Paar von Ringen gilt die Formel:

$$
(15.)\quad \Sigma\Sigma f(DyDz_1 - DzDy_1) = \Sigma\Sigma\left(\varrho\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \tau\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)D\omega D\omega_1
$$

wo ϱ, σ, τ die Bedeutungen haben:

$$
(16.)\quad
\begin{aligned}
\varrho &= \beta_1\gamma - \beta\gamma_1,\\
\sigma &= \gamma_1\alpha - \gamma\alpha_1,\\
\tau &= \alpha_1\beta - \alpha\beta_1,
\end{aligned}
$$

während α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die Normalen von $D\omega$ und $D\omega_1$ in dem früher (10.) angegebenem Sinne bezeichnen.

Beweis. Das vorgelegte Integral

$$
J = \Sigma\Sigma f(DyDz_1 - DzDy_1)
$$

nimmt durch Anwendung der Formel (9.) die Gestalt an:

$$
J = \Sigma\Sigma\left(\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta z_1} - \frac{\Delta^2 f}{\Delta z\Delta y_1}\right)D\omega D\omega_1.
$$

Nun ergiebt sich nach (10.) sofort:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta y} &= \gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \alpha\frac{\partial f}{\partial z},\\
\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta z_1} &= \alpha_1\left(\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y_1} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y_1}\right) - \beta_1\left(\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x_1} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x_1}\right),
\end{aligned}
$$

oder, weil f nur von r abhängt:

$$
\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta z_1} = -\alpha_1\left(\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right) + \beta_1\left(\gamma\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right)
$$

d. i.

$$
\frac{\Delta^2 f}{\Delta y\Delta z_1} = \alpha\alpha_1\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta_1\gamma\frac{\partial f}{\partial x} - \gamma\alpha_1\frac{\partial f}{\partial y} - \alpha\beta_1\frac{\partial f}{\partial z}\right);
$$

analog wird offenbar:

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta z \Delta y_1} = \alpha\alpha_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\beta\gamma_1 \frac{\partial f}{\partial x} - \gamma_1\alpha \frac{\partial f}{\partial y} - \alpha_1\beta \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Aus diesen Formeln aber folgt durch Subtraction und mit Benutzung der Bezeichnungen ϱ, σ, τ (16.) sofort:

$$\frac{\Delta^2 f}{\Delta y \Delta z_1} - \frac{\Delta^2 f}{\Delta z \Delta y_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varrho \frac{\partial f}{\partial x} + \sigma \frac{\partial f}{\partial y} + \tau \frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

w. z. z. w.

Zusatz. Soll eine noch unbekannte Function $f = f(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\Sigma\Sigma f(DyDz_1 - DzDy_1) \tag{17.}$$

für *jedes beliebige* Paar von Ringen verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass f eine Constante ist.

Beweis. Nehmen wir an, das Integral (17.) verschwinde für jedes beliebige Paar von Ringen, also z. B. auch für zwei unendlich kleine Ringe. Alsdann folgt, durch Anwendung der Transformation (15.), dass der Ausdruck

$$\varrho \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \tau \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

Null ist für zwei beliebig im Raume zu wählende Flächenelemente $D\omega$ und $D\omega_1$. Diesen Flächenelementen können wir, nachdem ihre Orte im Raume willkührlich gewählt sind, solche Stellungen geben, dass von den Grössen ϱ, σ, τ (16.) die beiden letzten Null sind; somit folgt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 .$$

In analoger Weise erhält man im Ganzen die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 .$$

Hieraus aber ergiebt sich sofort:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{Const.},$$

oder weil f lediglich von r abhängt:

$$f' \frac{x - x_1}{r} = \text{Const.}$$

Dieser Gleichung aber kann, weil die Orte von $D\omega$ und $D\omega_1$ will-

kührlich gewählt werden durften, mithin x und x_1 von einander verschieden sein dürfen, nur dadurch Genüge geschehen, dass man

$$f' = 0,$$

mithin

$$f = \text{Const.}$$

setzt. — Die Annahme, das Integral (17.) verschwinde für jedes beliebige Paar von Ringen, zieht also als nothwendige Consequenz nach sich die Formel: $f = \text{Const.}$; w. z. z. w.

Fünfter Satz. Für jede Function $f = f(r)$ und für jedes Paar von Ringen gilt die Formel:

$$(18.)\quad \Sigma\Sigma f \mathsf{E} Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} 4f^{II}(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta) \\ -(4f^{I} + 4Rf^{II})(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1) \end{array} \right\} D\omega D\omega_1 .$$

Hier bezeichnen $D\omega$ und $D\omega_1$ die Elemente der von den beiden Ringen begrenzten Flächen, ferner α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 die auf $D\omega$ und $D\omega_1$ errichteten Normalen in dem früher (10.) angegebenem Sinne. Endlich stehen ξ, η, ζ zur Abkürzung für $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar *) durch Anwendung der allgemeinen Formel (9.); denn das hier zu behandelnde Integral $\Sigma\Sigma f \mathsf{E} Ds Ds_1$ kann ausgedrückt werden durch

$$\Sigma\Sigma f(DxDx_1 + DyDy_1 + DzDz_1).$$

Bemerkung. Die Formel (18.) kann, wie Beltrami **) gezeigt hat, in folgende elegantere Gestalt versetzt werden:

$$(19.)\qquad \Sigma\Sigma f \mathsf{E} Ds Ds_1 = -\Sigma\Sigma \left[\frac{\partial^2 f}{\partial\nu \partial\nu_1} + \Delta f \,.\, \cos(\nu, \nu_1) \right] D\omega D\omega_1 ,$$

wo ν und ν_1 die durch α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 determinirten Richtungen bezeichnen, und wo andererseits Δf zur Abkürzung steht für $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. — Nimmt man in (19.) für f die specielle Function $\frac{1}{r}$, so erhält man die bekannte Formel:

$$(20.)\qquad \Sigma\Sigma \frac{\mathsf{E} Ds Ds_1}{r} = -\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\nu \partial\nu_1} D\omega D\omega_1$$

*) Die nähere Ausführung des Beweises findet man in meiner »Theorie der elektrischen Kräfte« pag. 91.

**) Beltrami: Sui principii fondamentali della idrodinamica razionale. Bologna, 1871. Pag. 45.

Von der Formel (18.) ausgehend gelangt *) man leicht zu folgendem

Zusatz I. Soll eine noch unbekannte Function $f = f(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\Sigma\Sigma f \mathrm{E} Ds Ds_1 \tag{21.}$$

für *jedes beliebige* Paar von Ringen verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass f eine Constante ist.

Von diesem Ergebnisse aus gelangt man, unter Anwendung der ersten Formel (14.), leicht zu folgenden weiteren Zusätzen:

Zusatz II. Soll eine noch unbekannte Function $\varphi = \varphi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\Sigma\Sigma \varphi \Theta\Theta_1 Ds Ds_1 \tag{22.}$$

für *jedes beliebige* Paar von Ringen verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass φ identisch mit Null ist.

Zusatz III. Sollen zwei noch unbekannte Functionen $\varphi = \varphi(r)$ und $\psi = \psi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\Sigma\Sigma (\varphi\Theta\Theta_1 + \psi \mathrm{E}) Ds Ds_1 \tag{23.a}$$

für *jedes beliebige* Paar von Ringen verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass φ, ψ durch die Relation

$$\varphi = r\psi' \tag{23.b}$$

mit einander verbunden sind.

Die Formel (18.) darf **) auf beiden Seiten unter dem Integralzeichen nach x differenzirt werden, falls man nur bei Ausführung dieser Operation α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ als Constante behandelt. Somit ergiebt sich, dass für jede Function $f = f(r)$ und jedes Paar von Ringen die Formel stattfindet:

$$\Sigma\Sigma 2 f^{\mathrm{I}} \xi \mathrm{E} Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma \left\{ \begin{array}{l} 4f^{\mathrm{II}}\alpha(\alpha_1\xi + \ldots) + 4f^{\mathrm{II}}\alpha_1(\alpha\xi + \ldots) \\ + 8f^{\mathrm{III}}(\alpha\xi + \ldots)(\alpha_1\xi + \ldots)\xi \\ - (16f^{\mathrm{II}} + 8Rf^{\mathrm{III}})(\alpha\alpha_1 + \ldots)\xi \end{array} \right\} D\omega D\omega_1. \tag{24.}$$

*) In Betreff einer ausführlicheren Begründung der Sätze (21.) und (23. a, b) verweise ich auf meine »Theorie der elektrischen Kräfte«, pag. 94 und 95. Gleichzeitig sei bemerkt, dass die Sätze (21.) und (22.) als Specialfälle des Satzes (23.a, b) aufgefasst werden können.

**) Wie aus einer früheren Bemerkung (Zusatz, pag. 427) unmittelbar folgt.

Substituirt man linker Hand für ξ seine eigentliche Bedeutung $x - x_1$, und setzt man ausserdem $2f^{I}$ gleich φ, so gelangt man zu folgendem Resultate:

Sechster Satz. Für jede Function $\varphi = \varphi(r)$ und für jedes Paar von Ringen gilt die Formel:

$$(25.)\quad \Sigma\Sigma\varphi \mathsf{E}(x - x_1)DsDs_1 = \Sigma\Sigma \begin{Bmatrix} 2\varphi^{I}\alpha(\alpha_1\xi + ..) + 2\varphi^{I}\alpha_1(\alpha\xi + ..) \\ + 4\varphi^{II}(\alpha\xi + \ldots)(\alpha_1\xi + \ldots)\xi \\ - (8\varphi^{I} + 4R\varphi^{II})(\alpha\alpha_1 + \ldots)\xi \end{Bmatrix} D\omega D\omega_1,$$

wo $D\omega$, $D\omega_1$, α, β, γ, α_1, β_1, γ_1, ξ, η, ζ dieselben Bedeutungen haben wie in (18.).

Wir wollen annehmen, die Function φ wäre von solcher Beschaffenheit, dass das Integral (25.) für jedes beliebige Paar von Ringen verschwindet, also z. B. auch verschwindet für zwei unendlich kleine Ringe. Alsdann folgt, durch Anwendung der Transformation (25.), dass der Ausdruck

$$\begin{aligned} &2\varphi^{I}\alpha(\alpha_1\xi + \ldots) + 2\varphi^{I}\alpha_1(\alpha\xi + \ldots) \\ &+ 4\varphi^{II}(\alpha\xi + \ldots)(\alpha_1\xi + \ldots)\xi \\ &- (8\varphi^{I} + 4R\varphi^{II})(\alpha\alpha_1 + \ldots)\xi \end{aligned}$$

verschwindet für zwei beliebig im Raume zu wählende Flächenelemente $D\omega$, $D\omega_1$. Dieser Ausdruck reducirt sich aber, falls man die Flächenelemente gleichweit von der yz Ebene entfernt annimmt, mithin ξ zu Null macht, auf seine erste Zeile. Somit folgt, dass

$$\varphi^{I} = 0,$$

und also

$$\varphi = \text{Const.}$$

sein muss. — Es ergiebt sich daher folgender

Zusatz. Soll eine noch unbekannte Function $\varphi = \varphi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$(26.)\quad \Sigma\Sigma\varphi \mathsf{E}(x - x_1)DsDs_1$$

für *jedes beliebige* Paar von Ringen verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass φ eine Constante ist.

Wir wollen die Formel (25.) zu verallgemeinern suchen, *) in-

*) Diese Betrachtungen (27.) bis (35.) sind für das Verständniss der vorliegenden Abhandlung nicht erforderlich, sondern nur der Vollständigkeit willen aufgenommen.

dem wir statt $(x-x_1)$ eine beliebige Function P von x, y, z, x_1, y_1, z_1 eintreten lassen; es handelt sich also um die Untersuchung des Integrals

$$[\varphi P] = \Sigma\Sigma \varphi P \mathrm{E} Ds Ds_1 , \tag{27.a}$$

oder vielmehr um die Vergleichung desselben mit den beiden einfacheren Integralen

$$[\varphi] = \Sigma\Sigma \varphi \mathrm{E} Ds Ds_1 , \tag{27.b}$$

$$[P] = \Sigma\Sigma P \mathrm{E} Ds Ds_1 . \tag{27.c}$$

Zufolge der allgemeinen Formel (9.) kann das Integral (27.a) ausgedrückt werden durch:

$$[\varphi P] = \Sigma\Sigma \varphi P (Dx Dx_1 + Dy Dy_1 + Dz Dz_1) ,$$
$$= \Sigma\Sigma \left(\frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta x \Delta x_1} + \frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta y \Delta y_1} + \frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta z \Delta z_1}\right) D\omega D\omega_1 .$$

Wir beschränken uns auf den Fall, dass die betrachteten beiden Ringe unendlich klein, die von ihnen begrenzten Flächen also identisch mit $D\omega$ und $D\omega_1$ sind. Alsdann reducirt sich die vorstehende Formel auf:

$$[\varphi P] = \left(\frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta x \Delta x_1} + \frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta y \Delta y_1} + \frac{\Delta^2(\varphi P)}{\Delta z \Delta z_1}\right) D\omega D\omega_1 ; \tag{28.a}$$

während gleichzeitig für die Integrale (27.b, c) die analogen Formeln sich ergeben:

$$[\varphi] = \left(\frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta x \Delta x_1} + \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta y \Delta y_1} + \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta z \Delta z_1}\right) D\omega D\omega_1 , \tag{28.b}$$

$$[P] = \left(\frac{\Delta^2 P}{\Delta x \Delta x_1} + \frac{\Delta^2 P}{\Delta y \Delta y_1} + \frac{\Delta^2 P}{\Delta z \Delta z_1}\right) D\omega D\omega_1 ; \tag{28.c}$$

aus (28.a, b, c) folgt sofort:

$$[\varphi P] = \varphi[P] + \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\frac{\Delta P}{\Delta x_1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y}\frac{\Delta P}{\Delta y_1} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta z}\frac{\Delta P}{\Delta z_1}\right) D\omega D\omega_1$$
$$+ P[\varphi] + \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_1}\frac{\Delta P}{\Delta x} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta y_1}\frac{\Delta P}{\Delta y} + \frac{\Delta\varphi}{\Delta z_1}\frac{\Delta P}{\Delta z}\right) D\omega D\omega_1 . \tag{29.}$$

Nun ist mit Rücksicht darauf, dass φ nur von r abhängt, und zufolge der für die Operationen $\frac{\Delta}{\Delta x}, \ldots$ festgesetzten Definition (10.):

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = 2\varphi^{\mathrm{I}}(\beta\zeta - \gamma\eta) , \qquad \frac{\Delta P}{\Delta x_1} = \beta_1 \frac{\partial P}{\partial z_1} - \gamma_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} ,$$
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta y} = 2\varphi^{\mathrm{I}}(\gamma\xi - \alpha\zeta) , \qquad \frac{\Delta P}{\Delta y_1} = \gamma_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} - \alpha_1 \frac{\partial P}{\partial z_1} ,$$
$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta z} = 2\varphi^{\mathrm{I}}(\alpha\eta - \beta\xi) , \qquad \frac{\Delta P}{\Delta z_1} = \alpha_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} - \beta_1 \frac{\partial P}{\partial x_1} ;$$

und folglich

$$(30.a)\quad \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}\frac{\Delta P}{\Delta x_1} + \dots\right) =$$
$$= 2\varphi^{I}\left((\mu\xi - \lambda_1\alpha)\frac{\partial P}{\partial x_1} + (\mu\eta - \lambda_1\beta)\frac{\partial P}{\partial y_1} + (\mu\zeta - \lambda_1\gamma)\frac{\partial P}{\partial z_1}\right);$$

ebenso ergiebt sich:

$$(30.b)\quad \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta x_1}\frac{\Delta P}{\Delta x} + \dots\right) =$$
$$= -2\varphi^{I}\left((\mu\xi - \lambda\alpha_1)\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu\eta - \lambda\beta_1)\frac{\partial P}{\partial y} + (\mu\zeta - \lambda\gamma_1)\frac{\partial P}{\partial z}\right);$$

dabei sind zur Abkürzung λ, λ_1, μ eingeführt für die Ausdrücke:

$$(31.)\quad \begin{aligned} \lambda &= \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta, \\ \lambda_1 &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta, \\ \mu &= \alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1. \end{aligned}$$

Substituirt man in (29.) die Ausdrücke (27.a, b, c) und (30.a, b), so gelangt man zu folgendem Resultate:

Siebenter Satz. Versteht man unter P eine beliebig gegebene Function von x, y, z, x_1, y_1, z_1, so wird für jede Function $\varphi = \varphi(r)$ und für je zwei unendlich kleine Ringe die Formel stattfinden:

$$(32.)\quad \Sigma\Sigma\varphi P\mathrm{E}DsDs_1 =$$
$$= \varphi\,.\,\Sigma\Sigma P\mathrm{E}DsDs_1 + P\,.\,\Sigma\Sigma\varphi\mathrm{E}DsDs_1$$
$$+ 2\varphi^{I}\left((\mu\xi - \lambda_1\alpha)\frac{\partial P}{\partial x_1} + (\mu\eta - \lambda_1\beta)\frac{\partial P}{\partial y_1} + (\mu\zeta - \lambda_1\gamma)\frac{\partial P}{\partial z_1}\right)D\omega D\omega_1$$
$$- 2\varphi^{I}\left((\mu\xi - \lambda\alpha_1)\frac{\partial P}{\partial x} + (\mu\eta - \lambda\beta_1)\frac{\partial P}{\partial y} + (\mu\zeta - \lambda\gamma_1)\frac{\partial P}{\partial z}\right)D\omega D\omega_1.$$

Hier sind unter $D\omega$, $D\omega_1$ die von den gegebenen unendlich kleinen Ringen begrenzten Flächen zu verstehen; ferner haben $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \xi, \eta, \zeta$ dieselben Bedeutungen wie früher [z. B. in (18.) und (25.)]; endlich repräsentiren λ, λ_1, μ die in (31.) genannten Ausdrücke.

Beispiel. Für P werde die Function $x - x_1$ genommen. Alsdann reducirt sich die Formel (32.) auf

$$(33.)\quad \begin{aligned} \Sigma\Sigma\varphi\mathrm{E}(x - x_1)DsDs_1 &= \varphi\Sigma\Sigma(x - x_1)\mathrm{E}DsDs_1 + (x - x_1)\Sigma\Sigma\varphi\mathrm{E}DsDs_1 \\ &\quad - 2\varphi^{I}[(\mu\xi - \lambda_1\alpha) + (\mu\xi - \lambda\alpha_1)]D\omega D\omega_1. \end{aligned}$$

Nun ist, wie aus einem frühern Satze (Zusatz II, pag. 428) sofort folgt:

(34.a) $$\Sigma\Sigma(x-x_1)\mathsf{E}DsDs_1 = 0.$$

Ferner wird, nach (18.) und mit Benutzung der Abkürzungen (31.):

(34.b) $$\Sigma\Sigma\varphi\mathsf{E}DsDs_1 = [4\varphi^{II}\lambda\lambda_1 - (4\varphi^{I} + 4R\varphi^{II})\mu]D\omega D\omega_1.$$

Substituirt man die Werthe (34.a, b) in (33.), und setzt man (ebenso wie früher) ξ für $(x-x_1)$, so ergiebt sich:

$$\Sigma\Sigma\varphi\mathsf{E}(x-x_1)DsDs_1 = \left\{\begin{array}{l}[4\varphi^{II}\lambda\lambda_1 - (4\varphi^{I} + 4R\varphi^{II})\mu]\xi \\ -4\varphi^{I}\mu\xi + 2\varphi^{I}(\lambda_1\alpha + \lambda\alpha_1)\end{array}\right\} D\omega D\omega_1,$$

oder anders geordnet:

(35.) $$\Sigma\Sigma\varphi\mathsf{E}(x-x_1)DsDs_1 = \left\{\begin{array}{l}2\varphi^{I}(\alpha\lambda_1 + \alpha_1\lambda) + 4\varphi^{II}\lambda\lambda_1\xi \\ -(8\varphi^{I} + 4R\varphi^{II})\mu\xi\end{array}\right\} D\omega D\omega_1;$$

eine Formel, welche, wie man augenblicklich erkennt, für den hier betrachteten Fall unendlich kleiner Ringe identisch ist mit der auf ganz anderem Wege gefundenen Formel (25.).

§. 4.

Ueber ein gewisses Integral, welches abhängt von einem Ringe und daneben von einem einzelnen Linienelemente.

Versteht man unter Ds die Elemente eines Ringes (s), ferner unter Δs_1 ein einzelnes Linienelement, welches (unabhängig vom Ringe) eine beliebige Lage im Raume besitzt, und versteht man endlich unter r, Θ, Θ_1, E die dem Paare Ds, Δs zugehörigen Ampère'schen Argumente, so gilt folgender Satz.

Achter Satz. Sollen zwei noch unbekannte Functionen $\varphi = \varphi(r)$ und $\psi = \psi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

(36.a) $$J = \Delta s_1 \,.\, \Sigma(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E})Ds$$

jederzeit verschwindet, welche Gestalt und Lage man dem Ringe (s) und dem einzelnen Element Δs_1 auch zuertheilen mag, — so ist erforderlich und ausreichend, dass φ, ψ durch die Relation

(36.b) $$\varphi = r\psi'$$

mit einander verbunden sind.

Beweis. Dass die genannte Bedingung $\varphi = r\psi'$ ausreichend ist, erkennt man sofort. Denn ist diese Bedingung erfüllt, so kann das vorgelegte Integral successive in folgende Formen versetzt werden:

$$J = \Delta s_1 . \Sigma(r\psi'\Theta\Theta_1 + \psi E) Ds ,$$

$$= - \Delta s_1 . \Sigma \left[r\psi' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} + \psi \left(\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} + r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} \right) \right] Ds ,$$

$$= - \Delta s_1 . \Sigma \left[(r\psi)' \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s_1} + r\psi \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1} \right] Ds ,$$

$$= - \Delta s_1 . \Sigma \frac{\partial}{\partial s} \left(r\psi \frac{\partial r}{\partial s_1} \right) Ds .$$

Es bleibt übrig nachzuweisen, dass jene Bedingung erforderlich ist. Zu diesem Zwecke haben wir anzunehmen, die Gleichung

$$\Delta s_1 \Sigma(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi E) Ds = 0$$

sei erfüllt für jedes beliebige Paar (s), Δs_1, und die Consequenzen aufzusuchen, welche aus dieser Annahme für φ, ψ resultiren. — Aus der eben genannten Annahme folgt sofort die Gleichung:

$$\Sigma\Sigma(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi E) Ds Ds_1 = 0 ,$$

als gültig für jedes beliebige Paar von Ringen (s), (s_1). Hieraus aber ergiebt sich, durch Anwendung des Satzes (23.a, b), augenblicklich, dass zwischen φ, ψ die Relation stattfindet:

$$\varphi = r\psi' ;$$

w. z. z. w.

§. 5.

Ueber gewisse Integrale, welche abhängen von zwei gegebenen Ringen und der denselben zuertheilten Bewegung.

Die in Folge einer solchen Bewegung während eines Zeitelements dt eintretenden Aenderungen mögen mit d bezeichnet sein; so dass also z. B. r, $r + dr$ diejenigen Werthe vorstellen, welche die gegenseitige Entfernung zweier Punkte x, y, z und x_1, y_1, z_1 der beiden Ringe zu den Zeiten t, $t + dt$ besitzt, während R, $R + dR$ die analogen Bedeutungen haben werden für das Quadrat der Entfernung.

Wir wollen annehmen, zwei unbekannte Functionen $\Phi = \Phi(r)$, $\Psi = \Psi(r)$ wären von solcher Beschaffenheit, dass das Integral

$$(37.)\qquad J = \Sigma\Sigma(\Phi\Theta\Theta + \Psi\mathrm{E})dRDsDs_1$$

für zwei starre Ringe von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung jederzeit verschwindet; und die Consequenzen aufsuchen, welche hieraus für jene unbekannten Functionen resultiren.

Denken wir uns vorläufig den Ring (s_1) festgehalten, den Ring (s) hingegen in einer beliebigen (theils fortschreitenden, theils drehenden) Bewegung begriffen, so werden die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 irgend zweier Punkte der beiden Ringe während der Zeit dt Zuwüchse erhalten, welche sich darstellen lassen durch:

$$(38.)\qquad \begin{aligned} dx &= da + zd\beta - yd\gamma, & dx_1 &= 0, \\ dy &= db + xd\gamma - zd\alpha, & dy_1 &= 0, \\ dz &= dc + yd\alpha - xd\beta, & dz_1 &= 0, \end{aligned}$$

wo da, db, dc, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ von einander unabhängig, und ebenso willkührlich sind, wie die dem Ringe zuertheilte Bewegung. Mit Rücksicht auf (38.) ergiebt sich nun:

$$(39.)\qquad \begin{aligned} dR &= 2[(x-x_1)d(x-x_1) + \ldots], \\ &= 2[(x-x_1)da + \ldots] - 2[(yz_1 - zy_1)d\alpha + \ldots]. \end{aligned}$$

Substituirt man diesen Ausdruck von dR in (37.), und beachtet, dass da, db, dc, $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ für sämmtliche Punkte des Ringes (s) einerlei Werthe haben, so erhält man:

$$(40.)\qquad J = (J_a da + J_b db + J_c dc) - (J_\alpha d\alpha + J_\beta d\beta + J_\gamma d\gamma),$$

wo J_a und J_α die Integrale repräsentiren:

$$\begin{aligned} J_a &= \Sigma\Sigma[(2\Phi\Theta\Theta_1 + 2\Psi\mathrm{E})(x-x_1)]DsDs_1, \\ J_\alpha &= \Sigma\Sigma[(2\Phi\Theta\Theta_1 + 2\Psi\mathrm{E})(yz_1 - zy_1)]DsDs_1, \end{aligned}$$

während J_b, J_c und J_β, J_γ von analoger Bedeutung sind. Führt man an Stelle von Φ eine etwas andere Function f ein, mit jener verbunden durch die Relation:

$$(41.)\qquad 2\Phi = 4Rf^{\mathrm{II}},$$

so können die Integrale J_a und J_α durch Anwendung der Formeln (14.) in folgende Gestalt versetzt werden:

$$(42.)\qquad J_a = \Sigma\Sigma[(2\Psi - 2f^{\mathrm{I}})\mathrm{E}(x-x_1)]DsDs_1,$$

$$(43.)\qquad J_\alpha = \Sigma\Sigma[(2\Psi - 2f^{\mathrm{I}})\mathrm{E}(yz_1 - zy_1) - f(\mathrm{B}\Gamma_1 - \Gamma\mathrm{B}_1)]DsDs_1,$$

wo A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 die Richtungscosinus von Ds, Ds_1 vorstellen.

Nach unserer Annahme ist das Integral J immer Null, wie beschaffen die beiden starren Ringe hinsichtlich ihrer Gestalt, Lage und Bewegung auch sein mögen. Gleiches gilt daher nach (40.), weil $da, db, dc, d\alpha, d\beta, d\gamma$ von einander unabhängige willkührliche Grössen sind, auch von $J_a, J_b, J_c, J_\alpha, J_\beta, J_\gamma$.

Es wird also z. B. das Integral J_a (42.) Null sein für jedes beliebige Paar von Ringen; ob dieselben starr oder biegsam sind kommt beim Integral J_a nicht weiter in Betracht, weil dasselbe die zeitlichen Differentiale d nicht enthält, also lediglich abhängt von der augenblicklichen Configuration. Aus diesem Verschwinden des Integrals J_a (42.) folgt nun durch Anwendung des Satzes (26.) sofort, dass

$$(44.) \qquad \Psi - f^{\mathrm{I}} = \text{Const., etwa} = C$$

ist.

Mit Rücksicht hierauf kann das Integral J_α (43.) so dargestellt werden:

$$(45.) \quad J_\alpha = 2C \,.\, \Sigma\Sigma \mathsf{E}(yz_1 - zy_1) Ds Ds_1 - \Sigma\Sigma f(\mathsf{B}\Gamma_1 - \Gamma\mathsf{B}_1) Ds Ds_1 .$$

Nun ist nach einer früher benutzten Formel (12.):

$$\Sigma\Sigma(yz_1 - zy_1)\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma R\,\frac{\partial^2(yz_1 - zy_1)}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1 ,$$

oder weil $\frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s_1} = -2\mathsf{E}$ (4.) ist:

$$-2\,\Sigma\Sigma(yz_1 - zy_1)\mathsf{E} Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma R(\mathsf{B}\Gamma_1 - \Gamma\mathsf{B}_1) Ds Ds_1 .$$

Substituirt man diesen Werth in (45.), so folgt sofort:

$$(46.) \quad \begin{aligned} J_\alpha &= -\Sigma\Sigma(CR + f)\,(\mathsf{B}\Gamma_1 - \Gamma\mathsf{B}_1) Ds Ds_1 ,\\ &= -\Sigma\Sigma(CR + f)\,(Dy Dz_1 - Dz Dy_1). \end{aligned}$$

Ebenso wie J_a, ebenso verschwindet auch J_α für jedes beliebige Paar von Ringen. Durch Anwendung eines früheren Satzes (17.) folgt daher aus (46.) sofort, dass

$$CR + f = \text{Const.}$$

ist; und hieraus folgt durch Differentiation nach R:

$$(47.) \qquad C + f^{\mathrm{I}} = 0.$$

Combinirt man diese Relation mit der in (44.) gefundenen:

$$\Psi - f^{\mathrm{I}} = C,$$

so erhält man augenblicklich

$$\Psi = 0 \quad \text{und} \quad f^1 \doteq -C,$$

oder mit Rückblick auf (41.)

(48.) $$\Psi = 0 \quad \text{und} \quad \Phi' = 0.$$

Dies sind die Consequenzen, zu welchen die ursprünglich über das Integral J (37.) gemachte Annahme hingeleitet hat.

Jenes Integral kann, weil $dR = 2rdr$ ist, auch so geschrieben werden:

$$J = \Sigma\Sigma'(2r\Phi\Theta\Theta_1 + 2r\Psi\mathsf{E})drDsDs_1.$$

Setzt man daher $2r\Phi = \varphi$ und $2r\Psi = \psi$, so gelangt man zu folgendem Resultat.

Neunter Satz. Sollen zwei noch unbekannte Functionen $\varphi = \varphi(r)$ und $\psi = \psi(r)$ von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

(49.) $$\Sigma\Sigma'(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E})drDsDs_1$$

für zwei starre Ringe von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung jederzeit verschwindet, so ist dazu erforderlich und ausreichend, dass φ und ψ identisch Null sind.

Um dieselbe Untersuchung durchführen zu können für das complicirtere Integral:

(50.) $$Y = \Sigma\Sigma'[(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathsf{E})dr + f\Theta d\Theta_1 + g\Theta_1 d\Theta + hd\mathsf{E}]DsDs_1,$$

wo φ, ψ, f, g, h fünf unbekannte Functionen von r vorstellen sollen, ist zu bemerken, dass dieses Integral auf die Form des früheren Integrals (49.) zurückgeführt werden kann. Vermittelst geeigneter Transformationen, von denen im folgenden §. die Rede sein wird, findet man nämlich:

(51.) $$Y = \Sigma\Sigma'\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right] drDsDs_1,$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

(52.a) $$\begin{aligned} L &= (\varphi + \psi) - (f' + g') + rh'', \\ M &= \qquad r\psi - (f + g) + rh', \end{aligned}$$

so dass also

(52.b) $$L - M' = \varphi - r\psi' - h'.$$

Geht man nun wiederum von der Voraussetzung aus, dass das Integral Y für starre Ringe von beliebiger Gestalt und Bewegung verschwindet, so folgt, durch Anwendung des Satzes (49.) sofort, dass L und M identisch Null sind. Mit Rücksicht auf die Bedeutungen von L, M (52.a, b) ergiebt sich daher folgender Satz.

Zehnter Satz. Sollen fünf unbekannte, nur von r abhängende Functionen φ, ψ, f, g, h von solcher Beschaffenheit sein, dass das Integral

$$\Sigma\Sigma\left[(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathrm{E})dr + f\Theta d\Theta_1 + g\Theta_1 d\Theta + hd\mathrm{E}\right]DsDs_1 \tag{53.}$$

für zwei starre Ringe von beliebiger Gestalt und beliebiger Bewegung jederzeit verschwindet, so ist erforderlich und ausreichend, dass jene Functionen durch die Relationen

$$\begin{aligned} r\psi &= (f + g) - rh', \\ r\psi' &= \varphi - h' \end{aligned} \tag{54.}$$

mit einander verbunden sind.

§. 6.

Fortsetzung. — Betrachtung solcher Ringe, welche biegsam und mit Gleitstellen versehen sind.

Es soll hier diejenige Transformation dargelegt werden, von welcher zu Ende des vorigen §. [beim Uebergang von (50.) zu (51.)] die Rede war. Für die Zwecke unserer späteren elektrodynamischen Untersuchungen wird es dabei zweckmässig sein, diese Transformation in allgemeineren Umrissen durchzuführen, nämlich anzunehmen, dass die betrachteten Ringe biegsam und ausserdem auch mit beliebig vielen Gleitstellen behaftet sind, so dass also bei einer Bewegung der Ringe nicht nur ihre räumliche Lage, sondern (in Folge der Biegsamkeit und der Gleitstellen) auch ihre Gestalt von Augenblick zu Augenblick sich ändert. — Wir beginnen mit einigen Hülfsätzen.

Hülfsatz I. Die zur Zeit t im Ringe (s) enthaltenen Elemente seien bezeichnet mit Ds; andrerseits aber seien diejenigen Elemente, welche (in Folge der Gleitstellen) während der Zeit dt in den Ring neu eintreten oder aus ihm ausscheiden, angedeutet durch Δs, und zwar der Art, dass

unter Δs die mit $(+1)$ multiplicirten Längen der *eintretenden*, hingegen die mit (-1) multiplicirten Längen der *ausscheidenden* Elemente zu verstehen sind. Ferner seien φ und ψ beliebige Functionen derjenigen Entfernung r, welche irgend ein Punkt des Ringes von einem gegebenen Centralpunkt O besitzt; endlich seien dr, $d\varphi$, $d\psi$ die der Zeit dt entsprechenden Zuwüchse *) von r, φ, ψ. — Alsdann gilt die Formel:

$$\Sigma' \frac{\partial(\varphi\, d\psi)}{\partial s} Ds = - \Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial s} \Delta s, \tag{55.}$$

wo die Summe rechter Hand aus *discreten* Gliedern besteht, und zwar aus ebenso vielen Gliedern, als Elemente Δs vorhanden sind.

Beweis. — Die einzelnen Theile, aus denen der Ring (s) besteht, mögen, wie sie in der für den Ring von Hause aus festgesetzten Umlaufrichtung aufeinander folgen, bezeichnet sein mit

$$A',\ A'',\ A''',\ A'''',\ \ldots\ldots$$

In derselben Richtung sind die Bogenlängen zu rechnen; s' auf A', s'' auf A'', u. s. w., und zwar von irgend welchen Anfangspunkten O', O'', ... aus, die auf den einzelnen Theilen A', A'', ... ein für allemal festgesetzt sind.

Wir betrachten insbesondere die Stelle

$$A',\ g,\ A'',$$

wo g den zwischen A' und A'' vorhandenen Gleitpunkt vorstellen soll, und denken uns in den Theil A' zwei Marken m' und M' eingeschnitten, welche die Lage des Gleitpunktes g zu den Zeiten t und $t + dt$ angeben; in gleicher Weise mögen die Lagen, welche jener Gleitpunkt g auf A'' zu den Zeiten t und $t + dt$ besitzt, ebenfalls durch zwei in A'' eingegrabene Marken m'' und M'' angedeutet sein. Sind s' und $s' + ds'$ die (auf A' gemessenen) Bogenlängen von m'

*) Denkt man sich den Ring (s) oder die einzelnen Theile, aus denen er besteht, materiell, etwa dargestellt durch ein System von Drähten, so ist unter jedem r die Entfernung eines bestimmten Molecüls von jenem Centralpunkt O zu verstehen; so dass also r und $r + dr$ diejenigen Entfernungen vorstellen, welche ein und dasselbe Molecül zu den Zeiten t und $t + dt$ von jenem Punkte O besitzt. Analoges gilt natürlich für φ und ψ.

und M', so wird ds', falls es positiv ist, ein während der Zeit dt neu in den Ring eintretendes Element vorstellen, hingegen, falls es negativ sein sollte, die mit (-1) multiplicirte Länge eines während der Zeit dt ausscheidenden Elementes repräsentiren. In beiden Fällen wird daher ds' mit $\Delta s'$ zu bezeichnen sein, zufolge des bei (55.) für Δ festgesetzten Gebrauches. Umgekehrt verhält es sich mit den (auf A'' gemessenen) Bogenlängen s'' und $s'' + ds''$ der Marken m'' und M''; man findet nämlich leicht, dass ds'' identisch ist mit $(-1)\Delta s''$. Demgemäss haben wir also die Formeln:

(56.)
$$ds' = + \Delta s',$$
$$ds'' = - \Delta s''.$$

Der Gleitpunkt g bewegt sich während der Zeit dt aus doppeltem Grunde, einmal weil er fortgetragen wird durch die dem Theile A' zuertheilte räumliche Bewegung, andrerseits, weil er gleichzeitig längs A' von der Marke m' zur Marke M' fortwandert. Sind daher g und G diejenigen Orte des Raumes, welche der Gleitpunkt g zu den Zeiten t und $t + dt$ occupirt, so wird die durch gG repräsentirte wirkliche Bewegung des Gleitpunktes in zwei partielle Bewegungen zerlegbar sein, von denen die erstere identisch ist mit der räumlichen Bewegung der Marke m', während die letztere dargestellt wird durch eine auf dem ruhenden A' von m' nach M' gehende Verschiebung. — Die Werthe, welche die Function ψ für die Marke m' zu den Zeiten t und $t + dt$ besitzt, sind zu bezeichnen mit ψ' und $\psi' + d\psi'$; andrerseits sind diejenigen Werthe, welche ψ im Augenblick t respective für m' und M' besitzt, zu bezeichnen mit ψ' und $\frac{\partial \psi'}{\partial s'} ds'$, wo ds' das früher [bei (56.)] besprochene Bogendifferential vorstellt. Die jenen beiden partiellen Bewegungen entsprechenden Zuwüchse von ψ sind also dargestellt durch

$$d\psi' \text{ und } \frac{\partial \psi'}{\partial s'} ds';$$

folglich wird der der totalen oder wirklichen Bewegung gG des Gleitpunktes entsprechende Zuwachs von ψ den Werth haben:

(57.a)
$$d\psi' + \frac{\partial \psi'}{\partial s'} ds'.$$

Ebenso ergiebt sich nun aber andrerseits durch eine an den Theil A'' angelehnte Betrachtung, dass dieser der wirklichen Bewe-

gung gG entsprechende Zuwachs von ψ auch ausgedrückt werden kann durch

$$(57.b) \qquad d\psi'' + \frac{\partial \psi''}{\partial s''} ds''.$$

Durch Gleichsetzung der beiderlei Ausdrücke (57.a, b) folgt sofort:

$$(57.c) \qquad d\psi' - d\psi'' = -\left(\frac{\partial \psi'}{\partial s'} ds' - \frac{\partial \psi''}{\partial s''} ds''\right),$$

eine Formel, welche mit Rücksicht auf (56.) auch so geschrieben werden kann:

$$(57.d) \qquad d\psi' - d\psi'' = -\left(\frac{\partial \psi'}{\partial s'} \Delta s' + \frac{\partial \psi''}{\partial s''} \Delta s''\right).$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir nun über zur eigentlichen Aufgabe. Das zu behandelnde Integral

$$(58.) \qquad J = \Sigma \frac{\partial(\varphi d\psi)}{\partial s} Ds$$

kann, indem man die Integration der Reihe nach über die einzelnen Theile A', A'', A''', A'''', ... hinerstreckt, und die Resultate dieser einzelnen Integrationen zusammenfasst, in folgende Form versetzt werden:

$$(59.) \qquad J = \mathfrak{S}(\varphi' d\psi' - \varphi'' d\psi''),$$

wo φ', $d\psi'$, φ'', $d\psi''$, ebenso wie in (57.a, b, c, d), die dem Gleitpunkte g oder vielmehr den Marken m', m'' entsprechenden Grössen vorstellen, und wo das Zeichen $\mathfrak{S}$ andeutet, dass mit $\varphi' d\psi' - \varphi'' d\psi''$ analoge Ausdrücke der Reihe nach für sämmtliche Gleitstellen des Ringes zu bilden, und alle diese Ausdrücke zu summiren sind. Da φ' und φ'' die Werthe von φ für die Marken m' und m'' zur Zeit t vorstellen, diese Marken zu jener Zeit aber mit einander coincidiren, so ist

$$(60.) \qquad \varphi' = \varphi'';$$

so dass man die Formel (59.) also auch so schreiben kann:

$$(61.) \qquad J = \mathfrak{S}\, \varphi'(d\psi' - d\psi''),$$

oder mit Rücksicht auf (57.d) auch so:

$$(62.) \qquad J = -\mathfrak{S}\, \varphi' \left(\frac{\partial \psi'}{\partial s'} \Delta s' + \frac{\partial \psi''}{\partial s''} \Delta s''\right),$$

oder mit abermaliger Rücksicht auf (60.) auch so:

(63.) $$J = -\mathfrak{S}\left(\varphi'\frac{\partial\psi'}{\partial s'}\Delta s' + \varphi''\frac{\partial\psi''}{\partial s''}\Delta s''\right),$$

wofür offenbar kürzer geschrieben werden kann:

(64.) $$J = -\mathfrak{S}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\Delta s\right).$$

Ersetzt man endlich das auf sämmtliche Δs sich beziehende Summenzeichen $\mathfrak{S}$ durch den Buchstaben Σ', so erhält man den in (55.) angegebenen Ausdruck; w. z. z. w.

Bemerkung. Für die Anwendbarkeit der Formel (55.) ist es offenbar vollkommen gleichgültig, ob der angenommene Centralpunkt O absolut fest liegt, oder in Bewegung begriffen ist. Ebenso erkennt man aus der für die Formel gegebenen Deduction sofort, dass man in ihr an Stelle von φ *jede beliebige längs des Ringes* (s) *stetige* Function zu nehmen befugt ist, einerlei ob dieselbe von r oder von irgend welchen andern Argumenten abhängt.

Es sei nun ausser (s) noch irgend ein zweiter Ring (s_1) gegeben, der ebenfalls biegsam, mit Gleitstellen versehen und in beliebiger Bewegung begriffen ist. Irgend eines von denjenigen Elementen, welche zur Zeit t im Ringe (s_1) enthalten sind, sei bezeichnet mit Ds_1. Alsdann können wir die Formel (55.)

$$\Sigma'\frac{\partial(\varphi d\psi)}{\partial s}Ds = -\Sigma'\varphi\frac{\partial\psi}{\partial s}\Delta s$$

in Anwendung bringen, indem wir unter den r diejenigen Entfernungen verstehen, welche die Elemente des Ringes (s) von jenem speciellen Elemente Ds_1 des Ringes (s_1) besitzen. Gleichzeitig können wir statt φ die ebenfalls längs (s) stetige Function

$$\varphi'\frac{\partial r}{\partial s_1} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial s_1}$$

eintreten *) lassen; so dass sich also ergiebt:

$$\Sigma'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}d\psi\right)Ds = -\Sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{\partial\psi}{\partial s}\Delta s.$$

---

*) Es würde nicht erlaubt sein, die Function $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ eintreten zu lassen; denn diese ist, falls der Ring (s) irgend welche Ecken besitzt, nicht mehr stetig längs (s), sondern in jeder Ecke mit einer Unstetigkeit behaftet.

Durch Multiplication dieser Formel mit Ds_1 und Integration über alle Ds_1 folgt sofort:

$$\Sigma\Sigma'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}d\psi\right)DsDs_1 = -\Sigma\Sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\frac{\partial\psi}{\partial s}\Delta s Ds_1,$$
$$= +\Sigma\Sigma'\varphi'\psi'\Theta\Theta_1\Delta sDs_1.$$

In solcher Weise gelangen wir zu folgendem Satz.

Hülfsatz II. Sind zwei biegsame und mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in irgend welchen Bewegungen begriffen, und versteht man unter φ und ψ beliebig gegebene Functionen von r, so finden die Formeln statt:

$$(65.a)\qquad \Sigma\Sigma'\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}d\psi\right)DsDs_1 = \Sigma\Sigma'\varphi'\psi'\Theta\Theta_1\Delta sDs_1,$$

$$(65.b)\qquad \Sigma\Sigma'\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}d\psi\right)DsDs_1 = \Sigma\Sigma'\varphi'\psi'\Theta\Theta_1Ds\Delta s_1.$$

Dabei ist Δs in dem bei (55.) angegebenem Sinne gebraucht zur Bezeichnung der während der Zeit dt in den Ring (s) eintretenden oder aus ihm ausscheidenden Elemente; und andrerseits Δs_1 in analogem Sinne gebraucht für den Ring (s_1).

Endlich mag noch folgender Hülfsatz hinzugefügt werden.

Hülfsatz III. Sind zwei biegsame und mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in irgend welchen Bewegungen begriffen, so findet immer die Formel statt:

$$(66.)\qquad \Sigma\Sigma'\frac{\partial^2(\varphi d\psi)}{\partial s\partial s_1}DsDs_1 = 0.$$

Hier sind wiederum unter φ, ψ beliebig gegebene Functionen von r zu verstehen.

Beweis. Versteht man unter F einen beliebigen durch die relative Lage zweier Elemente Ds und Ds_1 bedingten Ausdruck, so wird der Zuwachs, welchen das über die beiden in Bewegung begriffenen Ringe (s) und (s_1) ausgedehnte Integral

$$\Sigma\Sigma'FDsDs_1$$

während der Zeit dt erfährt, darstellbar sein durch:

$$(67.)\qquad d(\Sigma\Sigma'FDsDs_1) = \Sigma\Sigma'dFDsDs_1 + \Sigma\Sigma'F\Delta sDs_1 + \Sigma\Sigma'FDs\Delta s_1,$$

wo Δs und Δs_1 dieselben Bedeutungen haben wie in (65.a, b). Setzt man

(68.) $$F = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial s_1},$$

wo f eine nur von r abhängende Function vorstellen soll, so werden offenbar die Integrale

$$\Sigma\Sigma F Ds Ds_1, \qquad \Sigma F Ds, \qquad \Sigma F Ds_1$$

identisch Null; so dass in diesem Fall die Formel (67.) sich reducirt auf

(69.) $$0 = \Sigma\Sigma dF Ds Ds_1.$$

Diese Gleichung aber nimmt, falls man für F seine ihm zuertheilte Bedeutung (68.) wirklich substituirt, die Gestalt an:

(70.) $$0 = \Sigma\Sigma \frac{\partial^2 df}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1.$$

Hieraus folgt sofort der zu beweisende Satz (66.), wenn man die Function f mit den gegebenen Functionen φ, ψ durch die Relation $f' = \varphi\psi'$ verbunden denkt.

Wir kommen nun endlich zu derjenigen Transformation, für deren Begründung die vorangeschickten Hülfsätze erforderlich sind. Diese Transformation ist folgende.

Eilfter Satz. Befinden sich zwei biegsame und mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in irgend welchen Bewegungen, und versteht man unter φ, ψ, f, g, h beliebig gegebene nur von r abhängende Functionen, so kann das über jene Ringe ausgedehnte Integral

(71.a) $$Y = \Sigma\Sigma[(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathrm{E})dr + f\Theta d\Theta_1 + g\Theta_1 d\Theta + hd\mathrm{E}]Ds Ds_1$$

immer in die Form versetzt werden:

(71.b) $$Y = \Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] dr Ds Ds_1$$
$$+ \Sigma\Sigma[(rh' - f)\Theta\Theta_1 Ds\Delta s_1 + (rh' - g)\Theta\Theta_1\Delta s Ds_1],$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

(71.c) $$L = (\varphi + \psi) - (f' + g') + rh'',$$
$$M = r\psi \qquad - (f + g) + rh'.$$

Dabei sind Δs und Δs_1 in demselben Sinne gebraucht wie in (65.a, b).

Beweis. Nimmt man Rücksicht auf die Relationen (4.):

(72.a) $$\Theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \Theta_1 = -\frac{\partial r}{\partial s_1}, \quad \mathrm{E} = \Theta\Theta_1 - r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1},$$

und auf die hieraus fliessende Formel:

$$(72.b)\qquad dE = \Theta d\Theta_1 + \Theta_1 d\Theta - \frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1} dr - r\frac{\partial^2 dr}{\partial s\partial s_1},$$

so kann das vorgelegte Integral (71.a) so geschrieben werden:

$$(73.)\ Y = \Sigma\Sigma'\left[\left(\varphi\Theta\Theta_1 + E - h\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1}\right)dr - hr\frac{\partial^2 dr}{\partial s\partial s_1} + (f+h)\Theta d\Theta_1 + (g+h)\Theta_1 d\Theta\right] DsDs_1.$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$(74.)\qquad f = F',\quad g = G',\quad h = H',$$

so ergiebt sich mit Rücksicht auf (72.a) leicht:

$$(f+h)\Theta d\Theta_1 = -(f+h)\frac{\partial r}{\partial s}\cdot\frac{\partial dr}{\partial s_1} = -\frac{\partial(F+H)}{\partial s}\frac{\partial dr}{\partial s_1},$$

oder was dasselbe ist:

$$(\alpha.)\qquad (f+h)\Theta d\Theta_1 = -\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial(F+H)}{\partial s}dr\right) + \frac{\partial^2(F+H)}{\partial s\partial s_1}dr.$$

Analog ergiebt sich:

$$(\beta.)\qquad (g+h)\Theta_1 d\Theta = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(G+H)}{\partial s_1}dr\right) + \frac{\partial^2(G+H)}{\partial s\partial s_1}dr.$$

Ferner erhält man durch leichte Transformationen *):

$$(\gamma.)\qquad -hr\frac{\partial^2 dr}{\partial s\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial(rh)}{\partial s_1}dr\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial(rh)}{\partial s}dr\right) - \frac{\partial^2(hr.dr)}{\partial s\partial s_1} - \frac{\partial^2(hr)}{\partial s\partial s_1}dr.$$

Endlich wird mit Rücksicht auf (72.a):

$$(\delta.)\quad \left(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi E - h\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1}\right)dr = -\left[(\varphi+\psi)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} + (r\psi + h)\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1}\right]dr.$$

Substituirt man diese Werthe $(\alpha.)$, $(\beta.)$, $(\gamma.)$, $(\delta.)$ in der Formel (73.), so erhält man:

$$(75.)\qquad Y = \Sigma\Sigma'\left[U dr + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial V}{\partial s}dr\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial s_1}dr\right) - \frac{\partial^2(hr.dr)}{\partial s\partial s_1}\right] DsDs_1,$$

wo U, V, W die Bedeutungen haben:

$$(76.)\qquad U = \frac{\partial^2(F + G + 2H - hr)}{\partial s\partial s_1} - (\varphi+\psi)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} - (\psi r + h)\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s_1},$$

---

*) Es ist nämlich identisch:

$$P\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1} - Q\frac{\partial^2 P}{\partial s\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(Q\frac{\partial P}{\partial s}\right),$$
$$= \frac{\partial}{\partial s}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s}\right) - \frac{\partial^2(PQ)}{\partial s\partial s_1},$$

oder falls man das erste Glied linker Hand auf die rechte Seite wirft:

$$-Q\frac{\partial^2 P}{\partial s\partial s_1} = \frac{\partial}{\partial s}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s_1}\right) + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(P\frac{\partial Q}{\partial s}\right) - \frac{\partial^2(PQ)}{\partial s\partial s_1} - P\frac{\partial^2 Q}{\partial s\partial s_1}.$$

Setzt man hier aber hr für Q und dr für P, so erhält man die obige Formel $(\gamma.)$.

(77.) $V = rh - F - H\,, \qquad W = rh - G - H.$

Da f, g, h, F, G, H, also auch V, W lediglich von r abhängen, so folgt durch Anwendung der Sätze (65.a. b) und (66.) sofort:

$$\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial V}{\partial s} dr\right) Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma V' \Theta\Theta_1 Ds \Delta s_1\,,$$

$$\Sigma\Sigma \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial W}{\partial s_1} dr\right) Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma W' \Theta\Theta_1 \Delta s Ds_1\,,$$

$$\Sigma\Sigma \frac{\partial^2 (hr \cdot dr)}{\partial s \partial s_1} Ds Ds_1 = 0\,;$$

so dass also die Formel (75.) übergeht in:

(78.) $Y = \Sigma\Sigma U dr Ds Ds_1 + \Sigma\Sigma (V'\Theta\Theta_1 Ds \Delta s_1 + W'\Theta\Theta_1 \Delta s Ds_1)\,.$

Nun findet man durch weitere Entwickelung des Werthes von U (76.) und mit Rücksicht auf (74.):

$$U = -L \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s_1} - M \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s_1}\,,$$

oder [was dasselbe ist, vergl. (72.a)]:

(79.a) $U = \left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\,,$

wo L, M die Bedeutungen haben:

(79.b) $$\begin{aligned} L &= (\varphi + \psi) - (f' + g') + rh''\,, \\ M &= r\psi \qquad - (f + g) + rh'\,. \end{aligned}$$

Andrerseits ergiebt sich aus (77.) mit Rücksicht auf (74.):

(79.c) $V' = rh' - f\,,$

(79.d) $W' = rh' - g\,.$

Denkt man sich endlich die Werthe (79.a, b, c, d) in die Formel (78.) substituirt, so wird diese identisch sein mit der in (71.b, c) angegebenen; w. z. z. w.

Zwölfter Satz. Befinden sich zwei biegsame und mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in willkührlichen Bewegungen, und sollen die noch unbekannten, nur von r abhängenden Functionen φ, ψ, f, g, h von solcher Beschaffenheit sein, dass das über die Ringe ausgedehnte Integral

(80.a) $Y = \Sigma\Sigma[(\varphi\Theta\Theta_1 + \psi\mathrm{E})dr + f\Theta d\Theta_1 + g\Theta_1 d\Theta + hd\mathrm{E}]\, Ds Ds_1$

während jener Bewegungen fortdauernd Null bleibt, so ist

erforderlich und ausreichend, dass φ, ψ, f, g, h durch die Relationen

(80.b) $$\varphi = f', \qquad \psi = h', \qquad f = g = rh'$$

mit einander verbunden sind.

Beweis. Das vorgelegte Integral Y kann durch Anwendung der Transformation (71.a, b, c) in folgende Gestalt versetzt werden:

(81.) $$Y = U + \Sigma(V\Delta s) + \Sigma(W\Delta s_1),$$

wo U, V, W gewisse Integrale vorstellen, die nur noch von den Ds, Ds_1 abhängen, hingegen unabhängig sind von den Δs, Δs_1.

Zu den willkührlichen Bewegungen der beiden Ringe (s) und (s_1) gehören auch solche, bei denen die Δs, Δs_1 sämmtlich Null sind, bei denen die Ringe sich also der Art verhalten, als wären Gleitstellen nicht vorhanden, ferner auch solche, bei denen die Δs, Δs_1 alle verschwinden mit Ausnahme eines einzigen Δs, oder mit Ausnahme eines einzigen Δs_1. Soll also das Y (81.) jederzeit Null sein, so ist dazu erforderlich, dass die Ausdrücke

(82.) $$U, \qquad V\Delta s, \qquad W\Delta s_1,$$

einzeln genommen, jederzeit Null sind; und selbstverständlich ist solches für den genannten Zweck auch ausreichend.

Nach (71.a, b, c) haben die Ausdrücke (82.) aber folgende Werthe:

(83.a) $$U = \Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] dr Ds Ds_1,$$

(83.b) $$V\Delta s = \Delta s \,.\, \Sigma(rh' - g)\Theta\Theta_1 Ds_1,$$

(83.c) $$W\Delta s_1 = \Delta s_1 \,.\, \Sigma(rh' - f)\Theta\Theta_1 Ds,$$

wo L, M die Aggregate bezeichnen:

(84.) $$\begin{aligned} L &= (\varphi + \psi) - (f' + g') + rh'', \\ M &= r\psi \qquad\quad - (f + g) + rh'. \end{aligned}$$

Die zum jederzeitigen Verschwinden von Y erforderlichen und ausreichenden Bedingungen sind daher folgende:

(α.) . . . . . Das Integral U (83.a) muss verschwinden für jedes beliebige Paar von Ringen (s), (s_1);

(β.) . . . . . Das Integral $V\Delta s$ (83.b) muss verschwinden für jedes beliebige Paar Δs, (s_1), d. i. für jeden Ring (s_1) und jedes daneben angenommene Linienelement Δs;

(γ.) . . . . . Das Integral $W\Delta s_1$ (83.c) muss verschwinden für jedes beliebige Paar Δs_1, (s).

Die Bedingung (α.) ist, wie aus dem Satze (49.) sich leicht ergiebt, äquivalent mit den beiden Bedingungen $L = 0$, $M = 0$, also nach (84.) äquivalent mit den Bedingungen:

$$(85.\alpha)\qquad \begin{aligned}(\varphi + \psi) - (f' + g') + rh'' &= 0,\\ r\psi - (f + g) + rh' &= 0.\end{aligned}$$

Andrerseits sind die Bedingungen (β.) und (γ.), nach Satz (36.a, b), äquivalent mit den beiden Bedingungen:

$$(85.\beta, \gamma)\qquad \begin{aligned}rh' - g &= 0,\\ rh' - f &= 0.\end{aligned}$$

Soll also das vorgelegte Integral Y für willkührliche Bewegungen der beiden Ringe jederzeit verschwinden, so ist dazu erforderlich und ausreichend, dass φ, ψ, f, g, h durch die Relationen (85.α, β, γ) mit einander verbunden sind. Diese Relationen aber sind, wie leicht zu übersehen ist, äquivalent mit den in (80.b) angegebenen. Somit ist der vorgelegte Satz bewiesen.

Zweiter Abschnitt.

Ueber das allgemeine Princip der lebendigen Kraft.

§. 1.

Die ponderomotorischen Fundamentalgleichungen.

Sind x, y, z und x', y', z' die Coordinaten und Geschwindigkeiten eines ponderablen Massenelementes DM, so pflegt man die der Zeit dt entsprechenden Geschwindigkeitszuwüchse dx', dy', dz' in folgender Weise auszudrücken:

$$(1.a)\qquad dx' = \frac{X.dt}{DM}, \quad dy' = \frac{Y.dt}{DM}, \quad dz' = \frac{Z.dt}{DM}.$$

Die hiedurch definirten X, Y, Z heissen die Componenten der auf DM ausgeübten ponderomotorischen Kraft, bezogen auf die Zeiteinheit; so dass also Xdt, Ydt, Zdt zu bezeichnen sind als die Componenten der während des Zeitelementes ausgeübten Kraft.

Setzt man

(1.b) $$T = DM\frac{x'x'+y'y'+z'z'}{2},$$

so folgt aus (1.a) durch bekannte Operationen:

(1.c) $$\begin{aligned} dT &= (Xx' + Yy' + Zz')dt, \\ &= Xdx + Ydy + Zdz. \end{aligned}$$

Dieses dT oder $Xdx + Ydy + Zdz$ ist nach Belieben als neu entstandene lebendige Kraft oder als eine gewisse Arbeit aufzufassen, und wird daher (genauer ausgedrückt) als dasjenige Quantum lebendiger Kraft oder ponderomotorischer Arbeit zu bezeichnen sein, welches in der Masse DM während der Zeit dt von der Kraft X, Y, Z hervorgebracht ist.

Das Quantum dT ist in Bezug auf X, Y, Z linear, und kann also, falls die Kraft X, Y, Z aus irgend welchen partiellen Kräften X_k, Y_k, Z_k zusammengesetzt ist, in ebenso viele entsprechende Theile $(dT)_k$ zerlegt werden:

(1.d) $$\begin{aligned} (dT)_k &= (X_k x' + Y_k y' + Z_k z')dt, \\ &= X_k dx + Y_k dy + Z_k dz. \end{aligned}$$

Alsdann repräsentiren dT und $(dT)_k$ diejenigen Quanta lebendiger Kraft oder ponderomotorischer Arbeit, welche im Elemente DM während der Zeit dt respective durch die totale Kraft X, Y, Z und durch die partielle Kraft X_k, Y_k, Z_k hervorgerufen sind.

Die Formeln (1.a) sind gültig für ein absolut festes Coordinatensystem, und sind daher (wie aus den Formeln selber durch Transformation folgt) nicht mehr gültig für ein in Bewegung begriffenes Coordinatensystem. Gleiches gilt offenbar von den übrigen Formeln (1.b, c, d).

§. 2.

Die elektromotorischen Fundamentalgleichungen.

Es seien u, v, w die elektrischen Strömungen an irgend einer Stelle x, y, z eines gegebenen Körpers, folglich $u\,Da\,dt$, $v\,Db\,dt$, $w\,Dc\,dt$ diejenigen Quantitäten elektrischer Materie, welche an jener Stelle durch drei gegen die Coordinatenaxen senkrechte Flächenelemente Da, Db, Dc während der Zeit dt hindurchfliessen. Alsdann pflegt man die Grössen $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$ in folgender Weise auszudrücken:

(2.a) $u\,dt = k\mathfrak{X}dt, \qquad v\,dt = k\mathfrak{Y}dt, \qquad w\,dt = k\mathfrak{Z}dt,$

wo k die elektrische Leitungsfähigkeit des Körpers vorstellt. Die hiedurch definirten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ heissen die Componenten der im Punkte x, y, z vorhandenen elektromotorischen Kraft, bezogen auf die Zeiteinheit, so dass also $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ die Componenten der während des Zeitelementes ausgeübten Kraft zu nennen sind.

Denkt man sich an der Stelle x, y, z im Innern des Körpers ein unendlich kleines Volumen DV abgegrenzt, und setzt man:

(2.b) $$dQ = \frac{(u^2+v^2+w^2)DVdt}{k},$$

so folgt aus (2.a) sofort:

(2.c) $$dQ = (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\,DVdt,$$
$$= \mathfrak{P}i\,DVdt,$$

wo i die Strömung selber (also die Resultante von u, v, w), und $\mathfrak{P}$ die Componente der Kraft $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nach der Richtung von i vorstellt.

Die Grösse dQ (2.b) repräsentirt, nach dem Joule'schen Gesetz, dasjenige Wärmequantum, welches im Volumen DV während der Zeit dt in Folge der elektrischen Strömung u, v, w oder (was dasselbe) in Folge der Kraft $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ sich entwickelt.

Das Quantum dQ ist, nach (2.c), in Bezug auf $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ linear, und kann daher, falls die Kraft $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ aus irgend welchen partiellen Kräften $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ zusammengesetzt ist, in ebenso viele entsprechende Theile $(dQ)_h$ zerlegt werden:

(2.d) $$(dQ)_h = (\mathfrak{X}_h u + \mathfrak{Y}_h v + \mathfrak{Z}_h w)\,DVdt,$$
$$= \mathfrak{P}_h i\,DVdt.$$

Alsdann repräsentiren dQ und $(dQ)_h$ diejenigen Wärmequantitäten, welche im Volumen DV während der Zeit dt respective durch die totale Kraft $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und durch die partielle Kraft $\mathfrak{X}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{Z}_h$ hervorgebracht werden.

Die Formeln (2.a) sind gültig für ein mit dem Körper starr verbundenes Coordinatensystem, und sind (wie aus jenen Formeln selber durch Transformation folgt) ebenso auch noch gültig für ein Coordinatensystem, dessen relative Lage zum Körper von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändert. Analoges gilt offenbar von den Formeln (2.b, c, d).

§. 3.

Die gegenseitige Beziehung zwischen den elektrischen Strömungen und Ladungen.

Finden in einem gegebenen Körper elektrische Strömungen statt, so werden hiedurch die elektrischen Ladungen der einzelnen Elemente des Körpers von Augenblick zu Augenblick geändert werden. Der gegenseitige Zusammenhang zwischen den Componenten u, v, w jener Strömungen und zwischen den Dichtigkeiten ε, $\bar{\varepsilon}$ dieser Ladungen drückt sich, wie schon Kirchhoff gezeigt hat, durch folgende Formeln aus:

$$(3.a) \qquad \frac{d\varepsilon}{dt} = -\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right],$$

$$(3.b) \qquad \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = -\left[u \cos(N,x) + v \cos(N,y) + w \cos(N,z)\right].$$

Die Formel (3.a) bezieht sich auf irgend eine Stelle x, y, z im Innern des Körpers, und auf die daselbst vorhandene räumliche Dichtigkeit ε der elektrischen Materie. Andrerseits bezieht sich die Formel (3.b) auf irgend eine Stelle der Oberfläche des Körpers, und auf die daselbst vorhandene Flächendichtigkeit $\bar{\varepsilon}$ der elektrischen Materie. Dabei ist zu bemerken, dass diese letztere Formel, in welcher N die innere Normale der genannten Oberfläche bezeichnet, nur dann gültig sein wird, wenn der Körper umgeben ist von einem isolirenden Medium.

§. 4.

Determination des zu betrachtenden materiellen Systemes.

Es sei gegeben ein System von Körpern $A, B, C, \ldots$, welche in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge (Ladungen und Strömungen) stattfinden.

Das System sei so eingerichtet, dass zwischen den ponderablen Massenelementen keine Reibungen eintreten können, weder äussere noch innere. Demgemäss wird z. B. anzunehmen sein, dass die Körper $A, B, C, \ldots$ im Laufe ihrer Bewegung niemals zusammenstossen (oder in Berührung kommen), und dass jeder einzelne Körper ein sogenannter fester Körper ist.

Ferner sei das System so eingerichtet, dass in demselben keine contact-elektrischen Kräfte auftreten können; es mag also angenommen werden, dass jeder einzelne Körper aus homogenem Metalle besteht.

Endlich sei jeder von den Körpern A, B, C, ... umschlossen von einer elektrisch-isolirenden Hülle, und von Hause aus beladen mit irgend welcher Elektricitätsmenge.

Der Reihe nach werden wir nun den Anfangszustand, die einwirkenden Kräfte und Wärmequellen, endlich die Parameter und die charakteristischen Argumente des Systems zu besprechen haben.

I. Der Anfangszustand des Systemes, entsprechend der Zeit $t = 0$.

Derselbe sei willkührlich gegeben; so dass zur Zeit 0 nicht nur jeder Körper eine beliebige Lage und Geschwindigkeit hat, sondern auch im Innern eines jeden Körpers beliebige elektrische Ladungen und Strömungen vorhanden sind, verschieden an verschiedenen Stellen des Körpers.

II. Die inneren Kräfte, bezeichnet mit [J].

Die inneren Kräfte des Systemes A, B, C, ... zerfallen nach ihrem Ursprung (d. i. nach ihrer Entstehungsweise) in drei Gattungen.

1) Die inneren Kräfte ordinären Ursprungs [J, ord. Us] sind dargestellt durch die den ponderablen Massenelementen inhärenten Kräfte, also dargestellt durch die Gravitationskräfte, mit denen je zwei solche Elemente (nach Art der Himmelskörper, nach dem Newton'schen Gesetz) auf einander wirken, dazu gerechnet diejenigen Cohäsionskräfte, durch welche die Elemente jedes einzelnen Körpers fest an einander gefügt sind.

2) Die inneren Kräfte elektrostatischen Ursprungs [J, elst. Us] sind diejenigen (theils pondero- theils elektromotorischen) Kräfte, welche ihre Entstehung verdanken den elektrischen Ladungen.

3) Die inneren Kräfte elektrodynamischen Ursprungs [J, eldy. Us] sind diejenigen, welche herrühren von den elektrischen Strömungen, [also die Kräfte (a.) und (f.) pag. 419].

III. Die äusseren Kräfte, bezeichnet mit $[A]$.

Zur Disposition mögen uns Kräfte stehen, die wir von Aussen her auf das gegebene System A, B, C, ... nach Belieben einwirken zu lassen im Stande sind; und zwar mögen dieselben ebenfalls dreierlei Gattung sein.

1) Die äusseren Kräfte ordinären Ursprungs [A, ord. Us] seien dargestellt durch irgend welche Fäden, die an den einzelnen Körpern befestigt sind, und an denen von Aussen her beliebig gezogen werden kann.

2) Die äusseren Kräfte elektrostatischen Ursprungs [A, elst. Us] seien dargestellt durch irgend welche Conductoren, die wir (etwa vermittelst einer Reibungs-Elektrisirmaschine) beliebig laden, und dem gegebenen System beliebig nähern können.

3) Die äusseren Kräfte elektrodynamischen Ursprungs [A, eldy. Us] mögen dargestellt sein durch die Schliessungsdrähte galvanischer Batterien; denn es sei uns gestattet, diese Schliessungsdrähte dem gegebenen System beliebig zu nähern, und gleichzeitig die in diesen Drähten vorhandenen Stromintensitäten durch Verstärkung jener Batterien beliebig zu steigern.

IV. Die äusseren Wärmequellen, bezeichnet mit $[\alpha]$.

Zur Disposition mögen uns ferner stehen äussere Wärmequellen, d. i. irgend welche Körper von beliebigen Temperaturen; es sei uns nämlich gestattet, diese Wärmequellen $[\alpha]$ mit den Körpern des gegebenen Systems in Contact zu bringen, und in solcher Weise zu beliebigen Zeiten beliebige (positive oder negative) Wärmequantitäten in die einzelnen Körper hineinzuleiten.

V. Die Parameter des Systemes.

Die räumliche Lage eines jeden Körpers ist analytisch ausdrückbar durch sechs Parameter. Diese Parameter mögen für alle Körper A, B, C, ... zusammengenommen bezeichnet sein mit π', π'', ...

VI. Die charakteristischen Constanten und Variablen des Systemes.

Unter den charakteristischen Argumenten des Systems mögen alle diejenigen Grössen verstanden werden, deren numerische Angabe erforderlich sein würde, falls die Beschaffenheit des Systemes

für irgend einen Zeitaugenblick in erschöpfender Weise dargelegt werden sollte. Diese Argumente zerfallen in zwei Gattungen. Die einen sind constant, nämlich im augenblicklichen Zustande des Systems von genau denselben Werthen, wie in allen übrigen; die andern sind variabel, und haben also im augenblicklichen Zustande andere Werthe als früher oder später. Die erstern mögen die charakteristischen Constanten, die letztern die charakteristischen Variablen des Systems heissen.

Zu den charakteristischen Constanten des Systems $A, B, C, \ldots$ gehören die ponderablen Massen der einzelnen Körper, ferner die Elektricitätsmengen, mit welchen diese (von isolirenden Hüllen umschlossenen) Körper von Hause aus beladen sind, u. s. w.

Zu den charakteristischen Variablen des Systems $A, B, C, \ldots$ gehören die Parameter $\pi', \pi'', \ldots$, ferner die in den einzelnen Elementen eines jeden Körpers vorhandenen elektrischen Ladungen und Strömungen, sowie die in ihnen vorhandenen Temperaturen, u. s. w.

§. 5.

Die in dem gegebenen System während eines Zeitelementes hervorgebrachten Quanta von lebendiger Kraft und Wärme.

Das System $A, B, C, \ldots$ befinde sich (während wir die besprochenen äusseren Kräfte und Wärmequellen in beliebiger Weise einwirken lassen) in irgend welcher Bewegung. Die Körper $A, B, C, \ldots$ mögen zerlegt gedacht werden in unendlich kleine Elemente. Irgend ein solches Element sei seiner ponderablen Masse nach mit DM_0, und seinem Volumen nach mit DV_0 bezeichnet.

Ist T_0 die augenblickliche lebendige Kraft von DM_0, und dT_0 ihr Zuwachs während der Zeit dt, so wird nach (1.c):

$$(4.) \qquad dT_0 = X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + Z_0 dz_0,$$

wo dx_0, dy_0, dz_0 die Verrückung von DM_0, und X_0, Y_0, Z_0 die auf DM_0 einwirkende ponderomotorische Kraft bezeichnen. Denkt man sich diese Formel (4.) der Reihe nach hingestellt für alle Elemente DM_0 des Systemes, und alle diese Formeln summirt, so erhält man:

$$(5.) \qquad dT = \Sigma dT_0,$$

wo dT denjenigen Zuwachs bezeichnet, welchen die lebendige Kraft T des ganzen Systemes während der Zeit dt erfährt.

Die auf DM_0 ausgeübte ponderomotorische Kraft zerfällt, entsprechend der früher getroffenen Eintheilung $[J]$, $[A]$, (pg. 455), in zwei Kräfte, von denen die eine den $[J]$, die andere den $[A]$ zugehört. Demgemäss zerfällt der in Bezug auf X_0, Y_0, Z_0 lineare Ausdruck dT_0 (4.) in zwei entsprechende Theile, und ebenso also auch dT (5.). Diese Zerlegungen seien angedeutet durch:

$$(6.) \qquad dT_0 = (dT_0)_J + (dT_0)_A,$$

$$(7.) \qquad dT = (dT)_J + (dT)_A.$$

Die augenblickliche Temperatur ϑ_0 des Elementes DM_0 verändert sich während der Zeit dt im Allgemeinen aus zweifachem Grunde; einerseits, weil während dieser Zeit im Innern des Elementes eine gewisse Wärmemenge dQ_0 durch die in ihm vorhandenen elektrischen Strömungen erzeugt wird, andrerseits auch deswegen, weil während der Zeit dt ein gewisses Wärmequantum dQ_{00} in das Element aus seiner Umgebung hineinfliesst. Die in Rede stehende Temperaturzunahme $d\vartheta_0$ besitzt daher den Werth:

$$(8.) \qquad d\vartheta_0 = \frac{dQ_0 + dQ_{00}}{DM_0 \, . \, c(\vartheta_0)},$$

wo $c(\vartheta_0)$ die sogenannte specifische Wärme desjenigen Metalls vorstellt, aus welchem DM_0 besteht. Aus (8.) folgt:

$$(9.) \qquad DM_0 \, . \, c(\vartheta_0) d\vartheta_0 = dQ_0 + dQ_{00},$$

oder auch:

$$(10.) \qquad d(DM_0 \, . \, C(\vartheta_0)) = dQ_0 + dQ_{00},$$

wo $C(\vartheta)$ für $\int c(\vartheta) \, . \, d\vartheta$ steht.

Summirt man die Formel (10.) über sämmtliche Elemente DM_0 des gegebenen Systems A, B. C, . . ., so erhält man:

$$(11.) \qquad d\,\Sigma(DM_0 \, . \, C(\vartheta_0)) = \Sigma dQ_0 + \Sigma dQ_{00}.$$

Offenbar ist ΣdQ_0 identisch mit derjenigen Wärmemenge dQ, welche im ganzen System durch die elektrischen Strömungen während der Zeit dt erzeugt worden ist, andrerseits ΣdQ_{00} identisch mit derjenigen Wärmemenge $(dQ)_\alpha$, welche während dieser Zeit aus den äusseren Wärmequellen $[\alpha]$ in das System hineingeflossen ist; so dass man also schreiben kann:

$$(12.) \qquad d\,\Sigma(DM_0 \, . \, C(\vartheta_0)) = dQ + (dQ)_\alpha.$$

Nun ist nach (2.c)

$$(13.)\qquad dQ_0 = (\mathfrak{X}_0 u_0 + \mathfrak{Y}_0 v_0 + \mathfrak{Z}_0 w_0)\, DV_0 dt,$$

wo DV_0 das Volumen von DM_0, und u_0, v_0, w_0 die in DM_0 vorhandenen elektrischen Strömungen bezeichnen, während unter $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ die in irgend einem Punkte von DV_0 vorhandene elektromotorische Kraft zu verstehen ist. Diese Kraft $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ zerfällt, entsprechend der früher getroffenen Eintheilung $[J]$, $[A]$, (pag. 455), in zwei Kräfte, von denen die eine den $[J]$, die andere den $[A]$ zugehört. Demgemäss zerfällt der in Bezug auf $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{Y}_0$, $\mathfrak{Z}_0$ lineare Ausdruck dQ_0 in zwei entsprechende Theile, und ebenso also auch der Ausdruck:

$$(14.)\qquad dQ = \Sigma' dQ_0 .$$

Diese Zerlegungen mögen angedeutet sein durch:

$$(15.)\qquad dQ_0 = (dQ_0)_J + (dQ_0)_A ,$$

$$(16.)\qquad dQ = (dQ)_J + (dQ)_A .$$

Aus (7.), (12.) und (16.) ergeben sich schliesslich die Formeln:

$$(17.)\qquad \begin{aligned} dT &= (dT)_J + (dT)_A , \\ d\,\Sigma(DM_0 . C(\vartheta_0)) &= (dQ)_J + (dQ)_A + (dQ)_\alpha , \end{aligned}$$

deren linke Seiten vollständige Differentiale sind. Was die rechten Seiten betrifft, so repräsentiren $(dT)_J$ und $(dT)_A$ diejenigen Quanta lebendiger Kraft, welche im gegebenen System während der Zeit dt hervorgebracht sind respective durch die Kräfte $[J]$ und $[A]$; und ebenso repräsentiren $(dQ)_J$, $(dQ)_A$ und $(dQ)_\alpha$ diejenigen Wärmequanta, welche während der Zeit dt im Systeme entstanden sind respective durch die Kräfte $[J]$, durch die Kräfte $[A]$, und durch die äussern Wärmequellen $[\alpha]$.

Um für lebendige Kraft und Wärme eine Collectivbenennung zu gewinnen, mag (nach dem Vorgange namhafter Physiker) erstere als kinetische, letztere als thermische Energie bezeichnet sein. Alsdann repräsentirt

$$(18.)\qquad (dT)_J + (dQ)_J$$

dasjenige Quantum von (theils kinetischer, theils thermischer) Energie, welches während der Zeit dt im Systeme durch die inneren Kräfte $[J]$ hervorgebracht ist; und andrerseits

(19.) $$(dT)_A + (dQ)_A + (dQ)_\alpha$$

dasjenige Quantum von Energie, welches während jener Zeit dem System von Aussen her, theils durch die Kräfte $[A]$ theils durch die Wärmequellen $[\alpha]$, zugeführt worden ist.

Von den gefundenen Formeln (17.) wird sofort Gebrauch gemacht werden.

§. 6.

Das Princip oder Axiom der lebendigen Kraft.

Wir gehen aus von folgenden Grundsätzen:

(20.a) . . . Erster Grundsatz. Dasjenige Quantum von kinetischer und thermischer Energie, welches dem gegebenen System von Aussen her zuzuführen ist, damit dasselbe, von einem gegebenem Anfangszustande aus, eine gegebene Reihe von Zuständen durchläuft, ist lediglich abhängig von der Beschaffenheit dieser Zustände.

(20.b) . . . Zweiter Grundsatz. Dasjenige Quantum von kinetischer und thermischer Energie, welches dem Systeme von Aussen her zuzuführen ist, damit dasselbe, von einem gegebenem Anfangszustande aus, irgend welche Reihe von Zuständen durchlaufe, schliesslich aber in jenen anfänglichen Zustand wieder zurückkehre, ist immer gleich Null.

Die charakteristischen Constanten und Variablen des Systemes (p. 456) seien bezeichnet, die einen mit c', c'', . . ., die andern mit α, β, . . . Gegeben seien zwei unendlich wenig von einander verschiedene Zustände $(\alpha, \beta, . .)$ und $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, . .)$, mit einander verbunden durch die Zwischenzustände $(\alpha + nd\alpha, \beta + nd\beta, . .)$, wo n eine von 0 bis 1 wachsende Zahl vorstellt.

Wir nehmen an durch geeignete Verwendung und Regulirung der uns zur Disposition stehenden äusseren Kräfte und Wärmequellen $[A]$ und $[\alpha]$ sei es möglich, das System zunächst in den Zustand $(\alpha, \beta, . .)$ zu versetzen, und sodann dasselbe aus diesem Zustande längs des Weges $(\alpha + nd\alpha, \beta + nd\beta, . .)$ übergehen zu lassen in den Zustand $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, . .)$; zugleich sei $d\mathsf{E}$ dasjenige Quantum von theils kinetischer theils thermischer Energie, welches dem Systeme während des eben genannten Ueberganges von Aussen her zuzuführen ist. Dieses Quantum $d\mathsf{E}$ kann, nach dem Grundsatz (20.a), nur abhängig sein von der Beschaffenheit der während der Zeit dt

durchlaufenen Zustände, und kann also, weil die Beschaffenheit dieser Zustände durch Angabe von $\alpha, \beta, .., d\alpha, d\beta, .., c', c'', ..$ in erschöpfender Weise dargelegt ist (vergl. pag. 456), nur abhängig sein von den Grössen $\alpha, \beta, .., d\alpha, d\beta, .., c', c'', ..$ Solches sei angedeutet durch die Formel:

$$(21.)\qquad dE = f(\alpha, \beta, .., d\alpha, d\beta, .., c', c'', ..).$$

Hieraus folgt durch Entwicklung nach dem Taylor'schen Satz:

$$(22.)\qquad dE = f(\alpha, \beta, .., 0, 0, .., c', c'', ..) + A d\alpha + B d\beta + \ldots,$$

wo die $A, B, ..$ nur noch abhängig sind von den $\alpha, \beta, ..$ und den $c', c'', \ldots$

Der Formel (22.) zufolge repräsentirt der dort vorhandene erste Term

$$(23.)\qquad f(\alpha, \beta, .., 0, 0, .., c', c'', ..)$$

denjenigen Werth, welchen dE annehmen würde für $d\alpha = d\beta = \ldots = 0$, also dasjenige Quantum von Energie, welches dem System von Aussen her zuzuführen ist, um dasselbe aus dem Zustande $(\alpha, \beta, ..)$ übergehen zu lassen in eben denselben Zustand $(\alpha, \beta, ..)$. Ist mithin t der Zeitaugenblick dieses Zustandes $(\alpha, \beta, ..)$, so kann jener Term (23.) bezeichnet werden als dasjenige Quantum Energie, welches dem Systeme zuzuführen ist vom Augenblick $t - 0$ bis zum Augenblick $t + 0$. Hieraus folgt, dass jener Term (23.) gleich Null ist, dass also die Formel (22.) die einfachere Gestalt annimmt:

$$(24.)\qquad dE = A d\alpha + B d\beta + \ldots$$

Lässt man daher das System, unter Anwendung der äusseren Kräfte und Wärmequellen, während eines Zeitintervalles $t_1 \ldots t_2$ irgend welche Reihe von Zuständen

$$(\alpha_1, \beta_1, ..) \;\ldots\; (\alpha_2, \beta_2, ..)$$

durchlaufen, so wird das dem Systeme während dieses Zeitintervalls von Aussen her zuzuführende Quantum Energie E_{12} den Werth haben:

$$(25.)\qquad E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} (A d\alpha + B d\beta + \ldots),$$

die Integration hinerstreckt über die durchlaufenen Zustände.

Nach dem Grundsatz (20.b) muss nun E_{12} immer Null sein, sobald der Zustand $(\alpha_1, \beta_1, ..)$ identisch ist mit dem Zustande $(\alpha_2, \beta_2, ..)$. Mit andern Worten: Das Integral (25.):

$$\int_{t_1}^{t_2} (A d\alpha + B d\beta + \ldots)$$

muss verschwinden, sobald es hinerstreckt ist über eine in sich zurücklaufende Reihe von Zuständen. Hieraus folgt — wenigstens mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit *) —, dass das unter dem Integralzeichen stehende Aggregat

$$A d\alpha + B d\beta + \ldots$$

ein vollständiges Differential ist. Hieraus aber ergiebt sich, weil (wie schon bemerkt) die A, B, .. nur von den $\alpha, \beta, .., c', c'', ..$ abhängen, dass dieses Aggregat die Form besitzen muss:

$$(26.)\qquad A d\alpha + B d\beta + \ldots = d\mathfrak{C}(\alpha, \beta, .., c', c'', ..),$$

wo $\mathfrak{C}$ einen Ausdruck bezeichnet, der lediglich zusammengesetzt sein darf aus den beigefügten Argumenten. Aus (24.) und (26.) ergiebt sich:

$$(27.)\qquad dE = d\mathfrak{C}(\alpha, \beta, .., c', c'', ..).$$

Der Ausdruck $\mathfrak{C}$ ist lediglich zusammengesetzt aus den charakteristischen Variablen und Constanten $\alpha, \beta, .., c', c'', ..$ des betrachteten Systemes, hängt also lediglich ab von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systemes. Demgemäss kann die Formel (27.), welche man als das Princip der lebendigen Kraft zu bezeichnen pflegt, in Worten folgendermassen ausgesprochen werden:

(28.) . . . *Das Princip der lebendigen Kraft.* Das dem betrachteten System während eines Zeitelementes von Aussen her zugeführte Quantum von (theils kinetischer, theils thermischer) Energie ist das vollständige Differential einer gewissen (unbekannten) Function $\mathfrak{C}$, welche lediglich abhängt von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systemes.

---

*) Wirkliche Sicherheit wird dieser Schluss nur dann besitzen, wenn wir, vermittelst der uns zu Gebote stehenden äusseren Kräfte und Wärmequellen $[A]$ und $[\alpha]$, jedes beliebige Werthsystem $d\alpha, d\beta, ..$ hervorzurufen im Stande sind.

Diese Function $\mathfrak{C}$ ist von verschiedenen Autoren verschieden benannt worden, von Thomson und Clausius als die mechanische Energie des Systemes, von Kirchhoff als die Wirkungsfunction des Systemes, von meinem Vater als der Arbeitsvorrath des Systemes. Ich meinerseits würde, in unmittelbarer Anlehnung an die letztgenannte Benennungsweise, vorschlagen sie als das Capital des Systemes zu bezeichnen.

Die das Princip der lebendigen Kraft repräsentirende Formel (27.), welche kürzer durch

$$(28.)\qquad d\mathsf{E} = d\mathfrak{C}$$

angedeutet werden kann, ist nunmehr gewissen Transformationen zu unterwerfen. Zunächst ist das mit $d\mathsf{E}$ bezeichnete Quantum (seiner Definition zufolge) identisch mit demjenigen, welches in (19.) mit $(dT)_A + (dQ)_A + (dQ)_\alpha$ bezeichnet war; so dass man also jene Formel auch so schreiben kann:

$$(29.)\qquad (dT)_A + (dQ)_A + (dQ)_\alpha = d\mathfrak{C}.$$

Addirt man auf beiden Seiten das Quantum $(dT)_J + (dQ)_J$, (18.), so folgt:

$$(30.)\qquad [(dT)_J + (dT)_A] + [(dQ)_J + (dQ)_A + (dQ)_\alpha] = \\ = d\mathfrak{C} + (dT)_J + (dQ)_J.$$

Hieraus aber ergiebt sich mit Rücksicht *) auf (17.) sofort:

$$(31.)\qquad dT + d\Sigma(DM.C(\vartheta)) = d\mathfrak{C} + (dT)_J + (dQ)_J,$$

oder falls man zur Abkürzung

$$(32.)\qquad \mathfrak{C} - T - \Sigma(DM.C(\vartheta)) = \mathfrak{J}$$

setzt:

$$(33.)\qquad (dT)_J + (dQ)_J = -d\mathfrak{J}.$$

Da $\mathfrak{C}$ lediglich abhängt von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systemes, so gilt nach (32.) Gleiches auch von $\mathfrak{J}$; so dass man also durch (33.) zu folgendem Ausspruch gelangt.

(34.) . . . . *Das Princip der lebendigen Kraft, in etwas anderer Form dargestellt.* Dasjenige Quantum von lebendiger Kraft und

---

*) In der zweiten der beiden Formeln (17.) kann offenbar der Index 0 (ohne Beeinträchtigung der Deutlichkeit) unterdrückt werden.

Wärme, welches im gegebenen Systeme während eines Zeitelementes, speciell in Folge der *innern* Kräfte $[J]$, sich entwickelt, ist das vollständige Differential einer gewissen (unbekannten) Function $-\mathfrak{J}$, welche lediglich abhängt von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systemes.

Das in Rede stehende Quantum

$$(dT)_J + (dQ)_J \quad \text{oder} \quad (dT + dQ)_J$$

kann, weil die inneren Kräfte $[J]$ theils ordinären, theils elektrostatischen, theils elektrodynamischen Ursprungs sind, in drei Theile zerlegt werden, — eine Zerlegung welche angedeutet sein mag durch:

$$(35.) \quad (dT + dQ)_J = \\ = (dT + dQ)_{J,\,\text{ord. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}}\,.$$

Das betrachtete System ist der Art eingerichtet, dass die Kräfte $[J$, ord. Us$]$ keine Wärmeentwicklung verursachen, denn jene Kräfte bestehen in den zwischen den ponderablen Massenelementen vorhandenen Gravitations- und Cohäsions-Kräften, durch welche also nur dann Wärme entwickelt werden könnte, wenn zwischen diesen Elementen gegenseitige Reibungen stattfänden; solche Reibungen aber sind bei der dem System gegebenen Einrichtung ausgeschlossen (pag. 454). Das von den Kräften $[J$, ord. Us$]$ herrührende dQ ist also $= 0$; und es erlangt daher die Formel (35.) die einfachere Gestalt:

$$(36.) \quad (dT + dQ)_J = \\ = (dT)_{J,\,\text{ord. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}}\,.$$

Diese drei Bestandtheile des Quantums $(dT + dQ)_J$ sollen nun in den folgenden Paragraphen einzeln in Betracht gezogen werden.

§. 7.

Ueber die inneren Kräfte ordinären Ursprungs.

Schliessen wir uns der gewöhnlichen Vorstellung an, dass diese den ponderablen Massenelementen inhärenten Kräfte lediglich abhängen von ihren Entfernungen, so sind die Componenten der von einem Elemente DM_1 auf ein Element DM_0 ausgeübten Kraft darstellbar durch:

$$(37.)\quad \begin{aligned} X_0^1 &= -DM_0 . DM_1 . \frac{\partial f(r)}{\partial x_0}, \\ Y_0^1 &= -DM_0 . DM_1 . \frac{\partial f(r)}{\partial y_0}, \\ Z_0^1 &= -DM_0 . DM_1 . \frac{\partial f(r)}{\partial z_0}, \end{aligned}$$

wo $f(r)$ eine gewisse Function der zwischen den beiden Elementen vorhandenen Entfernung r vorstellt, und x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von DM_0 sind. Diese Formeln (37.) repräsentiren die von DM_1 auf DM_0 ausgeübte ponderomotorische Kraft ordinären Ursprungs.

Bezeichnet T_0 die lebendige Kraft von DM_0, so ist nach (4.):

$$dT_0 = X_0 dx_0 + Y_0 dy_0 + Z_0 dz_0,$$

wo unter X_0, Y_0, Z_0 die ganze auf DM_0 einwirkende ponderomotorische Kraft zu verstehen ist. Nimmt man für X_0, Y_0, Z_0 die partielle Kraft (37.), so erhält man denjenigen Theil von dT_0, welcher seine Entstehung verdankt der von DM_1 auf DM_0 hervorgebrachten Kraft ordinären Ursprungs. Bezeichnet man also diesen Theil von dT_0 mit $(dT_0^1)_{\text{ord. Us}}$, so ergiebt sich

$$(38.)\quad (dT_0^1)_{\text{ord. Us}} = -DM_0 . DM_1 . \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_0} dx_0 + \ldots\right).$$

Desgleichen ergiebt sich, falls man umgekehrt die Einwirkung von DM_0 auf DM_1 ins Auge fasst, die analoge Formel:

$$(39.)\quad (dT_1^0)_{\text{ord. Us}} = -DM_0 . DM_1 . \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_1} dx_1 + \ldots\right),$$

wo x_1, y_1, z_1 die Coordinaten von DM_1 bezeichnen. Aus diesen beiden Formeln folgt durch Addition sofort:

$$(40.)\quad \begin{aligned} (dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{ord. Us}} &= -DM_0 . DM_1 . df(r), \\ &= -d(DM_0 . DM_1 . f(r)). \end{aligned}$$

Denkt man sich nun die Formel (40.) der Reihe nach aufgestellt für jedwedes Elementenpaar DM_0, DM_1 des gegebenen Systemes A, B, C, ..., und alle diese Formeln summirt, so erhält man:

$$(41.)\quad (dT)_{J,\text{ord. Us}} = -d\left[\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(DM_0 . DM_1 . f(r))\right],$$

wo die linke Seite*) dieselbe Bedeutung hat, wie in (36.), nämlich

*) Was die rechte Seite der Formel anbelangt, so ist das Zeichen $\Sigma\Sigma$ in solchem Sinne aufzufassen, dass jedes Elementenpaar doppelt vorkommt im Ausdrucke $\Sigma\Sigma$, mithin nur einmal im Ausdrucke $\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma$.

dasjenige Quantum lebendiger Kraft bezeichnet, welches durch die Kräfte [J, ord. Us] im ganzen Systeme hervorgebracht wird. Setzt man

$$(42.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(DM_0 . DM_1 . f(r)) = O$$

so wird O als das ordinäre Potential des Systemes auf sich selber zu bezeichnen sein; gleichzeitig erlangt alsdann die Formel (41.) die einfache Gestalt:

$$(43.)\qquad (dT)_{J,\,\text{ord. Us}} = -\,dO.$$

§. 8.

Ueber die inneren Kräfte elektrostatischen Ursprungs.

Die repulsive Kraft, mit welcher zwei elektrische Massen μ_0 und μ_1 in der Entfernung r auf einander wirken, hat nach dem Coulomb'schen Gesetz den Werth

$$-\,\mu_0\mu_1\,\frac{d\varphi(r)}{dr},$$

wo $\varphi(r)$ gewöhnlich $= \frac{1}{r}$ gesetzt wird. Indessen mag, der grösseren Sicherheit willen, im Folgenden unter $\varphi(r)$ eine Function verstanden sein, welche nur für beträchtliche r identisch mit $\frac{1}{r}$, hingegen für sehr kleine r von noch unbekannter Beschaffenheit ist.

Dieses Coulomb'sche Gesetz giebt an und für sich über die eigentliche Wirkung der in Rede stehenden Kräfte noch keinen Aufschluss; vielmehr bedarf es zu diesem Zwecke irgend welcher accessorischer Annahmen. Die Hypothesen, deren man in dieser Beziehung sich zu bedienen pflegt, sind folgende:

(44.) . . . Erste Hypothese. Die ponderomotorische Kraft elst. Us R, mit welcher zwei ponderable Massenelemente DM_0 und DM_1 aufeinander wirken, ist identisch mit derjenigen Kraft, welche nach dem Coulomb'schen Gesetz stattfindet zwischen ihren augenblicklichen elektrischen Ladungen, und hat also, falls man diese Ladungen mit μ_0 und μ_1 bezeichnet, den Werth:

$$R = -\,\mu_0\mu_1\,\frac{d\varphi(r)}{dr}.$$

(45.) . . . Zweite Hypothese. Die elektromotorische Kraft elst. Us $\mathfrak{R}$, welche DM_1 hervorruft in irgend einem Punkte m_0 des Elementes DM_0, ist identisch mit derjenigen Kraft, welche nach dem Coulomb'schen Gesetz stattfindet zwischen der augenblicklichen Ladung von DM_1 und einer in jenem Punkt m_0 concentrirt gedachten Elektricitätsmenge Eins. Sie hat also, falls man die Ladung von DM_1 wiederum mit μ_1 bezeichnet, den Werth:

$$\mathfrak{R} = -\mu_1 \frac{dq(r)}{dr}.$$

Von diesen Vorstellungen aus, lässt sich nun dasjenige Quantum lebendiger Kraft und Wärme $(dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}}$, welches im Systeme $A, B, C, \ldots$ speciell durch die Kräfte [J, elst. Us] während der Zeit dt hervorgebracht wird, näher untersuchen. Bezeichnet man das elektrostatische Potential des Systemes auf sich selber mit U, so kann das Resultat, zu welchem man gelangt, *) ausgedrückt werden durch die Formel:

(46.) $$(dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}} = -dU.$$

§. 9.

Folgerung aus dem Princip der lebendigen Kraft.

Dieses Princip konnte [vergl. (33.), (34.), (36.)] ausgedrückt werden durch:

$$(dT + dQ)_J = -d\mathfrak{J},$$

oder auch durch:

$$(dT)_{J,\,\text{ord. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}} + (dT + dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}} = -d\mathfrak{J}.$$

Subtrahirt man von dieser Formel die in (43.) und (46.) gefundenen Formeln:

(47.a) $$(dT)_{J,\,\text{ord. Us}} = -dO,$$

(47.b) $$(dT + dQ)_{J,\,\text{elst. Us}} = -dU,$$

so erhält man:

(47.c) $$(dT + dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}} = -d(\mathfrak{J} - O - U);$$

in Worten ausgedrückt:

*) In Betreff einer ausführlicheren Darstellung verweise ich auf meine »Theorie der elektrischen Kräfte«, pag. 24—33.

(48.) .... Dasjenige Quantum von lebendiger Kraft und Wärme, welches in dem gegebenen Systeme A, B, C, ... speciell in Folge der Kräfte [J, eldy. Us] während eines Zeitelementes sich entwickelt, ist das vollständige Differential einer gewissen (unbekannten) Function — ($\mathfrak{J}$—O—U), welche lediglich abhängt von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systems.

Die in Rede stehende Formel (47.c) bezieht sich wesentlich auf die noch unbekannten Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, und wird im Folgenden zur näheren Bestimmung dieser Kräfte von grossem Nutzen sein.

Dritter Abschnitt.

Untersuchung der von Ampère und Faraday entdeckten Kräfte. — Erste Methode.

§. 1.

Die Grundeigenschaften dieser Kräfte. *)

Zwei lineare Leiter s, s_1 und ein körperlicher Leiter A seien begriffen in beliebigen Bewegungen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Strömungen stattfinden. Die in zwei Elementen Ds, Ds_1 jener linearen Leiter zu den Zeiten t und $t + dt$ vorhandenen Stromstärken mögen bezeichnet sein respective mit J, J_1 und $J + dJ$, $J_1 + dJ_1$. Es handelt sich

einerseits um die Untersuchung derjenigen ponderomotorischen Kraft Pdt, welche das Stromelement Ds_1 während der Zeit dt ausübt auf das Stromelement Ds;

andrerseits um die Untersuchung derjenigen elektromotorischen Kraft Edt, welche das Stromelement Ds_1 während der Zeit dt hervorbringt in irgend einem Punkte des Körpers A.

Wenn wir von den Vorstellungen und Gesetzen, die man in Betreff dieser Kräfte anzunehmen gewohnt ist, Alles abscheiden,

*) Im Folgenden werden diese Kräfte bald als die von Ampère und Faraday entdeckten Kräfte, bald aber auch (nach ihrem Charakter) als die pondero- und elektromotorischen Kräfte elektrodynamischen Ursprungs bezeichnet werden; es sind dieselben, welche in der Einleitung (p. 419) respective mit (a.) und (f.) benannt waren.

was irgendwie misslich und zweifelhaft erscheint, so bleiben gewisse Grundeigenschaften übrig, die wir hier in möglichst übersichtlicher Weise zusammenzustellen versuchen wollen. Es sind folgende:

(19.) *Erste Grundeigenschaft.*

(a.) . . Die (auf die Zeiteinheit bezogene) Kraft P ist proportional mit

$$JJ_1 Ds Ds_1;$$

sie schlägt daher in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Stromrichtung umgekehrt wird, bleibt hingegen ungeändert, sobald eine solche Umkehrung in beiden Elementen erfolgt.

(α.) . . Die (auf das Zeitelement bezogene) Kraft Edt ist zerlegbar in zwei Kräfte, welche respective proportional sind mit

$$J_1 Ds_1 \quad \text{und} \quad (dJ_1) Ds_1;$$

von denen also z. B. die erstere in ihr Gegentheil umschlägt, sobald die in Ds_1 vorhandene Stromrichtung umgekehrt wird.

Zweite Grundeigenschaft.

(b.) . . Abgesehen von dem genannten Factor ist die Kraft P nur noch abhängig von der zur Zeit t zwischen Ds_1 und Ds vorhandenen relativen Lage.

Denkt man sich also von $J_1 Ds_1$, JDs, P das Spiegelbild $J_1 D\sigma_1$, $JD\sigma$, Π entworfen in Bezug auf irgend eine Ebene, so wird, ebenso wie P die Kraft von $J_1 Ds_1$ auf JDs vorstellt, ebenso auch Π diejenige Kraft repräsentiren, welche $J_1 D\sigma_1$ auf $JD\sigma$ ausübt.

(β.) . . Abgesehen von den genannten beiden Factoren ist die Kraft Edt nur noch abhängig von der zur Zeit t zwischen Ds_1 und A vorhandenen relativen Lage, sowie von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage erleidet während des Zeitelementes dt.

Sind diese Aenderungen Null und ist dJ_1 ebenfalls Null, so verschwindet die Kraft.

Die Kraft Edt ist also (wie aus dem Gesagten folgt) unabhängig z. B. von den in A vorhandenen elektrischen Vorgängen.

Dritte Grundeigenschaft.

(c.) . . Die Kraft P kann ersetzt werden durch diejenigen ponderomotorischen Kräfte, welche die Componenten von Ds_1 ausüben auf die Componenten von Ds.

(γ.) . . Die Kraft Edt kann ersetzt werden durch diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die Componenten von Ds_1 in dem betrachteten Punkte des Körpers A hervorbringen.

Bei (c.) und (γ.) sollen die Componenten genommen gedacht werden nach völlig beliebigen (ruhenden oder in Bewegung begriffenen) Richtungen. Selbstverständlich soll aber in den componirenden Elementen dieselbe Stromstärke und dieselbe Aenderung der Stromstärke vorausgesetzt sein, wie in dem ursprünglichen Elemente.

Im Folgenden soll nun untersucht werden, in wie weit die Kräfte Pdt und Edt ihre Richtung und Stärke noch aus diesen Grundeigenschaften (49.) und aus dem Princip der lebendigen Kraft (48.) sich bestimmen lassen.

§. 2.

Die aus den Grundeigenschaften für die ponderomotorischen Kräfte sich ergebenden Formeln.

Es sei $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ein rechtwinkliges Axensystem, dessen erste Axe zusammenfällt mit der Verbindungslinie r der beiden Stromelemente JDs, J_1Ds_1.

Wir bezeichnen die diesen Axen entsprechenden Componenten von JDs mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, diejenigen von J_1Ds_1 ebenfalls mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, und endlich jede in Betracht kommende Kraft, jenachdem sie parallel zu $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ oder $\mathfrak{z}$ ist, mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{Z}$. Bedienen wir uns der Worte longitudinal und transversal, um anzudeuten, ob eine gegebene Richtung parallel oder senkrecht zu r ist, so sind die Elemente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ und die Kraft $\mathfrak{X}$ longitudinal, andrerseits die Elemente $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ und die Kräfte $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ transversal zu nennen.

Aus den Grundeigenschaften (49.a, b, c) der ponderomotorischen Kräfte ergeben sich nun zunächst fünf einzelne Sätze, die wir (50. I, II, III, IV, V) der Reihe nach besprechen werden.

(50. I) . . . . »Die ponderomotorische Einwirkung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{a}$ ist »dargestellt durch eine Kraft $\mathfrak{X}$. — Mit andern Worten: Zwei lon»gitudinale Elemente üben aufeinander longitudinale Kräfte aus«.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich, unter Anwendung des Satzes vom zureichenden Grunde, unmittelbar aus den Voraussetzungen (49.a, b).

(50. II) . . . . »Die Wirkung von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}$ ist dargestellt durch eine »Kraft $\mathfrak{X}$. — D. h. zwei parallele transversale Elemente üben auf»einander longitudinale Kräfte aus«.

Beweis. — Bezeichnet man die von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}$ ausgeübte, vorläufig noch völlig unbekannte Kraft mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so wird das Spiegelbild von

$$(\varrho.)\qquad \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b},\ \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}$$

nach der Richtung $\mathfrak{y}$ (d. i. in Bezug auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$-Ebene) dargestellt sein durch

$$(\sigma.)\qquad \mathfrak{b}' \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b}',\ \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y}',\ \mathfrak{Z},$$

wo unter den accentuirten Linien solche zu verstehen sind, welche mit den ursprünglichen gleiche Länge, aber entgegengesetzte Richtung haben. Aus diesem Spiegelbilde (σ.) ergiebt sich mit Rücksicht auf (49.b), dass die von $\mathfrak{b}'$ auf $\mathfrak{b}'$ ausgeübte $\mathfrak{y}$-Componente $= \mathfrak{Y}'$ ist. Andrerseits aber folgt aus (ϱ.) mit Rücksicht auf (49.a), dass jene von $\mathfrak{b}'$ auf $\mathfrak{b}'$ ausgeübte $\mathfrak{y}$-Componente, genau ebenso wie die von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}$ ausgeübte, $= \mathfrak{Y}$ ist. Somit ergiebt sich also $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$, d. i. $\mathfrak{Y} = 0$.

Es sei nun ferner das Spiegelbild von (ϱ.) nach der Richtung $\mathfrak{z}$ angedeutet durch:

$$(\tau.)\qquad \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b},\ \mathfrak{X},\ \mathfrak{Y},\ \mathfrak{Z}';$$

alsdann folgt aus (ϱ.) und (τ.) sofort, dass die von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{b}$ ausgeübte $\mathfrak{z}$-Componente sowohl $= \mathfrak{Z}$, als auch $= \mathfrak{Z}'$ ist, dass mithin $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'$ oder (was dasselbe) $\mathfrak{Z} = 0$ ist.

Somit ist nachgewiesen, dass $\mathfrak{Y} = 0$ und $\mathfrak{Z} = 0$ sein muss, dass also die Kraft $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auf $\mathfrak{X}$ sich reducirt; w. z. z. w.

(50. III) . . . . »Die Wirkung von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ ist dargestellt durch eine »Kraft $\mathfrak{Y}$. — D. h. die von einem longitudinalen Element auf ein »transversales ausgeübte Kraft ist dem letztern parallel«.

Beweis. — Die vorläufig noch unbekannte, von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}$ ausgeübte Kraft sei bezeichnet mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Das Spiegelbild von

$$(\varrho.) \qquad \mathfrak{a} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$$

nach der Richtung $\mathfrak{y}$ wird alsdann dargestellt sein durch:

$$(\sigma.) \qquad \mathfrak{a} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{b}', \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}.$$

Aus (σ.) folgt, mit Rücksicht auf (49.b), dass die von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{b}'$ ausgeübte Kraft die Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}$; andrerseits aber folgt aus (ϱ.), unter Rücksicht auf (49.a), dass die Componenten der ebengenannten Kraft gleich $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ sind. Somit ergiebt sich $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}'$, d. i. $\mathfrak{X} = 0$ und $\mathfrak{Z} = 0$; w. z. z. w.

(50. IV) .... »Die Wirkung von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{a}$ ist dargestellt durch eine »Kraft $\mathfrak{Y}$. — D. h. die von einem transversalen auf ein longitudi»nales Element ausgeübte Kraft ist dem erstern parallel«.

Der Beweis ist derselbe wie bei (50. III).

(50. V) .... »Die Wirkung von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{c}$ ist Null. — D. h. zwischen »zwei zu einander senkrechten transversalen Elementen findet keine »Einwirkung statt«.

Beweis. — Die vorläufig unbekannte Kraft, welche $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{c}$ ausübt, sei bezeichnet mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Die Spiegelbilder von

$$(\varrho.) \qquad \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{c}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$$

nach den Richtungen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ werden alsdann dargestellt sein respective durch

$$(\sigma.) \qquad \mathfrak{b}' \ldots\ldots\ldots \mathfrak{c}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z},$$

und durch:

$$(\tau.) \qquad \mathfrak{b} \ldots\ldots\ldots \mathfrak{c}', \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}'.$$

Aus (ϱ.) folgt, mit Rücksicht auf (49.a), dass die von $\mathfrak{b}'$ auf $\mathfrak{c}$, und ebenso auch die von $\mathfrak{b}$ auf $\mathfrak{c}'$ ausgeübte Kraft dargestellt ist durch $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$. Diese Componenten $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}'$ müssen daher, mit Hinblick auf (σ.) und (τ.), identisch sein mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}', \mathfrak{Z}$, und ebenso auch identisch sein mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}'$. Somit folgt: $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}' = \mathfrak{Z}$, d. i. $\mathfrak{X} = 0$, $\mathfrak{Y} = 0$, $\mathfrak{Z} = 0$; w. z. z. w.

Die Ergebnisse (50. I, II, III, IV, V) können vereinigt werden zu folgenden Sätzen:

(51.) .... Die Wirkung zwischen zwei longitudinalen Elementen ist longitudinal.

Die Wirkung zwischen zwei transversalen Elementen ist longitudinal oder Null, jenachdem die Elemente parallel oder senkrecht zu einander sind.

Die Wirkung zwischen einem longitudinalen und einem transversalen Element ist dem letztern parallel.

Die Componenten der beiden gegebenen Stromelemente JDs und J_1Ds_1 mögen fortan (genauer als bisher) bezeichnet werden mit $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$; so dass also die Formeln stattfinden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= JDs\cos(Ds, \mathfrak{x}), & \mathfrak{a}_1 &= J_1Ds_1\cos(Ds_1, \mathfrak{x}), \\ \mathfrak{b} &= JDs\cos(Ds, \mathfrak{y}), & \mathfrak{b}_1 &= J_1Ds_1\cos(Ds_1, \mathfrak{y}), \\ \mathfrak{c} &= JDs\cos(Ds, \mathfrak{z}), & \mathfrak{c}_1 &= J_1Ds_1\cos(Ds_1, \mathfrak{z}). \end{aligned}$$

Zufolge (49.c) ist die von J_1Ds_1 auf JDs ausgeübte Wirkung $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ identisch mit der Summe derjenigen Wirkungen, welche $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{c}_1$ ausüben auf $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Diese letztern Einwirkungen aber lassen sich mit Rücksicht auf (49.a, b) und (51.) augenblicklich angeben. So wird z. B. die von $\mathfrak{a}_1$ auf $\mathfrak{a}$ ausgeübte Kraft longitudinal sein, und den Werth $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}f(r)$ besitzen, wo $f(r)$ eine unbekannte Function der Entfernung vorstellt; ferner werden die von $\mathfrak{b}_1$ auf $\mathfrak{b}$ und von $\mathfrak{c}_1$ auf $\mathfrak{c}$ ausgeübten Kräfte gleichfalls longitudinal sein, und die Werthe besitzen $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}\varphi(r)$ und $\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}\varphi(r)$, wo $\varphi(r)$ wiederum eine unbekannte Function der Entfernung vorstellt.

Wir wollen nun jene Componenten $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ der von J_1Ds_1 auf JDs ausgeübten Wirkung der Reihe nach in Betracht ziehen. — Die longitudinale Componente $\mathfrak{X}$ kann, nach (51.), nur herrühren von den drei Wirkungen $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a})$, $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c})$; sie besitzt daher den Werth:

$$(52.\alpha) \qquad \mathfrak{X} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}\hat{\varrho} + (\mathfrak{b}_1\mathfrak{b} + \mathfrak{c}_1\mathfrak{c})\bar{\varrho},$$

wo $\hat{\varrho}$ und $\bar{\varrho}$ für die unbekannten Functionen $f(r)$ und $\varphi(r)$ gesetzt sind. Ferner kann die Componente $\mathfrak{Y}$, nach (51.), nur herrühren von den beiden Wirkungen $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b})$; so dass man erhält:

$$(52.\beta) \qquad \mathfrak{Y} = \mathfrak{b}_1\mathfrak{a}\sigma + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\tau,$$

wo σ, τ neue unbekannte Functionen von r sind, die von einander verschieden sein können. Endlich erhält man:

$$(52.\gamma) \qquad \mathfrak{Z} = \mathfrak{c}_1\mathfrak{a}\sigma + \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}\tau,$$

wo σ, τ nothwendiger Weise genau dieselben Functionen sind, wie in (52.β).

An Stelle des Axensystemes $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, dessen erste Axe mit r zusammenfällt, und die Richtung ($Ds_1 \rightarrow Ds$) besitzen mag, soll gegenwärtig ein beliebiges rechtwinkliges Axensystem x, y, z eingeführt werden. Sind X, Y, Z die diesem neuen System entsprechenden Componenten der Kraft $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ (52.α, β, γ), so ergiebt sich sofort:

$$X = \mathfrak{X}\Lambda + \mathfrak{Y}\Lambda' + \mathfrak{Z}\Lambda'',$$

wo $\Lambda, \Lambda', \Lambda''$ die Richtungscosinus von x in Bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vorstellen. Hieraus folgt durch Substitution der Werthe (52.α, β, γ):

$$X = \Lambda\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\hat{\varrho} + \Lambda(\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1)\bar{\varrho}$$
$$+ (\Lambda'\mathfrak{b}_1 + \Lambda''\mathfrak{c}_1)\mathfrak{a}\sigma + (\Lambda'\mathfrak{b} + \Lambda''\mathfrak{c})\mathfrak{a}_1\tau,$$

oder (was dasselbe ist):

$$X = \Lambda\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1(\hat{\varrho} - \bar{\varrho} - \sigma - \tau) + \Lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1)\bar{\varrho}$$
$$+ (\Lambda\mathfrak{a}_1 + \Lambda'\mathfrak{b}_1 + \Lambda''\mathfrak{c}_1)\mathfrak{a}\sigma + (\Lambda\mathfrak{a} + \Lambda'\mathfrak{b} + \Lambda''\mathfrak{c})\mathfrak{a}_1\tau.$$

Nun werde gesetzt:

$$\mathfrak{a} = JDs\,.\,\Theta, \qquad \mathfrak{a}_1 = J_1Ds_1\,.\,\Theta_1,$$
$$\mathfrak{b} = JDs\,.\,\Theta', \qquad \mathfrak{b}_1 = J_1Ds_1\,.\,\Theta_1',$$
$$\mathfrak{c} = JDs\,.\,\Theta'', \qquad \mathfrak{c}_1 = J_1Ds_1\,.\,\Theta_1'',$$

wo $\Theta, \Theta', \Theta''$ und $\Theta_1, \Theta_1', \Theta_1''$ die Richtungscosinus von JDs und J_1Ds_1 in Bezug auf $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vorstellen. Alsdann folgt:

$$X = JDs\,.\,J_1Ds_1\,.\,[\Lambda\Theta\Theta_1(\hat{\varrho} - \bar{\varrho} - \sigma - \tau) + \Lambda(\Theta\Theta_1 + \Theta'\Theta_1' + \Theta''\Theta_1'')\bar{\varrho}$$
$$+ (\Lambda\Theta_1 + \Lambda'\Theta_1' + \Lambda''\Theta_1'')\Theta\sigma + (\Lambda\Theta + \Lambda'\Theta' + \Lambda''\Theta'')\Theta_1\tau].$$

Nun ist $\Lambda = \cos(\mathfrak{x}, x) = \cos(r, x)$, also ausdrückbar durch

$$\Lambda = \frac{x - x_1}{r},$$

wo alsdann x, y, z und x_1, y_1, z_1 die dem neuen Axensystem entsprechenden Coordinaten von JDs und J_1Ds_1 vorstellen. Bezeichnet man mit Bezug auf eben dasselbe System die Richtungscosinus von JDs, J_1Ds_1 mit A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1, und mit E den Cosinus des zwischen JDs, J_1Ds_1 vorhandenen Neigungswinkels, so wird:

$$A = \Lambda\Theta + \Lambda'\Theta' + \Lambda''\Theta'',$$
$$A_1 = \Lambda\Theta_1 + \Lambda'\Theta_1' + \Lambda''\Theta_1'',$$
$$E = \Theta\Theta_1 + \Theta'\Theta_1' + \Theta''\Theta_1''.$$

Demgemäss kann die Formel für X auch so geschrieben werden:

$$X = JDs \,.\, J_1Ds_1 \,.\, \left[\frac{x-x_1}{r}\,\Theta\Theta_1\,(\hat{\varrho} - \bar{\varrho} - \sigma - \tau) + \frac{x-x_1}{r}\,\mathrm{E}\,\varrho \right.$$
$$\left. + \mathrm{A}_1\Theta\sigma + \mathrm{A}\Theta_1\tau\right].$$

Analoge Werthe resultiren für Y, Z; und man gelangt daher, falls zur Abkürzung $\hat{\varrho} - \bar{\varrho} - \sigma - \tau$ schlechtweg $= \varrho$ gesetzt wird, zu folgendem Resultat:

Bezeichnet man die Coordinaten, die Richtungscosinus und die Ampère'schen Argumente*) zweier elektrischen Stromelemente JDs, J_1Ds_1 respective mit x, y, z, x_1, y_1, z_1, mit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$, und mit $r, \Theta, \Theta_1, \mathrm{E}$, so werden die Componenten X, Y, Z der von J_1Ds_1 auf JDs ausgeübten ponderomotorischen Kraft die Werthe besitzen:

$$X = JDs \,.\, J_1Ds_1 \left[(\varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathrm{E})\,\frac{x-x_1}{r} + (\sigma\Theta\mathrm{A}_1 + \tau\Theta_1\mathrm{A})\right],$$
$$(53.)\quad Y = JDs \,.\, J_1Ds_1 \left[(\varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathrm{E})\,\frac{y-y_1}{r} + (\sigma\Theta\mathrm{B}_1 + \tau\Theta_1\mathrm{B})\right],$$
$$Z = JDs \,.\, J_1Ds_1 \left[(\varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathrm{E})\,\frac{z-z_1}{r} + (\sigma\Theta\Gamma_1 + \tau\Theta_1\Gamma)\right].$$

Dabei sind unter $\varrho, \bar{\varrho}, \sigma, \tau$ vier noch unbekannte, lediglich von r abhängende Functionen zu verstehen.

Jene ponderomotorische Kraft kann, wie aus (53.) folgt, in die drei Kräfte zerlegt werden

$$JDs \,.\, J_1Ds_1 (\varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathrm{E})$$
$$JDs \,.\, J_1Ds_1 \,.\, \sigma\Theta\,,$$
$$JDs \,.\, J_1Ds_1 \,.\, \tau\Theta_1\,,$$

von denen die erste die Richtung r ($Ds_1 \longrightarrow Ds$), die zweite die Richtung $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$, die dritte die Richtung $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ besitzt.

Ehe wir auf die Bestimmung der unbekannten Functionen $\varrho, \bar{\varrho}, \sigma, \tau$ uns einlassen können, müssen wir zuvor eine analoge Untersuchung anstellen über die elektromotorischen Kräfte. **)

---

*) Vergl. p. 424.

**) Die in diesem § angewandte Methode ist im Wesentlichen identisch mit derjenigen, deren Stefan sich bedient hat in seiner ausgezeichneten Arbeit über die Grundformeln der Elektrodynamik. (Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 59, zweite Abtheilung, pag. 693.)

§. 3.

Die aus den Grundeigenschaften für die elektromotorischen Kräfte sich ergebenden Formeln.

Ebenso wie in (49.α, β, γ), sei Edt diejenige elektromotorische Kraft, welche das inducirende Stromelement $J_1 Ds_1$ während der Zeit dt hervorbringt in irgend einem Punkte m des inducirten Körpers A. Auch sei, ebenso wie damals, vorausgesetzt, dass während der Zeit dt die Stromstärke J_1 und die räumlichen Lagen von $J_1 Ds_1$ und A in beliebiger Weise sich ändern. — Ferner seien $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ die Componenten von Edt nach drei aufeinander senkrechten Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, welche vom Punkte m ausgehen und mit der ponderablen Masse von A starr verbunden sind.

Lassen wir nun vom Punkte m in willkührlichen Richtungen irgend welche Linienelemente Ds, Ds', Ds'', ... ausgehen, die ebenfalls mit der ponderablen Masse von A starr verbunden sind, und deren Richtungscosinus in Bezug auf die Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, ... bezeichnet sein mögen, so werden

$$(54.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}dt &= \mathfrak{A}\mathfrak{X}dt + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}dt + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}dt, \\ \mathfrak{E}'dt &= \mathfrak{A}'\mathfrak{X}dt + \mathfrak{B}'\mathfrak{Y}dt + \mathfrak{C}'\mathfrak{Z}dt, \\ \mathfrak{E}''dt &= \mathfrak{A}''\mathfrak{X}dt + \mathfrak{B}''\mathfrak{Y}dt + \mathfrak{C}''\mathfrak{Z}dt, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

die den Richtungen Ds, Ds', Ds'', ... entsprechenden Componenten von Edt vorstellen, oder (was dasselbe ist) diejenigen elektromotorischen Kräfte vorstellen, welche $J_1 Ds_1$ in den Drahtelementen Ds, Ds', Ds'', ... hervorbringen würde. Diese Kräfte aber können auf Grund der Eigenschaften (49.α, β, γ) näher bestimmt werden.

Sind nämlich r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente *) für die beiden Elemente $J_1 Ds_1$ und Ds, so ist die relative Lage der beiden Elemente zu einander und die Aenderung dieser relativen Lage während der Zeit dt vollständig bestimmt durch Angabe der acht Grössen

$$r,\ \Theta,\ \Theta_1,\ \mathrm{E},\ dr,\ d\Theta,\ d\Theta_1,\ d\mathrm{E}.$$

Die von $J_1 Ds_1$ während der Zeit dt im Drahtelement Ds erzeugte

*) Vergl. pag. 424.

elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ muss daher, nach (49.α, β), darstellbar sein durch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}dt &= J_1 Ds_1 \,.\, F(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}, dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}) \\ &+ (dJ_1) Ds_1 \,.\, G(r, \Theta, \Theta_1, \mathsf{E}, dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}),\end{aligned}$$

wo die Functionen F, G lediglich abhängen können von den beigefügten Argumenten. Durch Entwicklung der Functionen F, G nach den unendlich kleinen Argumenten $dr, d\Theta, d\Theta_1, d\mathsf{E}$ folgt:

$$\begin{aligned}F &= H + Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}, \\ G &= O + Pdr + Qd\Theta + Rd\Theta_1 + Sd\mathsf{E};\end{aligned}$$

sodann aber folgt durch Substitution dieser Entwickelungen (unter Fortlassung der unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung) sofort:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}dt &= J_1 Ds_1 (H + Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}) \\ &+ (dJ_1) Ds_1 \,.\, O;\end{aligned}$$

wo die H, K, L, M, N, O nur noch von den vier Argumenten r, Θ, Θ_1, E abhängen können. — Nach (49.β) verschwindet die Kraft $\mathfrak{E}dt$, sobald die Aenderungen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 sämmtlich Null sind. Somit folgt: $H = 0$, und also:

$$\mathfrak{E}dt = Ds_1 [J_1 (Kdr + Ld\Theta + Md\Theta_1 + Nd\mathsf{E}) + OdJ_1]. \tag{55.}$$

Vertauscht man in Gedanken Ds mit Ds', Ds'', ..., so erhält man der Reihe nach die in (54.) angeführten Ausdrücke; woraus folgt, dass $\mathfrak{E}dt$ eine homogene lineare Function von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sein muss. Gleiches muss daher gelten von dem Ausdrucke (55.). Hieraus aber folgt, weil die Aenderungen dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$, dJ_1 von einander unabhängige willkührliche Grössen sind, dass Gleiches auch gelten muss von den einzelnen Gliedern des Ausdruckes (55.), also gelten muss von den fünf Producten:

$$Kdr, \quad Ld\Theta, \quad Md\Theta_1, \quad Nd\mathsf{E}, \quad OdJ_1. \tag{56.}$$

Hieraus aber ergeben sich die Mittel zur näheren Bestimmung von K, L, M, N, O.

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}\Theta &= \mathfrak{A}\mathfrak{U} + \mathfrak{B}\mathfrak{V} + \mathfrak{C}\mathfrak{W}, & d\Theta &= (\mathfrak{A}d\mathfrak{U} + \ldots), \\ \Theta_1 &= \mathfrak{A}_1\mathfrak{U} + \mathfrak{B}_1\mathfrak{V} + \mathfrak{C}_1\mathfrak{W}, & d\Theta_1 &= (\mathfrak{A}_1 d\mathfrak{U} + \ldots) + (\mathfrak{U}d\mathfrak{A}_1 + \ldots), \\ \mathsf{E} &= \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, & d\mathsf{E} &= (\mathfrak{A}d\mathfrak{A}_1 + \ldots),\end{aligned} \tag{57.}$$

wo $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ die Richtungscosinus von r und $J_1 Ds_1$ in Bezug auf die Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ vorstellen; während $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Richtungscosinus des mit diesen Axen starr verbundenen Elementes Ds vorstellen (so dass also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unveränderlich, mithin $d\mathfrak{A}$, $d\mathfrak{B}$, $d\mathfrak{C}$ Null sind).

Die beiden Producte $Ld\Theta$ und NdE sollen homogene lineare Functionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sein; hieraus folgt, mit Rücksicht auf die Werthe von $d\Theta$, dE (57.), dass L und N von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ unabhängig sind.

Die übrigen Producte Kdr, $Md\Theta_1$, OdJ_1 sollen ebenfalls homogene lineare Functionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sein; hieraus folgt, mit Rücksicht auf (57.), dass K, M, O gleichfalls homogene lineare Functionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind.

Nun hängen aber, wie vorhin bemerkt wurde, die fünf Functionen L, N und K, M, O lediglich ab von r, Θ, Θ_1, E; so dass also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in jenen Functionen nur insofern enthalten sein können, als sie Bestandtheile von Θ, E (57.) sind.

Die L, N werden daher, weil sie unabhängig von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind, auch unabhängig von Θ, E sein.

Und andrerseits werden die K, M, O, weil sie homogene lineare Functionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sind, ebensolche Functionen auch von Θ, E sein.

Demgemäss besitzen also die L, N und K, M, O folgende Formen:

$$(58.)\quad \begin{aligned} K &= \Theta.\mathsf{K}(r, \Theta_1) + E.\bar{\mathsf{K}}(r, \Theta_1), & L &= \Lambda(r, \Theta_1), \\ M &= \Theta.\mathsf{M}(r, \Theta_1) + E.\bar{\mathsf{M}}(r, \Theta_1), & N &= \mathsf{N}(r, \Theta_1), \\ O &= \Theta.\Omega(r, \Theta_1) + E.\bar{\Omega}(r, \Theta_1), \end{aligned}$$

wo die K, $\bar{\mathsf{K}}$, Λ, M, $\bar{\mathsf{M}}$, N, Ω, $\bar{\Omega}$ lediglich abhängen von den beigefügten beiden Argumenten r, Θ_1.

Nach (49.γ) ist das inducirende Element $J_1 Ds_1$ ersetzbar durch seine nach beliebigen Richtungen genommenen Componenten, einerlei ob diese Richtungen absolut fest oder in irgend welchen Bewegungen begriffen sind. In der That werden wir jene Eigenschaft (49.γ) in zwiefacher Weise anwenden: zuvörderst, indem wir (zu der in Rede stehenden Zerlegung) drei aufeinander senkrechte Richtungen ξ, η, ζ benutzen, welche mit dem Elemente $J_1 Ds_1$

starr verbunden sind, an seiner etwaigen Bewegung also theilnehmen; sodann später, indem wir drei aufeinander senkrechte Richtungen x, y, z benutzen, welche ein in irgend welcher eigenen Bewegung begriffenes System bilden, dessen relative Lage zu $J_1 Ds_1$ von Augenblick zu Augenblick sich ändert.

Unter Anwendung der mit $J_1 Ds_1$ starr verbundenen Axen ξ, η, ζ führt die Eigenschaft (49.γ) zu einer genaueren Kenntniss der Functionen K, L, M, N, O, nämlich zu dem Ergebnisse, dass die Formeln (58.) zu ersetzen sind durch *):

$$(59.)\quad \begin{aligned} K &= \varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathrm{E}, & L &= \lambda\Theta_1, \\ M &= \mu\Theta, & N &= \nu, \\ O &= \omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E}, \end{aligned}$$

wo $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, μ, ν, ω, $\bar{\omega}$ nur noch von r abhängen.

Ob in dem inducirten Drahtelement Ds schon von Hause aus ein elektrischer Strom vorhanden ist oder nicht, bleibt gleichgültig. Denn zufolge (49.β) ist die inducirte elektromotorische Kraft völlig unabhängig von denjenigen elektrischen Processen, welche in dem inducirten Körper stattfinden. Demgemäss gelangt man durch Substitution der Werthe (59.) in die Formel (55.) zu folgendem Resultat:

Befinden sich zwei Stromelemente JDs und $J_1 Ds_1$ in irgend welcher Bewegung und die in ihnen vorhandenen Stromstärken J und J_1 in irgend welchem Zustande der Veränderung, so wird die während der Zeit dt von $J_1 Ds_1$ in irgend einem Punkte des Elementes JDs (und zwar in der Richtung dieses Elementes) hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ den Werth besitzen:

$$(60.)\quad \mathfrak{E}dt = Ds_1\big[J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathrm{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathrm{E}) + (\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E})dJ_1\big];$$

hier sind r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente, und $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, μ, ν, ω, $\bar{\omega}$ sieben unbekannte Functionen von r.

Wir bringen die Formel (60.), welche zur augenblicklichen Abkürzung angedeutet werden mag durch:

*) Die nähere Ausführung findet sich in der »Th. der elektr. Kräfte«, auf pag. 117—122.

$$(\alpha.)\qquad \mathfrak{E}dt = Ds_1(J_1 df + \varphi dJ_1),$$

insbesondere in Anwendung auf den Fall, dass die Stromstärke des inducirenden Elementes während der Zeit dt einen endlichen Zuwachs von 0 auf J_1 erlangt.*) Jene Formel (α.) nimmt alsdann folgende Gestalt an:

$$(\beta.)\qquad \mathfrak{E}dt = Ds_1(Y_1 df + \varphi J_1).$$

Dass im zweiten Gliede J_1 (an Stelle des früheren dJ_1) zu setzen ist, unterliegt keinem Zweifel. Fraglich aber erscheint, welcher Werth im ersten Gliede dem Y_1 beizulegen ist.

In der früheren Formel (α.) ist es, mit Bezug auf jenes erste Glied, einerlei, ob dort J_1 selber, oder statt dessen $J_1 + dJ_1$ gesetzt wird, also einerlei, ob daselbst der Werth der Stromstärke zu Anfang oder zu Ende der Zeit dt genommen wird; denn der Unterschied zwischen J_1 und $J_1 + dJ_1$ ist unendlich klein. In der Formel (β.) hingegen scheint eine solche Verwechselung nicht gestattet, weil hier die Stromstärke zu Anfang und zu Ende der Zeit dt die sehr verschiedenen Werthe 0 und J_1 besitzt. Es fragt sich also, ob in der Formel (β.) für Y_1 der Werth 0, oder J_1, oder vielleicht ein gewisser Mittelwerth zu nehmen ist. Um rationell zu verfahren, würde die Zeit dt von Neuem in unendlich viele (etwa n) Zeitelemente zu zerlegen sein, u. s. w.

Glücklicher Weise sind indessen solche Erörterungen nicht erforderlich. Denn man bemerkt sofort, dass das erste Glied der Formel (β.) verschwindend klein ist gegen das zweite, und diesem gegenüber also vernachlässigt werden darf; wodurch jene Formel sich reducirt auf:

$$(\gamma.)\qquad \mathfrak{E}dt = Ds_1 \,.\, \varphi J_1 .$$

Substituirt man für φ seine eigentliche Bedeutung, so ergiebt sich also, hinsichtlich des Satzes (60.) folgender Zusatz:

Erlangt die Stromstärke des inducirenden Elementes Ds_1 während der betrachteten Zeit dt einen *endlichen* Zuwachs von 0 auf J_1, so wird die von ihm während dieser Zeit

*) Solches wird z. B. stattfinden, wenn wir uns einen mit Gleitstellen behafteten Stromring von der Stärke J_1 vorstellen, und unter Ds_1 ein Element verstehen, welches während der Zeit dt in die Strombahn neu eintritt.

in JDs hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ den Werth besitzen:

$$(61.)\qquad \mathfrak{E}dt = Ds_1(\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E})J_1\,,$$

wo Θ, Θ_1, E, ω, $\bar{\omega}$ dieselben Bedeutungen haben wie in (60.).

Um Näheres zu erfahren über die noch unbekannten sieben Functionen $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, μ, ν, ω, $\bar{\omega}$, benutzen wir von Neuem die Eigenschaft (49.γ), indem wir diesmal zur Zerlegung von J_1Ds_1 ein rechtwinkliges Axensystem x, y, z in Anwendung bringen, welches begriffen ist in einer beliebig gegebenen eigenen Bewegung. In Bezug auf dieses System seien

U, V, W die Richtungscosinus von $r(Ds_1 \longrightarrow Ds)$,
A, B, Γ diejenigen des inducirten Elementes Ds,
A_1, B_1, Γ_1 diejenigen des inducirenden Elementes J_1Ds_1;

so dass also Θ, Θ_1, E sich darstellen durch die Formeln:

$$(62.)\qquad \begin{aligned} \Theta &= U\mathrm{A} + V\mathrm{B} + W\Gamma,\\ \Theta_1 &= U\mathrm{A}_1 + V\mathrm{B}_1 + W\Gamma_1,\\ \mathrm{E} &= \mathrm{A}\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}\mathrm{B}_1 + \Gamma\Gamma_1. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (49.γ) spricht sich aus durch die Gleichung:

$$(63.)\qquad \mathfrak{E}dt = \mathfrak{E}^x dt + \mathfrak{E}^y dt + \mathfrak{E}^z dt\,,$$

falls wir nämlich unter $\mathfrak{E}dt$ und $\mathfrak{E}^x dt$, $\mathfrak{E}^y dt$, $\mathfrak{E}^z dt$ diejenigen elektromotorischen Kräfte verstehen, welche in Ds während der Zeit dt hervorgebracht werden würden respective von J_1Ds_1 selber und von seinen drei Componenten $J_1\mathrm{A}_1Ds_1$, $J_1\mathrm{B}_1Ds_1$, $J_1\Gamma_1Ds_1$. Die Kraft $\mathfrak{E}dt$ hat nach (60.) den Werth:

$$(64.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}dt = Ds_1[&J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathrm{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \mu\Theta d\Theta_1 + \nu d\mathrm{E})\\ &+ (\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E})dJ_1]. \end{aligned}$$

Was die Kraft $\mathfrak{E}^x dt$ betrifft, so ist zu beachten, dass das Element J_1Ds_1 gegen das Axensystem x, y, z in beliebiger relativer Bewegung begriffen ist, folglich A, B, Γ in irgend welchen Aenderungen begriffen sind. Zerlegt man also J_1Ds_1, entsprechend den Axen x, y, z, in drei componirende Stromelemente, so werden diese letztern während der Zeit dt ihrer Länge nach sich ändern.

Das der xAxe entsprechende componirende Element besitzt zu Anfang und zu Ende der Zeit dt die Längen A_1Ds_1 und $(\mathrm{A}_1 + d\mathrm{A}_1)Ds_1$,

und kann daher aufgefasst werden als ein Aggregat von zwei Elementen; von diesen besitzt das eine die constant bleibende Länge $A_1 Ds_1$ und eine von J_1 auf $J_1 + dJ_1$ anwachsende Stromstärke, das andere hingegen die Länge $(dA_1)Ds_1$ und eine von 0 auf $J_1 + dJ_1$ anwachsende Stromstärke. Dementsprechend zerfällt die Kraft $\mathfrak{F}^x dt$ ebenfalls in zwei Theile, von denen der eine nach (60.) den Werth hat:

$$A_1 Ds_1 [J_1(\varkappa \Theta U + \bar{\varkappa} A) dr + \lambda U d\Theta + \mu \Theta dU + \nu dA) \\ + (\omega \Theta U + \bar{\omega} A) dJ_1],$$

während der andere nach (61.) dargestellt ist durch

$$(dA_1) Ds_1 (\omega \Theta U + \bar{\omega} A)(J_1 + dJ_1),$$

wo im letzten Factor das gegen J_1 verschwindend kleine dJ_1 fortgelassen werden darf. Man erhält also für die ganze Kraft $\mathfrak{F}^x dt$ den Werth:

$$\mathfrak{F}^x dt = Ds_1 [J_1 A_1 ((\varkappa \Theta U + \bar{\varkappa} A) dr + \lambda U d\Theta + \mu \Theta dU + \nu dA) \\ + (\omega \Theta U + \bar{\omega} A) d(A_1 J_1)],$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{F}^x dt = Ds_1 [J_1 ((\varkappa \Theta U + \bar{\varkappa} A) A_1 dr + \lambda U A_1 d\Theta + \mu \Theta d(U A_1) + \nu d(A A_1)) \\ + (\omega \Theta U + \bar{\omega} A) A_1 dJ_1 + f^x J_1 dA_1].$$

Analoge Werthe resultiren für $\mathfrak{F}^y dt$, $\mathfrak{F}^z dt$; und durch Addition dieser Werthe folgt mit Rücksicht auf (62.) sofort:

$$(65.) \quad \mathfrak{F}^x dt + \mathfrak{F}^y dt + \mathfrak{F}^z dt = \\ = Ds_1 [J_1 ((\varkappa \Theta \Theta_1 + \bar{\varkappa} E) dr + \lambda \Theta_1 d\Theta + \mu \Theta d\Theta_1 + \nu dE) \\ + (\omega \Theta \Theta_1 + \bar{\omega} E) dJ_1 + J_1 (f^x dA_1 + f^y dB_1 + f^z d\Gamma_1)].$$

Hier steht f^x zur Abkürzung für den Ausdruck

$$(\omega \Theta U + \bar{\omega} A) - (\mu \Theta U + \nu A),$$

so dass man also hat:

$$(66.) \quad \begin{aligned} f^x &= (\omega - \mu) \Theta U + (\bar{\omega} - \nu) A, \\ f^y &= (\omega - \mu) \Theta V + (\bar{\omega} - \nu) B, \\ f^z &= (\omega - \mu) \Theta W + (\bar{\omega} - \nu) \Gamma. \end{aligned}$$

Bei beliebigen Lagen, Bewegungen und Veränderungen der betrachteten beiden Elemente JDs und $J_1 Ds_1$ soll nun, zufolge der

Eigenschaft (49.γ), zwischen den Kräften $\mathfrak{E}dt$, $\mathfrak{E}^x dt$, $\mathfrak{E}^y dt$, $\mathfrak{E}^z dt$ jederzeit die Formel (63.):

(67.) $$\mathfrak{E}dt = \mathfrak{E}^x dt + \mathfrak{E}^y dt + \mathfrak{E}^z dt$$

stattfinden. Diese Formel gewinnt durch Substitution der gefundenen Werthe (64.), (65.) folgende Gestalt:

(68.) $$0 = f^x dA_1 + f^y dB_1 + f^z d\Gamma_1 .$$

Sie führt daher, wenn man für f^x, f^y, f^z ihre eigentlichen Bedeutungen (66.) einsetzt, und beachtet, dass dA_1, dB_1, $d\Gamma_1$ durch die Relation $A_1 dA_1 + B_1 dB_1 + \Gamma_1 d\Gamma_1$ mit einander verbunden sind, zu folgenden drei Gleichungen:

(69.) $$\begin{aligned}(\omega - \mu)\Theta U + (\overline{\omega} - \nu)A &= \Phi A_1 ,\\ (\omega - \mu)\Theta V + (\overline{\omega} - \nu)B &= \Phi B_1 ,\\ (\omega - \mu)\Theta W + (\overline{\omega} - \nu)\Gamma &= \Phi \Gamma_1 ,\end{aligned}$$

wo Φ einen unbekannten Factor repräsentirt. Aus diesen Gleichungen (69.) aber folgt sofort, dass die Functionen $(\omega - \mu)$ und $(\overline{\omega} - \nu)$ identisch Null sind. Denn wären beide von Null verschieden, so würde aus (69.) folgen, dass die Richtungen r, Ds, Ds_1 stets in derselben Ebene liegen, was nicht der Fall ist; und wäre andrerseits von jenen Functionen nur eine von Null verschieden, so würde aus (69.) folgen, dass entweder r oder Ds stets mit Ds_1 parallel bleibt, was ebensowenig der Fall ist.

Wir gelangen also zu dem Resultat:

(70.) $$\mu = \omega \qquad \nu = \overline{\omega} ,$$

wodurch die sieben unbekannten Functionen auf fünf reducirt sind. Der in (60.) gefundene Satz kann daher gegenwärtig folgendermassen ausgesprochen werden.

Befinden sich zwei Stromelemente JDs und $J_1 Ds_1$ in irgend welcher Bewegung und die in ihnen enthaltenen Stromstärken J und J_1 in irgend welchem Zustande der Veränderung, so wird die während der Zeit dt von $J_1 Ds_1$ in irgend einem Punkte des Elementes JDs (und zwar in der Richtung dieses Elementes) hervorgebrachte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ einen Werth besitzen, welcher sich darstellen lässt durch:

$$(71.)\quad \mathfrak{E}dt = Ds_1[J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1 + \bar{\omega}d\mathsf{E}) + (\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})dJ_1],$$

oder auch durch:

$$(72.)\quad \mathfrak{E}dt = Ds_1[J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta) + \omega\Theta d(\Theta_1 J_1) + \bar{\omega}d(\mathsf{E}J_1)].$$

Hier sind r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente, und $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$ fünf noch unbekannte Functionen von r.

Beiläufige Bemerkung. Wir bringen die Formel (72.) in Anwendung auf folgende specielle Aufgabe:

»Es sei m irgend ein Punkt im Innern eines (beliebig gestal- »teten) körperlichen Leiters A. Ferner seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ drei von m ausge- »hende auf einander senkrechte und mit A starr verbundene Axen. Der »Körper A sammt dem Axensystem $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mag (der bequemeren »Ausdrucksweise willen) als absolut unbeweglich angesehen »werden«.

»Ausserhalb A und zwar in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$Ebene befinde sich ein con- »stanter elektrischer Strom (J_1, s_1). Der ponderable Träger des »Stromes sei von starrer Gestalt, durch irgend welche starren Arme »mit der $\mathfrak{z}$Axe verbunden, und um diese Axe in Rotation begriffen«.

»Es sollen die (den Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ entsprechenden) Componenten »$\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ derjenigen elektromotorischen Kraft Edt ermittelt »werden, welche irgend ein Element J_1Ds_1 des Stromes während »der Zeit dt im Punkte m hervorbringt«.

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Richtungscosinus einer beliebigen von m ausgehenden (mit A starr verbundenen) Linie, so wird die dieser Linie entsprechende Componente

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}) + \mathfrak{C}\mathfrak{Z})dt$$

der Kraft Edt nach (72.) den Werth besitzen:

$$(\alpha.)\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}) + \mathfrak{C}\mathfrak{Z})dt = \\ = Ds_1[J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta) + \omega\Theta d(\Theta_1 J_1) + \bar{\omega}d(\mathsf{E}J_1)],$$

wo r die Entfernung von m nach J_1Ds_1 und Θ, Θ_1, E die der Linie r, der Richtung $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und der Richtung Ds_1 entsprechenden Ampère'schen Argumente vorstellen. Bei der gegenwärtigen Aufgabe sind r, Θ_1, J_1 constant, so dass also die Formel (α.) sich reducirt auf:

$$(\beta.)\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y}) + \mathfrak{C}\mathfrak{Z})dt = J_1Ds_1[\lambda\Theta_1 d\Theta + \bar{\omega}d\mathsf{E}].$$

Setzt man nun

$$\Theta_1 = \cos\vartheta_1,$$
$$\Theta = \mathfrak{A}\mathfrak{U} + \mathfrak{B}\mathfrak{V} + \mathfrak{C}\mathfrak{W},$$
$$E = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,$$

wo $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1$ die Richtungscosinus von $r(m \longrightarrow Ds_1)$ und Ds_1 vorstellen sollen, und beachtet man, dass $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ constant sind, so folgt:

$$(\gamma.)\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \ldots)dt = J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1(\mathfrak{A}d\mathfrak{U} + \ldots) + \bar{\omega}(\mathfrak{A}d\mathfrak{A}_1 + \ldots)].$$

Hieraus aber folgt, weil die Richtung $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ eine beliebig gewählte war, augenblicklich:

$$(\delta.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X}dt &= J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1 d\mathfrak{U} + \bar{\omega}d\mathfrak{A}_1], \\ \mathfrak{Y}dt &= J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1 d\mathfrak{V} + \bar{\omega}d\mathfrak{B}_1], \\ \mathfrak{Z}dt &= J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1 d\mathfrak{W} + \bar{\omega}d\mathfrak{C}_1]. \end{aligned}$$

Zufolge der gemachten Festsetzungen liegen r und Ds_1 in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ Ebene, während gleichzeitig der Winkel ϑ_1, unter welchem Ds_1 gegen r geneigt ist, constant ist. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{U} = \cos\varphi, && d\mathfrak{U} = -\sin\varphi d\varphi, && \mathfrak{A}_1 = \cos(\varphi+\vartheta_1), && d\mathfrak{A}_1 = -\sin(\varphi+\vartheta_1)d\varphi, \\ &\mathfrak{V} = \sin\varphi, && d\mathfrak{V} = \cos\varphi d\varphi, && \mathfrak{B}_1 = \sin(\varphi+\vartheta_1), && d\mathfrak{B}_1 = \cos(\varphi+\vartheta_1)d\varphi, \\ &\mathfrak{W} = 0, && d\mathfrak{W} = 0, && \mathfrak{C}_1 = 0, && d\mathfrak{C}_1 = 0, \end{aligned}$$

wo φ den Drehungswinkel, nämlich den Winkel zwischen r und der $\mathfrak{x}$ Axe bezeichnet. Somit folgt aus $(\delta.)$:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X}dt &= -J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1\sin\varphi + \bar{\omega}\sin(\varphi+\vartheta_1)]d\varphi, \\ \mathfrak{Y}dt &= +J_1Ds_1[\lambda\cos\vartheta_1\cos\varphi + \bar{\omega}\cos(\varphi+\vartheta_1)]d\varphi, \\ \mathfrak{Z}dt &= 0. \end{aligned}$$

Beiläufig bemerkt, ist diesen Formeln zufolge die Kraft Edt zerlegbar in zwei Kräfte

$$(\zeta.)\quad J_1Ds_1\,.\,\lambda\cos\vartheta_1 d\varphi \quad \text{und} \quad J_1Ds_1\,.\,\bar{\omega}d\varphi,$$

von denen die erstere senkrecht gegen $\mathfrak{z}$ und r, die letztere senkrecht gegen $\mathfrak{z}$ und Ds_1 steht.

Wir gehen über zu dem eigentlichen Zwecke dieser Betrachtungen. — Nach den supponirten Grundeigenschaften (49.β) wird die von einem Stromelemente constanter Stärke hervorgebrachte elektromotorische Kraft Edt immer Null sein, sobald die relative

Lage des Elementes zur inducirten Stelle constant bleibt. Dabei erscheint noch fraglich, ob unter der inducirten Stelle das betreffende unendlich kleine Element des inducirten Körpers, oder der daselbst befindliche mathematische Punkt zu verstehen ist.

Wir werden an der ersteren (als der weiteren) Auffassungsweise festhalten. Alsdann haben die Formeln (ε.) nichts Ungereimtes. Denn die relative Lage des dort betrachteten Stromelementes $J_1 Ds_1$ zu dem in m befindlichen Körperelement ändert sich von Augenblick zu Augenblick, wie deutlich sichtbar wird, wenn man die in dieses Element eingefügten Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ sich vergegenwärtigt.

Wollte man hingegen die letztere (engere) Auffassungsweise adoptiren, so würden im hier betrachteten Falle die Kräfte (ε.) nothwendig Null sein müssen, weil die relative Lage des Stromelementes $J_1 Ds_1$ zu dem mathematischen Punkte m fortdauernd ein und dieselbe bleibt. Alsdann würde also folgen, dass die Functionen λ und $\bar{\omega}$ identisch Null sind.

§. 4.

Anwendung des Princips der lebendigen Kraft.

Es sei gegeben ein System starrer Drahtringe, der Reihe nach bezeichnet mit A, B, C, ... Dieses System A, B, C, ... mag, hinsichtlich seiner näheren Beschaffenheit, hinsichtlich seiner Bewegungen und elektrischen Vorgänge, sowie hinsichtlich der vorhandenen innern und äussern Kräfte, unterworfen gedacht werden den früher (pag. 454—457) gegebenen Determinationen. Zufolge des Princips der lebendigen Kraft findet alsdann (pag. 467) für jedes Zeitelement dt die Formel statt:

$$(73.)\qquad (dT + dQ)_{J,\,\mathrm{eldy.\,U_e}} = dF,$$

wo F eine dem System A, B, C, ... eigenthümliche Function bezeichnet, die lediglich abhängt von der augenblicklichen Beschaffenheit des Systems, also lediglich abhängt von seinen charakteristischen Constanten und Variablen. Benennt man daher diese Constanten und Variablen respective mit

$$(74.\mathrm{a})\qquad c', c'', \ldots,$$

und mit

(74.b) $\pi', \pi'', \ldots; \zeta', \zeta'', \ldots,$

so wird die Function F (um ihre Beschaffenheit besser im Auge zu behalten) zu bezeichnen sein durch $F(c', c'', \ldots, \pi', \pi'', \ldots, \zeta', \zeta'', \ldots)$, die Formel (73.) also auszudrücken sein durch

(75.) $$(dT + dQ)_{\text{eldy. Us}} = dF(c', c'', \ldots, \pi', \pi'', \ldots, \zeta', \zeta'', \ldots).$$

Selbstverständlich sind in (74.b) unter $\pi', \pi'', \ldots$ die Parameter des Systems $A, B, C, \ldots$ zu verstehen, und unter $\zeta', \zeta'', \ldots$ die übrigen charakteristischen Variabeln (vergl. pag. 456).

Unter Anwendung der über die Kräfte elektrodynamischen Ursprungs bereits erlangten Kenntnisse, werden wir für die linke Seite der Formel (75.) einen Ausdruck erhalten, welcher behaftet ist mit den noch unbekannten Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, σ, τ, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$; und die Formel selber wird uns dann behülflich sein zur näheren Bestimmung dieser Functionen.

Unter Zugrundelegung eines absolut festen rechtwinkligen Axensystems x, y, z mögen folgende Bezeichnungen eingeführt sein:

(76.)
- Ds, Ds_1 irgend zwei Elemente der Ringe $A, B, C, \ldots$;
- J, J_1 ihre augenblicklichen Stromstärken;
- r, Θ, Θ_1, E ihre Ampère'schen Argumente (Note. pag. 424);
- x, y, z, x_1, y_1, z_1 ihre Coordinaten;
- $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \Gamma_1$ ihre Richtungscosinus;
- U, V, W die Richtungscosinus von $r(Ds_1 \longrightarrow Ds)$.

Ferner seien folgende Abkürzungen eingeführt:

(77.) $$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathrm{E}, \\ \mathrm{K} &= \varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathrm{E}, \\ \Omega &= \omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E}. \end{aligned}$$

Das vom Element J_1Ds_1, vermöge seiner Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, während der Zeit dt in JDs hervorgebrachte Quantum lebendiger Kraft $(dT_0^1)_{\text{eldy. Us}}$ drückt sich aus durch die Formel:

$$(dT_0^1)_{\text{eldy. Us}} = Xdx + Ydy + Zdz,$$

wo dx, dy, dz die der Zeit dt entsprechenden Veränderungen von x, y, z, andrerseits X, Y, Z die Componenten der von J_1Ds_1 auf JDs ausgeübten ponderomotorischen Kraft elektrodynamischen Ursprungs

vorstellen. Substituirt man für diese Componenten die früher (pag. 475) gefundenen Werthe, welche mit Rücksicht auf (77.) sich darstellen lassen durch:

$$X = JDs \, . \, J_1 Ds_1 \left[\mathsf{P} \frac{x - x_1}{r} + \sigma \Theta \mathsf{A}_1 + \tau \Theta_1 \mathsf{A} \right],$$

$$Y = \text{etc. etc.},$$

so folgt:

$$(dT_0^1)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1JJ_1 \left[\mathsf{P} \left(\frac{x - x_1}{r} dx + \ldots \right) + \sigma\Theta(\mathsf{A}_1 dx + \ldots) + \tau\Theta_1(\mathsf{A} dx + \ldots) \right].$$

Eine analoge Formel ergiebt sich umgekehrt für die Einwirkung von JDs auf J_1Ds_1; man erhält:

$$(dT_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1JJ_1 \left[\mathsf{P} \left(\frac{x_1 - x}{r} dx_1 + \ldots \right) - \sigma\Theta_1(\mathsf{A} dx_1 + \ldots) - \tau\Theta(\mathsf{A}_1 dx_1 + \ldots) \right];$$

denn es ist zu beachten, dass Θ, Θ_1 die Cosinus der Winkel von Ds, Ds_1 gegen die Linie r ($Ds_1 \longrightarrow Ds$) bezeichnen; wendet man sich also von der Einwirkung: (Ds_1 auf Ds) zur Betrachtung der umgekehrten Einwirkung: (Ds auf Ds_1), so gehen die Grössen Θ und Θ_1 über respective in $-\Theta_1$ und $-\Theta$.

Durch Addition der beiden Formeln folgt sofort:

$$(dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1JJ_1(\, dr + \Delta) \,, \tag{78.}$$

wo Δ die Bedeutung hat:

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \sigma\Theta(\mathsf{A}_1 dx + \ldots) + \tau\Theta_1(\mathsf{A} dx + \ldots) \\ & - \sigma\Theta_1(\mathsf{A} dx_1 + \ldots) - \tau\Theta(\mathsf{A}_1 dx_1 + \ldots). \end{aligned} \tag{79.}$$

Die vom Element J_1Ds_1, vermöge seiner Kräfte elektrodynamischen Ursprungs, während der Zeit dt in JDs hervorgebrachte Wärmemenge $(dQ_0^1)_{\text{eldy. Us}}$ kann [vergl. (2.c), pag. 453] ausgedrückt werden durch:

$$(dQ_0^1)_{\text{eldy. Us}} = \mathfrak{E} i \, . \, DV \, . \, dt \,,$$

oder (was dasselbe ist) durch:

$$(dQ_0^1)_{\text{eldy. Us}} = \mathfrak{E} qi \frac{DV}{q} dt \,.$$

Hier bezeichnet DV das Volumen des Elementes Ds, q seinen Querschnitt und i die in ihm vorhandene Strömung, so dass also

$$qi = J \quad \text{und} \quad \frac{DV}{q} = Ds$$

ist; wodurch die Formel übergeht in:

$$(dQ_0^1)_{\text{eldy. Us}} = \mathfrak{E} JDsdt.$$

Ferner bezeichnet $\mathfrak{E}$ diejenige elektromotorische Kraft elektrodynamischen Ursprungs, welche J_1Ds_1 in irgend einem Punkte des Elementes JDs (und zwar in der Richtung desselben) hervorruft. Substituirt man für diese Kraft $\mathfrak{E}$ den früher (pag. 484) gefundenen Werth, welcher mit Rücksicht auf (77.) sich darstellen lässt durch:

$$\mathfrak{E}dt = Ds_1[J_1(\mathsf{K}dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1 + \bar{\omega}d\mathsf{E}) + \Omega dJ_1],$$

so erhält man:

$$(dQ_0^1)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[JJ_1(\mathsf{K}dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1 + \bar{\omega}d\mathsf{E}) + \Omega J dJ_1].$$

Ebenso ergiebt sich für die Einwirkung von Ds auf Ds_1 die analoge Formel:

$$(dQ_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[JJ_1(\mathsf{K}dr + \lambda\Theta d\Theta_1 + \omega\Theta_1 d\Theta + \bar{\omega}d\mathsf{E}) + \Omega J_1 dJ].$$

Durch Addition dieser beiden Formeln folgt sofort:

$$(80.)\quad (dQ_0^1 + dQ_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[JJ_1(2\mathsf{K}dr + (\lambda+\omega)d(\Theta\Theta_1) + 2\bar{\omega}d\mathsf{E}) + \Omega d(JJ_1)].$$

Addirt man diese Formel (80.) zur früheren (78.), so folgt:

$$(81.)\quad (dT_0^1 + dT_1^0 + dQ_0^1 + dQ_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[d(JJ_1\Omega) + JJ_1\Upsilon],$$

wo Υ die Bedeutung hat:

$$(82.\text{a})\quad \Upsilon = (2\mathsf{K} + \mathsf{P})dr + (\lambda+\omega)d(\Theta\Theta_1) + 2\bar{\omega}d\mathsf{E} + \Delta - d\Omega,$$

$$(82.\text{b})\quad = \Pi' d\pi' + \Pi'' d\pi'' + \ldots;$$

der Ausdruck Υ ist nämlich nur abhängig von den Lagen und Lagenänderungen der ponderablen Massen, also ausdrückbar durch die Parameter π', π'', ..., und durch die den betrachteten beiden Elementen Ds, Ds_1 zugehörigen Bogenlängen s, s_1; der in solcher Weise für Υ resultirende Ausdruck soll durch (82.b) angedeutet sein, wo also Π', Π'', ... Functionen vorstellen von π', π'', ... und s, s_1.

Um dasjenige Quantum von lebendiger Kraft und Wärme $(dT + dQ)_{J,\text{ eldy. Us}}$ zu erhalten, welches während der Zeit dt von den innern Kräften elektrodynamischen Ursprungs im ganzen Systeme A, B, C, ... hervorgebracht wird, hat man den Ausdruck (81.) der Reihe nach zu bilden für jedwedes Elementenpaar Ds, Ds_1, und all' diese Ausdrücke zu summiren. Somit ergiebt sich:

(83.) $(dT+dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}} = d[\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'(DsDs_1JJ_1\Omega)] + \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'(DsDs_1JJ_1\Upsilon)$,

wo unter $\tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'$ eine Summation über sämmtliche Paare Ds, Ds_1 zu verstehen ist, bei welcher jedes Paar nur einmal vorkommt. *)

Substituirt man den Werth (83.) in die aus dem Princip der lebendigen Kraft entsprungene Anforderung (75.), so folgt sofort:

$$(84.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'(DsDs_1JJ_1\Upsilon) = df(c', c'', \ldots, \pi', \pi'', \ldots, \zeta', \zeta'', \ldots),$$
$$= \frac{\partial f}{\partial \pi'}d\pi' + \frac{\partial f}{\partial \pi''}d\pi'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \zeta'}d\zeta' + \frac{\partial f}{\partial \zeta''}d\zeta'' + \ldots,$$

wo f [ebenso wie das in (75.) enthaltene F] eine unbekannte Function vorstellt, welche lediglich abhängen darf von den charakteristischen Constanten und Variablen des gegebenen Systems.

Die linke Seite der Formel (84.) wird, falls man für Υ den Werth (82.b) substituirt denkt, ein Differentialausdruck sein von der Form $(V'd\pi' + V''d\pi'' + \ldots)$. Aus dieser Formel (84.) folgt daher, dass

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta'}, \frac{\partial f}{\partial \zeta''}, \ldots .$$

identisch Null sind, dass also f unabhängig ist von den ζ', ζ'', ... Somit reducirt sich die Formel (84.) auf:

$$(85.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'(DsDs_1JJ_1\Upsilon) = df(c', c'', \ldots, \pi', \pi'', \ldots).$$

Das Differential rechter Hand ist unabhängig von den Variablen ζ', ζ'', ...; zu diesen Variablen gehören aber auch die in den einzelnen Elementen des Systems vorhandenen Stromstärken J; folglich hat dieses Differential ein und denselben Werth, völlig einerlei ob die in den einzelnen Elementen des Systemes vorhandenen elektrischen Strömungen irgend welche Werthe besitzen, oder ob dieselben durchweg Null sind. Im letztern Fall ist aber dieses Differential, wie aus der linken Seite der Formel (85.) hervorgeht, gleich Null; folglich ist dasselbe immer gleich Null.

Die Formel (85.) geht daher über in:

$$(86.)\qquad \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'(DsDs_1JJ_1\Upsilon) = 0.$$

Unsere Untersuchungen sind gültig für jeden Augenblick der betrachteten Vorgänge, also z. B. auch gültig für den Augenblick des Anfangszustandes. Während dieses Anfangszustandes hatten aber die

*) Vergl. pag. 465, Note.

Stromstärken J in den einzelnen Elementen Ds des Systems willkührlich gegebene Werthe, beliebig verschieden für die verschiedenen Elemente eines einzelnen Ringes. Somit folgt aus (86.), dass zur Zeit des Anfangszustandes der Factor Υ gleich Null sein muss für jedwedes Elementenpaar. Mit andern Worten:

Befinden sich zwei Elemente Ds, Ds_1 in beliebiger Bewegung, so ist der denselben entsprechende Ausdruck Υ immer gleich Null. Es bleibt nun übrig, die Consequenzen aufzusuchen, welche aus dieser Gleichung:

$$\Upsilon = 0 \tag{87.}$$

sich ergeben in Betreff der unbekannten Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, σ, τ, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$.

Die Gleichung (87.) gewinnt, wenn man für Υ seine eigentliche Bedeutung (82.a) substituirt, folgende Gestalt:

$$(2\mathrm{K} + \mathrm{P})dr + (\lambda + \omega)d(\Theta\Theta_1) + 2\bar{\omega}d\mathrm{E} + \Delta - d\Omega = 0,$$

oder, falls man für P, K, Ω, Δ ihre Werthe (77.), (79.) substituirt, folgende:

$$\begin{aligned}((2\varkappa + \varrho - \omega')\Theta\Theta_1 + (2\bar{\varkappa} + \bar{\varrho} - \bar{\omega}')\mathrm{E})dr + \lambda d(\Theta\Theta_1) + \bar{\omega}d\mathrm{E} \\ + \sigma\Theta(\mathrm{A}_1 dx + \ldots.) + \tau\Theta_1(\mathrm{A}dx + \ldots.) \\ - \sigma\Theta_1(\mathrm{A}dx_1 + \ldots.) - \tau\Theta(\mathrm{A}_1 dx_1 + \ldots.) = 0.\end{aligned} \tag{88.}$$

Diese Gleichung muss stattfinden für beliebige Lagen und Bewegungen der beiden Elemente Ds, Ds_1, also z. B. auch stattfinden, wenn man Ds, Ds_1, r starr mit einander verbindet, und die so erhaltene starre Figur um den Punkt x_1, y_1, z_1 (d. i. um den einen Endpunkt von r) in Drehung versetzt. Alsdann aber bleiben r, Θ, Θ_1, E, x_1, y_1, z_1 constant, so dass die Gleichung (88.) für diesen speciellen Fall die einfachere Gestalt annimmt:

$$\sigma\Theta(\mathrm{A}_1 dx + \ldots.) + \tau\Theta_1(\mathrm{A}dx + \ldots.) = 0. \tag{89.}$$

Diese Gleichung aber ist, weil dx, dy, dz während einer solchen drehenden Bewegung durch die Relation $Udx + Vdy + Wdz = 0$ verbunden sind, äquivalent mit folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sigma\Theta\mathrm{A}_1 + \tau\Theta_1\mathrm{A} &= \Phi U, \\ \sigma\Theta\mathrm{B}_1 + \tau\Theta_1\mathrm{B} &= \Phi V, \\ \sigma\Theta\Gamma_1 + \tau\Theta_1\Gamma &= \Phi W,\end{aligned} \tag{90.}$$

wo Φ einen unbestimmten Factor vorstellt. Hieraus erkennt man sofort, dass die Functionen

$$(91.)\qquad \sigma,\ \tau$$

identisch Null sind. Denn wären beide von Null verschieden, so würde aus (90.) folgen, dass die Richtungen Ds, Ds_1, r stets in derselben Ebene liegen, was nicht der Fall; und wäre andererseits nur eine der beiden Functionen von Null verschieden, so würde aus (90.) folgen, dass stets entweder Ds_1 oder Ds parallel zu r ist, was wiederum nicht der Fall.

Durch das Ergebniss (91.) reducirt sich die für jede beliebige Bewegung der Elemente Ds, Ds_1 gültige Formel (88.) auf:

$$(92.)\qquad ((2\varkappa+\varrho-\omega')\Theta\Theta_1+(2\bar{\varkappa}+\bar{\varrho}-\bar{\omega}')\mathrm{E})dr+\lambda d(\Theta\Theta_1)+\bar{\omega}d\mathrm{E}=0.$$

Hieraus aber folgt, weil die Grössen r, Θ, Θ_1, E und dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathrm{E}$ bei einer solchen beliebigen Bewegung völlig willkührlich und von einander unabhängig sind, dass die vier Functionen

$$(93.)\qquad 2\varkappa+\varrho-\omega',\qquad 2\bar{\varkappa}+\bar{\varrho}-\bar{\omega}',\qquad \lambda,\qquad \bar{\omega}$$

identisch Null sind.

Durch Zusammenstellung der Ergebnisse (91.), (93.) erhalten wir

$$(94.a)\qquad \sigma=\tau=\lambda=\bar{\omega}=0,\qquad \varkappa=\tfrac{1}{2}(\omega'-\varrho),\qquad \bar{\varkappa}=-\tfrac{1}{2}\bar{\varrho};$$

so dass also die Grössen P, K, Ω (77.) fortan darstellbar sind durch:

$$(94.b)\qquad \begin{aligned}\mathrm{P}&=\varrho\Theta\Theta_1+\bar{\varrho}\mathrm{E},\\ \mathrm{K}&=\tfrac{1}{2}\omega'\Theta\Theta_1-\tfrac{1}{2}\mathrm{P},\\ \Omega&=\omega\Theta\Theta_1.\end{aligned}$$

Die für die Kräfte X, Y, Z und $\mathfrak{E}dt$ erhaltenen Formeln (pag. 475 und 484) gewinnen daher folgende Gestalt:

$$X=JDs\,.\,J_1Ds_1\,.\,\mathrm{P}\frac{x-x_1}{r},$$

$$Y=JDs\,.\,J_1Ds_1\,.\,\mathrm{P}\frac{y-y_1}{r},$$

$$Z=JDs\,.\,J_1Ds_1\,.\,\mathrm{P}\frac{z-z_1}{r},$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}dt&=Ds_1\left[J_1(\mathrm{K}dr+\omega\Theta d\Theta_1)+\omega\Theta\Theta_1 dJ_1\right],\\ &=Ds_1\left[J_1\frac{\Theta\Theta_1 d\omega-\mathrm{P}dr}{2}+\omega\Theta d(\Theta_1 J_1)\right];\end{aligned}$$

und wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Die von $J_1 Ds_1$ auf JDs ausgeübte ponderomotorische Kraft fällt zusammen mit der Verbindungslinie r, und besitzt (repulsiv gerechnet) die Stärke:

$$(95.)\qquad R = JDs \, . \, J_1 Ds_1 \, . \, \mathsf{P} = JDs \, . \, J_1 Ds_1 (\varrho \Theta \Theta_1 + \bar{\varrho} \mathsf{E}) \, .$$

Andrerseits besitzt die von $J_1 Ds_1$ während der Zeit dt in JDs erzeugte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E} dt$ (gerechnet in der Richtung von Ds) den Werth:

$$(96.)\qquad \mathfrak{E} dt = J_1 Ds_1 \left(\frac{\Theta \Theta_1 d\omega - \mathsf{P} dr}{2} + \omega \Theta d\Theta_1 \right) + (dJ_1) Ds_1 \, . \, \omega \Theta \Theta_1 \, ,$$

$$= J_1 Ds_1 \left(-\frac{\mathsf{P} dr}{2} + \frac{d(\omega \Theta \Theta_1) + \omega (\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)}{2} \right) + (dJ_1) Ds_1 \, . \, \omega \Theta \Theta_1 .$$

Dabei sind unter r, Θ, Θ_1, E die Ampère'schen Argumente der beiden Elemente, ferner unter ϱ, $\bar{\varrho}$, ω drei noch unbekannte Functionen von r zu verstehen;

Aus der in diesem §. angestellten Untersuchung ergeben sich noch andere Dinge, die der Erwähnung werth scheinen. Aus (83.) und (87.) folgt nämlich:

$$(97.)\qquad (dT + d\dot{Q})_{J, \text{ eldy. Us}} = d[\tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (Ds Ds_1 J J_1 \Omega)] \, ,$$
$$= d[\tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (Ds Ds_1 J J_1 \Theta \Theta_1 \omega)] \, ;$$

denn nach (94.b) ist Ω identisch mit $\omega \Theta \Theta_1$. Die früher angegebenen Formeln (47.a, b, c):

$$(dT)_{J, \text{ ord. Us}} = - dO \, ,$$
$$(dT + dQ)_{J, \text{ elst. Us}} = - dU \, ,$$
$$(dT + dQ)_{J, \text{ eldy. Us}} = - d(\mathfrak{J} - O - U)$$

nehmen daher gegenwärtig die bestimmtere Gestaltung an:

$$(dT)_{J, \text{ ord. Us}} = - dO \, ,$$
$$(98.)\qquad (dT + dQ)_{J, \text{ elst. Us}} = - dU \, ,$$
$$(dT + dQ)_{J, \text{ eldy. Us}} = - d[-\tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (Ds Ds_1 J J_1 \Theta \Theta_1 \omega)] .$$

Somit folgt:

$$(99.)\qquad \mathfrak{J} = O + U - \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (Ds Ds_1 J J_1 \Theta \Theta_1 \omega) \, .$$

Substituirt man diesen Werth von $\mathfrak{J}$ in (32.), so erhält man für das Capital $\mathfrak{C}$ des betrachteten Systemes den Ausdruck:

$$(100.)\qquad \mathfrak{C} = T + \Sigma (DM \, . \, C(\vartheta)) + O + U - \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma (Ds Ds_1 J J_1 \Theta \Theta_1 \omega) \, ;$$

wobei von Neuem zu erinnern ist, dass im letzten Gliede unter der

Operation $\frac{1}{2}\Sigma\Sigma$ eine Summation zu verstehen ist, bei welcher jedwedes Paar Ds, Ds_1 nur einmal in Betracht kommt.

§. 5.

Ueber eine gewisse Summe von elektromotorischen Kräften.

Unter Zugrundelegung der Formel (96.) soll die Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte berechnet werden, welche ein gleichförmiger elektrischer Stromring (J_1, s_1) hervorbringt in irgend einem Drahtringe (s).

Beide Ringe seien biegsam, behaftet mit Gleitstellen, und begriffen in willkührlichen Bewegungen, durch welche (in Folge der Biegsamkeit und der Gleitstellen) nicht nur die räumliche Lage, sondern auch die Gestalt der Ringe von Augenblick zu Augenblick sich ändert.

Die im Augenblick t im Ringe (s) enthaltenen Elemente seien bezeichnet mit Ds, andrerseits*) aber mögen diejenigen Elemente, welche erst während der Zeit dt in den Ring eintreten (oder aus ihm ausscheiden) bezeichnet sein mit Δs. Analoge Bedeutungen mögen Ds_1 und Δs_1 für den Ring (s_1) haben.

Unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(101.)\qquad \begin{aligned} \mathsf{P} &= \varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathsf{E}, \\ \Omega &= \omega\Theta\Theta_1, \\ d\Psi &= -\frac{\mathsf{P}dr}{2} + \frac{d\Omega + \omega(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)}{2}, \end{aligned}$$

ergeben sich aus (96.) die beiden Formeln:

$$(102.)\qquad \begin{aligned} Ds\,.\,\mathfrak{E}dt &= DsDs_1(J_1 d\Psi + \Omega dJ_1), \quad \text{(Wirkung von } Ds_1 \text{ auf } Ds), \\ Ds\,.\,\mathfrak{E}dt &= Ds\Delta s_1(\,0 \quad + \Omega J_1), \quad \text{(Wirkung von } \Delta s_1 \text{ auf } Ds); \end{aligned}$$

von denen die erstere diejenige elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$ darstellt, welche Ds_1 während der Zeit dt in irgend einem Punkte von Ds (und zwar in der Richtung von Ds) hervorbringt; während die letztere in analoger Weise sich bezieht auf Δs_1 und Ds.

Repräsentirt nun $\mathfrak{S}dt$ die Summe sämmtlicher elektromotorischer

---

*) Genaueres über diese Bezeichnungsweise ist früher angegeben, z. B. im Satze (55.) auf pag. 441, unten.

Kräfte, welche der gleichförmige Stromring (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (s) hervorruft, so folgt *) aus (102.):

$$(103.)\quad \mathfrak{S}dt = J_1 . (\Sigma\Sigma d\Psi DsDs_1 + \Sigma\Sigma\Omega Ds\Delta s_1) + (dJ_1) . \Sigma\Sigma\Omega DsDs_1 ;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(104.)\quad \mathfrak{S}dt = d(J_1 . \Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) + J_1\mathfrak{H}dt,$$

wo alsdann $\mathfrak{H}dt$ die Bedeutung hat:

$$(105.)\quad 2\mathfrak{H}dt = 2\Sigma\Sigma d\Psi DsDs_1 + 2\Sigma\Sigma\Omega Ds\Delta s_1 - 2d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) .$$

Es handelt sich nun (für spätere Zwecke) um eine gewisse Transformation von $\mathfrak{H}dt$, und zwar um eine zwiefache.

Erste Transformation von $\mathfrak{H}dt$. — Substituirt man in (105.) für das letzte Glied den (mit Rücksicht auf die vorhandenen Gleitstellen) für dasselbe sich ergebenden Werth:

$$(\alpha.)\quad 2d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) = 2\Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1 + 2\Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1 + \Delta sDs_1) ,$$

und gleichzeitig für $d\Psi$ den Werth (101.), so folgt:

$$(\beta.)\quad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr + d\Omega - \omega(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)]DsDs_1 \\ - 2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1 ,$$

oder, falls man für P, Ω ihre eigentlichen Bedeutungen (101.) eintreten lässt:

$$(\gamma.)\quad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[((\rho + \omega')\Theta\Theta_1 + \bar{\rho}\mathsf{E})dr + 2\omega\Theta_1 d\Theta]DsDs_1 \\ - \Sigma\Sigma 2\omega\Theta\Theta_1\Delta sDs_1 .$$

Hieraus aber ergiebt sich, durch Anwendung einer früher (pag. 447) entwickelten Transformationsformel, sofort:

$$(\delta.)\quad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right] drDsDs_1 ,$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{aligned} L &= (\rho + \bar{\rho} + \omega') - 2\omega' , \\ M &= \quad r\bar{\rho} \qquad\quad - 2\omega . \end{aligned}$$

Zweite Transformation von $\mathfrak{H}dt$. — Es ist identisch:

$$(\zeta.)\quad \Sigma\Sigma\omega(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)DsDs_1 = -\Sigma\Sigma\omega\Theta\Theta_1(Ds\Delta s_1 - \Delta sDs_1) ,$$

wie solches unmittelbar folgt aus der schon citirten Transformationsformel (pag. 447). Andrerseits ist nach $(\alpha.)$:

*) Genaueres hierüber findet sich in meiner »Theorie der elektrischen Kräfte«, pag. 149, 150.

$(\eta.)$ $\Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1 = d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) - \Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1 + \Delta sDs_1)$,

oder falls man $2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1$ auf beiden Seiten hinzufügt:

$(\vartheta.)$ $\Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1 + 2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1 = d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) - \Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1 - \Delta sDs_1)$.

Durch Subtraction von $(\zeta.)$ und $(\vartheta.)$ folgt sofort:

$$(\iota.)\qquad \Sigma\Sigma[d\Omega - \omega(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)]DsDs_1 + 2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1 = \\ = d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1);$$

denn es ist zu beachten, dass Ω identisch ist mit $\omega\Theta\Theta_1$, (101.).

Dieser Ausdruck $(\iota.)$ repräsentirt die letzten Glieder der Formel $(\beta.)$. Substituirt man für jene letzten Glieder den durch $(\iota.)$ dargebotenen Werth, so gewinnt die Formel $(\beta.)$ folgende Gestalt:

$$(\varkappa.)\qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma \mathrm{P}drDsDs_1 - d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1).$$

Wir gelangen, durch die Formel (104.) und unter Anwendung der beiderlei Transformationen (δ, ε) und $(\varkappa.)$ zu folgendem Resultate.

Sind zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in beliebigen Bewegungen begriffen, und befindet sich im letztern ein stets *gleichförmig* bleibender Strom J_1, so wird die Summe $\mathfrak{S}dt$ der vom Ringe (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (s) hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte den Werth besitzen:

$$(106.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 . \Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) + J_1\mathfrak{H}dt;$$

die hier auftretende Grösse $\mathfrak{H}dt$ ist einerseits darstellbar durch:

$$(107.)\qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] drDsDs_1,$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

$$L = (\varrho + \bar{\varrho} + \omega') - 2\omega',$$
$$M = \qquad r\bar{\varrho} \quad - 2\omega,$$

andrerseits aber auch darstellbar durch:

$$(108.)\qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma \mathrm{P}drDsDs_1 - d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1).$$

Dabei stehen P, Ω zur Abkürzung für die in (101.) genannten Aggregate.

§. 6.

Anwendung eines Specialfalls des elektromotorischen Integralgesetzes.

Ein besonders zuverlässiges Mittel zur näheren Bestimmung der in unsern Formeln noch enthaltenen unbekannten Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, ω dürfte dargeboten sein durch das von meinem Vater aufgestellte elektromotorische Integralgesetz *), namentlich aber durch denjenigen Specialfall dieses Gesetzes, welcher auf Ringe von unveränderlicher Gestalt, also auf Ringe sich bezieht, die weder biegsam noch auch mit Gleitstellen behaftet sind. In solcher Beschränkung kann das genannte Gesetz folgendermassen ausgesprochen werden.

Sind zwei *starre* Ringe (s) und (s_1) in beliebigen Bewegungen begriffen, und befindet sich in letzterem ein stets *gleichförmig* bleibender Strom J_1, so hat die Summe $\mathfrak{S}dt$ der von demselben während der Zeit dt im Ringe (s) erzeugten elektromotorischen Kräfte den Werth:

$$\mathfrak{S}dt = d(J_1 f)\,, \tag{109.}$$

wo f lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage der beiden Ringe.

Durch Combination der vorhin entwickelten Formel (106.) mit diesem Gesetz (109.) folgt sofort:

$$d(J_1 . \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1) + J_1\mathfrak{H}dt = d(J_1 f)\,,$$

d. i.,

$$(dJ_1) . \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1 + J_1[d(\Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1) + \mathfrak{H}dt] = (dJ_1)f + J_1 df\,,$$

eine Formel, welche offenbar nur dadurch bestehen kann, dass die mit J_1 und dJ_1 behafteten Glieder einzeln einander gleich sind. Somit erhält man:

$$f = \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1\,,$$
$$df = d(\Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1) + \mathfrak{H}dt\,;$$

hieraus aber folgt sofort:

$$\mathfrak{H} = 0\,, \tag{110.}$$

---

*) F. Neumann: Ueber ein allgem. Princip der mathematischen Theorie inducirter elektrischer Ströme. Abh. der Berliner Akad. vom 9. August, 1847.

oder, falls man für $\mathfrak{H}$ seine eigentliche Bedeutung (107.) einsetzt:

$$(111.) \qquad \Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] drDsDs_1 = 0.$$

Diese Formel (110.) oder (111.) muss in derselben Ausdehnung gültig sein, wie das zu Grunde gelegte Gesetz (109.), also gültig sein für willkührliche Bewegungen der beiden starren Ringe. Hieraus aber folgt, durch Anwendung eines früheren Satzes (p. 440), dass L, M identisch verschwinden müssen. Somit erhält man:

$$(112.) \qquad \begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \end{cases} \quad \text{das ist:} \quad \begin{cases} \varrho + \bar{\varrho} = \omega', \\ r\bar{\varrho} \;\; = 2\omega, \end{cases}$$

und folglich:

$$(113.) \qquad \begin{cases} \varrho = -\frac{2\omega}{r} + \omega', \\ \bar{\varrho} = +\frac{2\omega}{r}. \end{cases}$$

Hiemit sind die unbekannten Functionen auf eine reducirt, nämlich auf ω.

§. 7.

Die aus der entwickelten Theorie fliessenden Integralgesetze.

Nachdem wir mit Hülfe des eben betrachteten Specialfalles starrer Ringe nachgewiesen haben, dass zwischen ϱ, $\bar{\varrho}$, ω die Relationen (112.), (113.) stattfinden, und dass also die mit L, M bezeichneten Aggregate dieser Functionen identisch Null sind, wenden wir uns von Neuem zur Betrachtung des allgemeinen Falles.

Wir denken uns also zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1), welche in beliebigen Bewegungen begriffen, und von gleichförmigen Strömen J und J_1 durchflossen sind. Für jedes Zeitelement dt gelten alsdann die in (106.), (107.), (108.) gefundenen Formeln:

$$(114.) \qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 \,.\, \Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) + J_1\mathfrak{H}dt,$$

$$(115.) \qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] drDsDs_1,$$

$$(116.) \qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\mathrm{P}drDsDs_1 - d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1).$$

Da L, M, wie wir gefunden haben, identisch Null sind, so folgt

aus (115.), dass $\mathfrak{H}$ (trotz des hier betrachteten allgemeinen Falles) ebenfalls identisch Null ist. Somit reduciren sich die Formeln (114.) und (116.) auf:

$$(117.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 . \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1),$$

$$(118.)\qquad \Sigma\Sigma \mathrm{P} dr Ds Ds_1 = - d(\Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1).$$

Multiplicirt man die letzte Formel mit JJ_1, und beachtet man, dass nach (95.)

$$JJ_1 \mathrm{P} Ds Ds_1 = R$$

ist, so erhält man:

$$(119.)\qquad \Sigma\Sigma R dr = - JJ_1 . d(\Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1).$$

Setzt man endlich zur Abkürzung:

$$(120.)\qquad Q = \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1 = \Sigma\Sigma\omega\Theta\Theta_1 Ds Ds_1,$$

so gewinnen die beiden Formeln (117.) und (119.) folgende Gestalt:

$$(121.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 Q),$$

$$(122.)\qquad \Sigma\Sigma R dr = - JJ_1 dQ;$$

so dass sich also für zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe, die in beliebigen Bewegungen begriffen, und von gleichförmigen Strömen durchflossen sind, folgende zwei Gesetze ergeben:

Das elektromotorische Integralgesetz. — Die Summe der vom Ringe (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (J, s) hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte ist gleich dem Zuwachs von $J_1 Q$.

Das ponderomotorische Integralgesetz. — Die während der Zeit dt von den Ringen (J, s) und (J_1, s_1) auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit ist gleich $(-1)JJ_1$, multiplicirt mit dem Zuwachs von Q.

Der Ausdruck Q (120.), welcher lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage und Gestalt der beiden Ringe, wird zu bezeichnen sein als das elektrodynamische Potential der Ringe, bezogen auf die Stromeinheit.

Es ist wohl zu beachten, dass diese beiden Gesetze sich hier als allgemein gültig ergeben haben, einerlei ob die Ringe starr oder biegsam, ob sie consistent oder mit Gleitstellen versehen sind.

Ein specieller Fall des einen Gesetzes war (in §. 6.) als

Vehicel benutzt worden zur näheren Bestimmung der Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, ω. Hiedurch aber hat unsere Theorie eine Gestalt erlangt, bei welcher sie beide Gesetze, und zwar beide in grösster Allgemeinheit liefert.

§. 8.

Die aus der entwickelten Theorie fliessenden Elementargesetze.

Substituirt man in den Formeln (95.), (96.):

$$R = JJ_1 Ds Ds_1 \mathsf{P} = JJ_1 Ds Ds_1 (\varrho \Theta\Theta_1 + \bar{\varrho} \mathsf{E}),$$

$$\mathfrak{E} dt = Ds_1 \left[J_1 \frac{\Theta\Theta_1 d\omega - \mathsf{P} dr}{2} + \omega \Theta d(\Theta_1 J_1) \right]$$

für ϱ, $\bar{\varrho}$ die gefundenen Werthe (113):

$$\varrho = \frac{d\omega}{dr} - \frac{2\omega}{r},$$

$$\bar{\varrho} = \frac{2\omega}{r},$$

so erhält man:

$$R = JJ_1 Ds Ds_1 \left[\frac{2\omega}{r} (\mathsf{E} - \Theta\Theta_1) + \frac{d\omega}{dr} \Theta\Theta_1 \right], \tag{123.}$$

$$\mathfrak{E} dt = Ds_1 \left[\frac{\omega d(r J_1 \Theta_1)}{r} \Theta - \frac{J_1 \omega dr}{r} \mathsf{E} \right]. \tag{124.}$$

Dieses $\mathfrak{E}dt$ repräsentirt die Componenten der **eigentlich hervorgebrachten** elektromotorischen Kraft *Edt*, genommen nach der Richtung von *Ds*. Bezeichnet man die Componenten dieser eigentlichen Kraft *Edt* nach drei mit *Ds* starr verbundenen (auf einander senkrechten) Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, durch $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$, und die Richtungscosinus von *Ds* in Bezug auf diese Axen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist offenbar:

$$\mathfrak{E} dt = (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}\mathfrak{Z}) dt. \tag{α.}$$

Ferner ist:

$$\Theta = \mathfrak{A}\mathfrak{U} + \mathfrak{B}\mathfrak{V} + \mathfrak{C}\mathfrak{W}, \tag{β.}$$

$$\mathsf{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1, \tag{γ.}$$

falls man nämlich unter $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ die Richtungscosinus von Ds_1 und von $r(Ds_1 \longrightarrow Ds)$ versteht. Durch Substitution der Ausdrücke (α.), (β.), (γ.) in (124.) folgt:

$$(125.)\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \ldots)dt = Ds_1\left[\frac{\omega d(rJ_1\Theta_1)}{r}(\mathfrak{A}\mathfrak{U} + \ldots) - \frac{J_1\omega dr}{r}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \ldots)\right].$$

Denken wir uns nun für den Augenblick an Stelle des linearen Leiters Ds einen körperlichen Leiter, der ebenfalls mit dem Systeme $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ starr verbunden ist; — alsdann repräsentiren $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ die Componenten der in einem Punkte m dieses körperlichen Leiters erzeugten elektromotorischen Kraft Edt, während gleichzeitig $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Richtungscosinus einer von m ausgehenden, im Innern dieses Leiters willkührlich gewählten Richtung vorstellen. Folglich müssen in der Gleichung (125.) die den Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entsprechenden Glieder einzeln einander gleich sein; so dass sich also ergiebt:

$$(126.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X}dt &= Ds_1\left[\frac{\omega d(rJ_1\Theta_1)}{r}\mathfrak{U} - \frac{J_1\omega dr}{r}\mathfrak{A}_1\right], \\ \mathfrak{Y}dt &= Ds_1\left[\frac{\omega d(rJ_1\Theta_1)}{r}\mathfrak{B} - \frac{J_1\omega dr}{r}\mathfrak{B}_1\right], \\ \mathfrak{Z}dt &= Ds_1\left[\frac{\omega d(rJ_1\Theta_1)}{r}\mathfrak{W} - \frac{J_1\omega dr}{r}\mathfrak{C}_1\right]; \end{aligned}$$

und hieraus folgt sofort

Das elektromotorische Elementargesetz. — Die von einem Stromelement J_1Ds_1 während der Zeit dt in irgend einem Punkte m eines (linearen oder körperlichen) Leiters hervorgebrachte elektromotorische Kraft Edt ist zerlegbar in *zwei* Kräfte:

$$(127.)\quad + Ds_1\frac{\omega d(rJ_1\Theta_1)}{r} \quad \text{und} \quad - Ds_1\frac{\omega . J_1 dr}{r},$$

von denen die erstere die Richtung $r(Ds_1 \longrightarrow m)$, die letztere die Richtung J_1 besitzt. Dabei bezeichnet Θ_1 den Cosinus des zwischen den eben genannten Richtungen liegenden Winkels, und ω eine vorläufig noch unbekannte Function von r.

Andrerseits ergiebt sich aus (123.) für die von irgend zwei Stromelementen JDs und J_1Ds_1 auf einander ausgeübte ponderomotorische Einwirkung folgendes Resultat.

Das ponderomotorische Elementargesetz. — Die von J_1Ds_1 während der Zeit dt auf JDs ausgeübte ponderomotorische Kraft Rdt fällt ihrer Richtung nach zusammen mit der Verbindungslinie r der beiden Elemente, und besitzt, im Sinne $(Ds_1 \longrightarrow Ds)$ gerechnet, die Stärke:

(128.) $$Rdt = JJ_1 DsDs_1 \left[\frac{2\omega}{r}\,(\mathrm{E} - \Theta\Theta_1) + \frac{d\omega}{dr}\,\Theta\Theta_1\right] dt,$$

wo ω die schon in (127.) genannte Function vorstellt, während Θ, Θ_1, E die den beiden Elementen zugehörigen Ampère'schen Argumente bezeichnen.

§. 9.

Die Elementargesetze für den Fall beträchtlicher Entfernungen.

Für das Potential P oder JJ_1Q zweier gleichförmiger Stromringe (J, s) und (J_1, s_1) haben wir in (120.) den Werth gefunden:

(129.) $$P = JJ_1Q = JJ_1 . \Sigma\Sigma'\omega\Theta\Theta_1 DsDs_1,$$

wo ω eine noch unbekannte Function von r vorstellt.

Der gewöhnlich für dieses Potential adoptirte Werth lautet bekanntlich:

(130.) $$P = JJ_1Q = -A^2JJ_1 . \Sigma\Sigma'\frac{\Theta\Theta_1 DsDs_1}{r},$$

wo A^2 die Zahl $\frac{1}{2}$ oder die Zahl 1 vorstellt, je nachdem man das (von Ampère und meinem Vater benutzte) elektrodynamische, oder aber das elektromagnetische Maasssystem zu Grunde legt.

Aus (129.) und (130.) folgt sofort:

$$\Sigma\Sigma'\omega\Theta\Theta_1 DsDs_1 = -A^2\Sigma\Sigma'\frac{\Theta\Theta_1 DsDs_1}{r},$$

oder (was dasselbe ist):

$$\Sigma\Sigma\left(\omega + \frac{A^2}{r}\right)\Theta\Theta_1 DsDs_1 = 0.$$

Diese Gleichung, welche stattfinden soll für je zwei Ringe von beliebiger Lage und Gestalt, führt [unter Anwendung des Satzes (22.), pag. 432)] sofort zu dem Resultat, dass

(131.) $$\omega = -\frac{A^2}{r}$$

ist.

Dass das Potential P für den Fall beträchtlicher Entfernungen den Werth (130.) wirklich besitzt, dürfte (auf Grund zahlreicher experimenteller Untersuchungen) als unzweifelhaft feststehend zu betrachten sein. Solches aber zugegeben, folgt alsdann aus den vorstehenden Erörterungen sofort, dass der in (131.) für ω gefundene Werth für den Fall beträchtlicher Entfernungen keinem Zweifel unterworfen sein kann.

Durch Einführung dieses Werthes (131.) erlangen die Gesetze (127.), (128.) folgende Gestalt:

Das elektromotorische Elementargesetz. — Die Kraft Edt ist zerlegbar in die beiden Kräfte:

$$(132.) \qquad -A^2 Ds_1 \frac{d(rJ_1\Theta_1)}{r^2} \quad \text{und} \quad +A^2 Ds_1 \frac{J_1 dr}{r^2},$$

erstere gerechnet in der Richtung $r(Ds_1 \longrightarrow m)$, letztere gerechnet in der Richtung J_1.

Das ponderomotorische Elementargesetz. — Die von $J_1 Ds_1$ auf JDs ausgeübte ponderomotorische Kraft Rdt hat die Stärke:

$$(133.) \qquad Rdt = A^2 . JJ_1 Ds Ds_1 \frac{3\Theta\Theta_1 - 2E}{r^2} dt,$$

gerechnet in der Richtung $(Ds_1 \longrightarrow Ds)$.

Auf das Gesetz (132.) habe ich schon bei früherer Gelegenheit*) aufmerksam gemacht, obwohl der Weg, auf welchem ich damals zu demselben gelangte, ein wesentlich anderer war.

Vor allen Dingen ist aber zu bemerken, dass das in (133.) ausgesprochene ponderomotorische Gesetz *identisch ist mit dem Ampère'schen Gesetz.* Ampère stützte sich bei Ableitung dieses Gesetzes auf die Voraussetzung, dass die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente mit ihrer Verbindungslinie zusammenfalle, und ferner auf die Voraussetzung, dass die ponderomotorische Einwirkung eines geschlossenen gleichförmigen Stromes auf ein einzelnes Stromelement gegen letzteres senkrecht steht. Diese beiden Voraussetzungen, von denen namentlich die letztere sehr misslich erscheint (weil der betreffenden von Ampère angestellten experimentellen Untersuchung wenig beweisende Kraft beizumessen ist) sind bei demjenigen Wege, auf welchem wir hier zu diesem Gesetz (133.) gelangten, vollständig vermieden worden.

§. 10.

Anwendung der erhaltenen Gesetze auf körperliche Leiter.

Es mag mir gestattet sein, einige Resultate, zu denen ich durch Anwendung der erhaltenen Elementargesetze auf körperliche Leiter gelangt bin, hier (ohne Beweis) kurz mitzutheilen.

*) Math. Annalen, Bd. 5, pag. 619. — Ausführlicher in meinem Werk über die elektrischen Kräfte, pag. 193.

Das Potential P oder JJ_1Q zweier gleichförmiger Stromringe (J, s) und (J_1, s_1) war im Vorhergehenden (und zwar in voller Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise meines Vaters) definirt worden durch die Formel (120.):

$$P = JJ_1Q = JJ_1\Sigma\Sigma\omega\Theta\Theta_1 Ds Ds_1 ,$$

oder (was dasselbe) durch:

$$P = \Sigma\Sigma(\omega J\Theta J_1\Theta_1 Ds Ds_1) .$$

Uebertragen wir diese Definition auf zwei körperliche Leiter A und B, so erhalten wir:

$$(134.)\qquad P = \Sigma\Sigma(\omega i\Theta i_1\Theta_1 DV DV_1) .$$

Dabei sind unter DV die einzelnen Volumelemente des Körpers A, unter i die in diesen Elementen vorhandenen elektrischen Strömungen zu verstehen, während DV_1 und i_1 die analogen Bedeutungen haben für den Körper B; ferner bedeutet $\omega = \omega(r)$ diejenige Function, welche für beträchtliche Entfernungen den Werth (131.):

$$(135.)\qquad \omega = -\frac{A^2}{r}$$

besitzt; und endlich repräsentiren r, Θ, Θ_1 die Ampère'schen Argumente für irgend zwei Elemente DV, DV_1 und für die ihnen zugehörigen Richtungen i, i_1.

Befinden sich die beiden Körper A, B in beliebigen räumlichen Bewegungen, während gleichzeitig die in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungen von Augenblick zu Augenblick in beliebiger Weise sich ändern, so zerfallen die auf den Werth des Potentiales P (134.) influirenden Vorgänge in vier Processe, nämlich erstens in die räumliche Bewegung des Körpers A, zweitens in diejenige des Körpers B, drittens in die Aenderung des Strömungszustandes von A, und viertens in die Aenderung des Strömungszustandes von B. Diesen vier Processen entsprechend kann der dem Zeitelement dt entsprechende Zuwachs dP des Potentiales P in vier partielle Zuwüchse zerlegt werden, von denen die beiden ersten zu bezeichnen sind als die partiellen Zuwüchse nach der räumlichen Lage von A oder von B, während die beiden letzteren zu nennen sein werden die partiellen Zuwüchse nach dem elektrischen Zustande von A oder von B.

Zunächst ist nun hinsichtlich des totalen Zuwachses dP folgender allgemeine Satz *) zu erwähnen:

Der totale Zuwachs dP des Potentiales repräsentirt die Summe derjenigen ponderomotorischen Arbeiten, welche B auf A und A auf B (vermöge der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs) ausüben, diese Summe noch vermehrt um diejenigen Wärmequanta, welche B in A und A in B (ebenfalls vermöge der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs) hervorbringen.

Sind u, v, w die Componenten der in irgend einem Punkt x, y, z eines Körpers vorhandenen Strömung i, so mag der Strömungszustand im Innern des Körpers gleichförmig heissen, sobald u, v, w allenthalben der Bedingung entsprechen:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0 . \tag{136.}$$

Ferner mag der Strömungszustand an der Oberfläche des Körpers tangential genannt werden, sobald in jedem Punkt dieser Oberfläche die Gleichung erfüllt ist:

$$u \cos(N, x) + v \cos(N, y) + w \cos(N, z) = 0 , \tag{137.}$$

wo N die Normale der Oberfläche bezeichnet.

Nehmen wir nun an, die in den Körpern A und B vorhandenen Strömungszustände änderten sich der Art, dass sie im Innern der Körper stets gleichförmig, und an ihren Oberflächen stets tangential bleiben, so gelten für die vorhin erwähnten partiellen Zuwüchse von P folgende Sätze:

Der partielle Zuwachs des Potentiales P nach der räumlichen Lage von A repräsentirt diejenige ponderomotorische Arbeit, welche B (vermöge der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs) ausübt auf A.

Der partielle Zuwachs des Potentiales P nach dem elektrischen Zustande von A ist in Abzug zu bringen vom totalen Zuwachs dP, falls man dasjenige Wärmequantum haben will, welches der Körper B (vermöge der Kräfte elektrodynamischen Ursprungs) hervorbringt in A.

*) Man findet diesen Satz und auch die folgenden in meinem Werk: »Die elektrischen Kräfte«, pag. 212 und 213.

Bildet man endlich das Capital $\mathfrak{C}$ eines aus beliebig vielen Körpern A, B, C, ... bestehenden Systemes (vergl. pag. 493), so erhält man unter Anwendung der Bezeichnungsweise (134.):

$$\mathfrak{C} = T + \Sigma(DM.C(\vartheta)) + O + U - P, \tag{138.}$$

so dass also das ordinäre und elektrostatische Potential mit positivem, hingegen das elektrodynamische Potential mit negativem Zeichen in diesen Ausdruck eingehen.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der von Ampère und Faraday entdeckten Kräfte. — Zweite Methode.

§. 1.

Die Grundeigenschaften dieser Kräfte.

In neuerer Zeit ist durch die Untersuchungen von Helmholtz der Gedanke angeregt worden, dass die gegenseitige ponderomotorische Einwirkung zwischen zwei elektrischen Stromelementen gleichzeitig eine promovirende und revolvirende sein möge, der Art, dass jedes Element auf das andere eine gewisse Kraft und daneben auch ein gewisses Drehungsmoment ausübe. Eine gegenseitige ponderomotorische Arbeit würde also, falls wir dieser Vorstellung uns anschliessen, zwischen den Elementen nicht nur dann stattfinden, wenn ihre Entfernung sich ändert, sondern auch dann, wenn bei constanter Entfernung ihre Richtungen sich ändern.

Um nun auf diese Vorstellungsweise näher einzugehen, wollen wir (ebenso wie früher) zwei Stromelemente Ds, Ds_1 uns denken, welche in beliebigen Bewegungen sich befinden, während gleichzeitig die in ihnen vorhandenen Stromstärken in beliebigen Zuständen der Veränderung begriffen sind; die Werthe dieser Stromstärken für die Zeiten t und $t + dt$ seien bezeichnet mit J, J_1 und $J + dJ$, $J_1 + dJ_1$. Ausserdem wollen wir einen in beliebiger Bewegung begriffenen körperlichen Leiter A von beliebiger Gestalt uns denken, in dessen Innerm ebenfalls irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden. Es handelt sich alsdann

einerseits um die Untersuchung derjenigen ponderomotorischen Arbeit

(1.) . . . $dS = (dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{eldy. Us}}$,

welche die beiden Stromelemente Ds und Ds_1 während der Zeit dt wechselseitig auf einander ausüben;

andrerseits um die Untersuchung derjenigen elektromotorischen Kraft

$$Edt,$$

welche das Stromelement Ds_1 während der Zeit dt hervorbringt in irgend einem Punkte des Körpers A.

Eine solche Untersuchung mag nun in der That angestellt werden, indem wir hinsichtlich der Arbeit dS und der Kraft Edt von folgenden einfachen Grundeigenschaften ausgehen; wobei zu bemerken, dass diese Eigenschaften, soweit sie die Kraft Edt betreffen, identisch sind *) mit den schon früher (pag. 469) supponirten.

(2.) . . . . *Erste Grundeigenschaft.*

(a.) . . Die (dem Zeitelement dt entsprechende) Arbeit dS ist proportional mit

$$JJ_1DsDs_1;$$

sie nimmt also den entgegengesetzten Werth an, sobald in einem der beiden Elemente die Stromrichtung umgekehrt wird, bleibt hingegen ungeändert, sobald eine solche Umkehrung in beiden Elementen erfolgt.

(α.) . . Die (auf das Zeitelement dt bezogene) Kraft Edt ist zerlegbar in zwei Kräfte, welche respective proportional sind mit

$$J_1Ds_1 \quad \text{und} \quad (dJ_1)Ds_1;$$

von denen also z. B. die erstere in ihr Gegentheil umschlägt, sobald die in Ds_1 vorhandene Stromrichtung umgekehrt wird.

Zweite Grundeigenschaft.

(b.) . . Abgesehen von dem genannten Factor ist die Arbeit dS nur noch abhängig von der zur

(β.) . . Abgesehen von den genannten beiden Factoren ist die Kraft Edt nur noch abhängig

*) Sie sind hier von Neuem hingestellt, um eine gewisse Symmetrie, welche zwischen den Eigenschaften (2.a, b, c) einerseits und den Eigenschaften (2.α, β, γ) andrerseits stattfindet, besser hervortreten zu lassen.

Zeit t zwischen Ds und Ds_1 vorhandenen relativen Lage, sowie von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage erleidet während des Zeitelementes dt.

Sind diese Aenderungen Null, so verschwindet dS.

Die Arbeit dS ist also (wie aus dem Gesagten hervorgeht) unabhängig von den Zuwüchsen dJ, dJ_1, welche J, J_1 während der Zeit dt erfahren.

von der zur Zeit dt zwischen A und Ds_1 vorhandenen relativen Lage, sowie von denjenigen Aenderungen, welche diese relative Lage erleidet während des Zeitelementes dt.

Sind diese Aenderungen Null und ist dJ_1 ebenfalls Null, so verschwindet Edt.

Die Kraft Edt ist also (wie aus dem Gesagten hervorgeht) unabhängig von den im Körper A vorhandenen elektrischen Vorgängen.

Dritte Grundeigenschaft.

(c.) . . Die Arbeit dS kann ersetzt werden durch diejenigen ponderomotorischen Arbeiten, welche stattfinden zwischen den Componenten von Ds und denen von Ds_1.

(γ.) . . Die Kraft Edt kann ersetzt werden durch diejenigen elektromotorischen Kräfte, welche die Componenten von Ds_1 in dem betrachteten Punkte des Körpers A hervorbringen.

Bei (c.) und (γ.) sollen die Componenten genommen gedacht werden nach völlig beliebigen (ruhenden oder in Bewegung begriffenen) Richtungen. Selbstverständlich soll aber in den componirenden Elementen jedesmal dieselbe Stromstärke und dieselbe Aenderung der Stromstärke vorausgesetzt sein, wie in dem ursprünglichen Elemente.

§. 2 und §. 3.*)

Die aus den Grundeigenschaften resultirenden Formeln.

Die Eigenschaften (2.α, β, γ) sind genau dieselben wie früher, und man findet also für diejenige elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}dt$, welche J_1Ds_1 während der Zeit dt in irgend einem Punkte des Ele-

*) Die Nummern der Paragraphe entsprechen denen des vorhergehenden Abschnitts (pag. 468).

mentes JDs (und zwar in der Richtung dieses Elementes) hervorbringt, genau denselben Werth wie früher (pag. 484), nämlich:

$$(3.)\quad \mathfrak{E}dt = Ds_1[J_1((\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta) + \omega\Theta d(\Theta_1 J_1) + \bar{\omega}d(\mathsf{E}J_1)],$$

wo $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$ fünf unbekannte Functionen von r sind. Hieraus ergiebt sich, wie sogleich bemerkt sein mag,

$$(4.)\quad \begin{cases} \text{für den Specialfall: } dJ_1 = 0 \text{ die einfachere Formel:} \\ \frac{\mathfrak{E}dt}{J_1 Ds_1} = (\varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E})dr + \lambda\Theta_1 d\Theta + \omega\Theta d\Theta_1 + \bar{\omega}d\mathsf{E}. \end{cases}$$

Bei der Kraft $\mathfrak{E}dt$ kommt nicht die Richtung, sondern nur die Stärke in Betracht. Die Richtung ist von Hause aus vorgezeichnet; denn es repräsentirt ja $\mathfrak{E}dt$ die Componente der eigentlichen Kraft Edt (1.) nach der Richtung des gegebenen Elementes JDs.

Vergegenwärtigt man sich die durch (2.α, β, γ) in Betreff der Stärke von $\mathfrak{E}dt$ gemachten Suppositionen, so zeigt sich zwischen diesen Suppositionen und zwischen denen, welche durch (2.a, b, c) über den Werth von dS gemacht sind, eine grosse Aehnlichkeit, — eine Aehnlichkeit, welche noch grösser wird, sobald man den Specialfall: $dJ_1 = 0$ ins Auge fasst. — In der That zeigt sich, dass die in dem Specialfalle: $dJ_1 = 0$ aus (2.α, β, γ) für den Ausdruck

$$\frac{\mathfrak{E}dt}{J_1 Ds_1}$$

resultirenden Suppositionen genau identisch sind mit denjenigen, welche, und zwar im allgemeinsten Falle, durch (2.a, b, c) über den Werth des Ausdruckes

$$\frac{dS}{JJ_1 DsDs_1}$$

gemacht sind. In jenem Specialfalle $dJ_1 = 0$ hat sich aber aus (2.α, β, γ) für den erstern Ausdruck der Werth (4.) ergeben. Folglich wird man, und zwar im allgemeinsten Falle, aus (2.a, b, c) für den letztern Ausdruck einen analogen Werth erhalten:

$$(5.)\quad \frac{dS}{JJ_1 DsDs_1} = (\varrho\Theta\Theta_1 + \bar{\varrho}\mathsf{E})dr + \varphi\Theta_1 d\Theta + \psi\Theta d\Theta_1 + \chi d\mathsf{E},$$

von jenem nur dadurch unterschieden, dass an Stelle von $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, λ, ω, $\bar{\omega}$ hier irgend welche andere Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, φ, ψ, χ auftreten, die ebenfalls nur von r abhängen können, sonst aber unbekannt sind.

Wie durch (1.) schon angedeutet war, soll unter dS die Summe

$$(dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{eldy. Us}},$$

also die Summe derjenigen beiden ponderomotorischen Arbeiten elektrodynamischen Ursprungs verstanden werden, welche während der Zeit dt von J_1Ds_1 auf JDs, und von JDs auf J_1Ds_1 ausgeübt werden. Hieraus folgt, dass dS in Bezug auf JDs und J_1Ds_1 symmetrisch, mithin die in (5.) enthaltenen Functionen φ, ψ einander gleich sein müssen. Jene Formel (5.) erlangt daher folgende Gestalt:

$$(6.)\quad dS = JJ_1DsDs_1[(\rho\Theta\Theta_1 + \bar{\rho}\mathsf{E})dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}],$$

wofür geschrieben werden mag:

$$(7.)\quad dS = (dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{eldy. Us}} = JJ_1DsDs_1[\mathsf{P}dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}].$$

Fügen wir noch hinzu, was in (3.) angegeben war:

$$(8.)\quad \mathfrak{E}dt = Ds_1[J_1(\mathsf{K}dr + \lambda\Theta_1 d\Theta) + \omega\Theta d(\Theta_1 J_1) + \bar{\omega}d(\mathsf{E}J_1)],$$

so haben wir*) diejenigen Formeln (7.) und (8.) vor uns, welche für die pondero- und elektromotorischen Wirkungen sich ergeben als unmittelbarer Ausfluss der supponirten Grundeigenschaften.

Mit Bezug auf (7.), (8.) sei sogleich bemerkt, dass unter P, K, Ω, ebenso wie früher, folgende Aggregate verstanden werden sollen:

$$(9.)\quad \begin{aligned} \mathsf{P} &= \rho\Theta\Theta_1 + \bar{\rho}\mathsf{E}, \\ \mathsf{K} &= \varkappa\Theta\Theta_1 + \bar{\varkappa}\mathsf{E}, \\ \Omega &= \omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E}. \end{aligned}$$

---

*) Wollte man (vergl. pag. 486) als Princip adoptiren, dass die durch ein Element J_1Ds_1 von constanter Stromstärke in irgend einem Punkte eines körperlichen Leiters erzeugte elektromotorische Kraft Null ist, sobald die relative Lage jenes Elementes in Bezug auf diesen mathematischen Punkt keine Aenderung erleidet, so würde hieraus folgen, dass die in (8.) enthaltenen Functionen λ und $\bar{\omega}$ identisch Null sind. Alsdann aber würde die hier zu entwickelnde Theorie völlig identisch werden mit der im vorhergehenden Abschnitt (pag. 468 bis 506) dargelegten.

§. 4.

Anwendung des Princips der lebendigen Kraft.

Indem wir Schritt für Schritt denselben Weg, wie bei früherer Gelegenheit (pag. 486 bis 494), verfolgen, haben wir zunächst die Formel (7.) zu notiren:

$$(10.a)\qquad (dT_0^1 + dT_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1 JJ_1(\mathsf{P}dr + \varphi d(\Theta\Theta_1) + \chi d\mathsf{E}).$$

und sodann zu bemerken, dass aus (8.), genau ebenso wie damals, folgende parallel stehende Formel sich ergiebt [vergl. (80.) p. 489].

$$(10.b)\qquad (dQ_0^1 + dQ_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[JJ_1(2\mathsf{K}dr + (\lambda + \omega)d(\Theta\Theta_1) + 2\bar{\omega}d\mathsf{E}) + \Omega d(JJ_1)].$$

Durch Addition von (10.a, b) folgt sofort:

$$(11.)\qquad (dT_0^1 + dT_1^0 + dQ_0^1 + dQ_1^0)_{\text{eldy. Us}} = DsDs_1[d(JJ_1\Omega) + JJ_1\Upsilon],$$

wo Υ den Werth besitzt:

$$(12.)\qquad \Upsilon = (2\mathsf{K} + \mathsf{P})dr + (\lambda + \omega + \varphi)d(\Theta\Theta_1) + (2\bar{\omega} + \chi)d\mathsf{E} - d\Omega,$$

ein Werth, welcher mit Rücksicht auf (9.) auch so geschrieben werden kann:*)

$$(12.a)\qquad \Upsilon = [(2\varkappa + \varrho - \omega')\Theta\Theta_1 + (2\bar{\varkappa} + \bar{\varrho} - \bar{\omega}')\mathsf{E}]dr + (\lambda + \varphi)d(\Theta\Theta_1) + (\bar{\omega} + \chi)d\mathsf{E}.$$

Ebenso wie früher (pag. 491) ergiebt sich nun, als Folgerung aus dem Princip der lebendigen Kraft, dass dieser Ausdruck Υ für ein in beliebiger Bewegung begriffenes Elementenpaar Ds, Ds_1 fortdauernd **Null** sein muss, dass also zwischen den **neun** unbekannten Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, $\varkappa$, $\bar{\varkappa}$, ω, $\bar{\omega}$, λ, φ, χ die Relationen stattfinden müssen:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} 2\varkappa + \varrho - \omega' &= 0, & \lambda + \varphi &= 0, \\ 2\bar{\varkappa} + \bar{\varrho} - \bar{\omega}' &= 0, & \bar{\omega} + \chi &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} \varkappa &= \tfrac{1}{2}(\omega' - \varrho), & \varphi &= -\lambda, \\ \bar{\varkappa} &= \tfrac{1}{2}(\bar{\omega}' - \bar{\varrho}), & \chi &= -\bar{\omega}; \end{aligned}$$

wodurch die Anzahl der unbekannten Functionen auf **fünf** reducirt ist.

---

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass unter ω' und $\bar{\omega}'$ die Ableitungen von ω und $\bar{\omega}$ nach r zu verstehen sind.

Substituirt man die Werthe (14.) in (7.), (8.), so ergiebt sich für die ponderomotorische Wirkung die Formel:

$$(15.)\quad dS = JJ_1 Ds Ds_1 [\mathsf{P} dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega} d\mathsf{E}],$$

und andererseits für die elektromotorische Wirkung folgende Formel:

$$(16.\text{a})\quad \mathfrak{E} dt = J_1 Ds_1 \left(\frac{\Theta\Theta_1 d\omega + \mathsf{E} d\bar{\omega} - \mathsf{P} dr}{2} + \lambda \Theta_1 d\Theta + \dot{\omega}\Theta d\Theta_1 + \bar{\omega} d\mathsf{E} \right) + (dJ_1) Ds_1 \Omega,$$

wofür auch geschrieben werden kann:

$$(16.\text{b})\quad \mathfrak{E} dt = J_1 Ds_1 \left(- \frac{\mathsf{P} dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega} d\mathsf{E}}{2} + \frac{d\Omega + (\omega - \lambda)(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)}{2} \right) + (dJ_1) Ds_1 \Omega.$$

Dabei sind unter P, Ω die Ausdrücke (9.) zu verstehen.

Gleichzeitig ergiebt sich für das Capital $\mathfrak{C}$ eines den früher erwähnten Determinationen unterworfenen materiellen Systems der Werth:

$$(17.)\quad \mathfrak{C} = T + \Sigma(DM \,.\, C(\vartheta)) + O + U - \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma(Ds Ds_1 JJ_1 \Omega),$$

vergl. (100.) pag. 493.

§. 5.

Ueber eine gewisse Summe von elektromotorischen Kräften.

Unter Zugrundelegung der Formel (16.a, b) soll die Summe derjenigen elektromotorischen Kräfte berechnet werden, welche ein gleichförmiger elektrischer Stromring (J_1, s_1) hervorbringt in irgend einem Drahtringe (s).

Die beiden Ringe seien biegsam, mit Gleitstellen versehen, und begriffen in beliebigen Bewegungen; ihre Elemente seien bezeichnet mit Ds, Δs und Ds_1, Δs_1 (vergl. pag. 441).

Unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(18.)\quad \begin{aligned} \mathsf{P} &= \rho\Theta\Theta_1 + \bar{\rho}\mathsf{E}, \\ \Omega &= \omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E}, \\ d\Psi &= - \frac{\mathsf{P} dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega} d\mathsf{E}}{2} + \frac{d\Omega + (\omega - \lambda)(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)}{2}, \end{aligned}$$

ergeben sich aus (16.) die beiden Formeln:

$$(19.)\quad \begin{aligned} &Ds\,.\,\mathfrak{E}dt = DsDs_1(J_1d\Psi + \Omega dJ_1)\,, &&\text{(Wirkung von } Ds_1 \text{ auf } Ds),\\ &Ds\,.\,\mathfrak{E}dt = Ds\Delta s_1(\,0 \quad + \Omega J_1)\,, &&\text{(Wirkung von } \Delta s_1 \text{ auf } Ds); \end{aligned}$$

von denen die erstere diejenige Kraft $\mathfrak{E}dt$ ausdrückt, welche Ds_1 innerhalb der Zeit dt in irgend einem Punkte von Ds (und zwar in der Richtung von Ds) hervorbringt; während die letztere in analoger Weise sich bezieht auf Δs_1 und Ds.

Repräsentirt $\mathfrak{S}dt$ die Summe sämmtlicher elektromotorischer Kräfte, welche der Ring (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (s) hervorruft, so folgt aus (19.):

$$(20.)\quad \mathfrak{S}dt = J_1\,.\,(\Sigma\Sigma d\Psi DsDs_1 + \Sigma\Sigma\Omega Ds\Delta s_1) + (dJ_1)\,.\,\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1\,;$$

hiefür kann geschrieben werden:

$$(21.)\quad \mathfrak{S}dt = d(J_1\,.\,\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) + J_1\mathfrak{H}dt,$$

wo alsdann $\mathfrak{H}dt$ die Bedeutung hat:

$$(22.)\quad 2\mathfrak{H}dt = 2\,\Sigma\Sigma d\Psi DsDs_1 + 2\,\Sigma\Sigma\Omega Ds\Delta s_1 - 2\,d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)\,.$$

Es handelt sich nunmehr (für spätere Zwecke) um eine gewisse Transformation von $\mathfrak{H}dt$, und zwar um eine doppelte.

Erste Transformation von $\mathfrak{H}dt$. — Substituirt man in (22.) für das letzte Glied den dafür sich ergebenden Werth:

$$(\alpha.)\quad 2\,d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) = 2\,\Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1 + 2\,\Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1 + \Delta sDs_1)\,,$$

und gleichzeitig für $d\Psi$ den Werth (18.), so erhält man:

$$(\beta.)\quad \begin{aligned} 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega}d\mathsf{E} + d\Omega + (\lambda-\omega)(\Theta d\Theta_1 - \Theta_1 d\Theta)]\,DsDs_1\\ - 2\,\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1\,, \end{aligned}$$

oder, falls man für P, Ω ihre eigentlichen Bedeutungen (18.) eintreten lässt:

$$(\gamma.)\quad \begin{aligned} 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[((\varrho+\omega')\Theta\Theta_1 + (\bar{\varrho}+\bar{\omega}')\mathsf{E})dr + 2(\omega-\lambda)\Theta_1 d\Theta]\,DsDs_1\\ - \Sigma\Sigma(2\,\omega\Theta\Theta_1 + 2\bar{\omega}\mathsf{E})\Delta sDs_1\,. \end{aligned}$$

Hieraus aber ergiebt sich, durch Anwendung einer früher (pag. 447) mitgetheilten Transformationsformel, sofort:

$$(\delta.)\quad \begin{aligned} 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]drDsDs_1\\ - \Sigma\Sigma(2\,\lambda\Theta\Theta_1 + 2\bar{\omega}\mathsf{E})\Delta sDs_1\,, \end{aligned}$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

$$(\varepsilon.)\quad \begin{aligned} L &= (\varrho + \bar{\varrho} + \omega' + \bar{\omega}') - 2\,(\omega' - \lambda'),\\ M &= \quad r(\bar{\varrho} + \bar{\omega}') - 2(\omega - \lambda)\,. \end{aligned}$$

Zweite Transformation von $\mathfrak{H}dt$. — Es ist identisch:

$$(\zeta.)\quad \Sigma\Sigma(\lambda-\omega)(\Theta d\Theta_1-\Theta_1 d\Theta)DsDs_1 = -\Sigma\Sigma(\lambda-\omega)\Theta\Theta_1(Ds\Delta s_1-\Delta sDs_1),$$

wie solches unmittelbar folgt aus der soeben citirten Transformationsformel (pag. 447). Andrerseits ist nach $(\alpha.)$:

$$(\eta.)\quad \Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1 = d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) - \Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1+\Delta sDs_1),$$

oder falls man $2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1$ auf beiden Seiten hinzufügt:

$$(\vartheta.)\quad \Sigma\Sigma d\Omega DsDs_1+2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1 = d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)-\Sigma\Sigma\Omega(Ds\Delta s_1-\Delta sDs_1).$$

Nunmehr folgt durch Addition von $(\zeta.)$ und $(\vartheta.)$ sofort:

$$(\iota.)\quad \Sigma\Sigma[d\Omega+(\lambda-\omega)(\Theta d\Theta_1-\Theta_1 d\Theta)]DsDs_1+2\Sigma\Sigma\Omega\Delta sDs_1 =$$
$$= d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)-\Sigma\Sigma(\Omega+(\lambda-\omega)\Theta\Theta_1)(Ds\Delta s_1-\Delta sDs_1),$$
$$= d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)-\Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1+\bar{\omega}\mathrm{E})(Ds\Delta s_1-\Delta sDs_1).$$

Dieser Ausdruck $(\iota.)$ repräsentirt die letzten Glieder der Formel $(\beta.)$. Substituirt man für jene letzten Glieder den durch $(\iota.)$ dargebotenen Werth, so gewinnt die Formel $(\beta.)$ folgende Gestalt:

$$(\varkappa.)\quad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[\mathrm{P}dr-\lambda d(\Theta\Theta_1)-\bar{\omega}d\mathrm{E}]DsDs_1 - d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)$$
$$+\Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1+\bar{\omega}\mathrm{E})(Ds\Delta s_1-\Delta sDs_1).$$

Wir gelangen nun, durch die Formel (21.) und unter Anwendung der beiderlei Transformationen (δ, ε) und $(\varkappa.)$, zu folgendem Resultate.

Sind zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in beliebigen Bewegungen begriffen, und befindet sich im letztern ein Strom, dessen Stärke J_1 von Augenblick zu Augenblick sich ändert, jedoch stets *gleichförmig* bleibt, so wird die Summe $\mathfrak{S}dt$ der vom Ringe (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (s) hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte den Werth besitzen:

$$(23.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1.\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1)+J_1\mathfrak{H}dt;$$

die hier auftretende Grösse $\mathfrak{H}dt$ ist einerseits darstellbar durch:

$$(24.)\qquad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma\left[\left(L-\frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1+\frac{M}{r}\mathrm{E}\right]drDsDs_1$$
$$-2\Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1+\bar{\omega}\mathrm{E})\Delta sDs_1,$$

wo L, M die Bedeutungen haben:

$$L = (\rho + \bar{\rho} + \omega' + \bar{\omega}') - 2(\omega' - \lambda'),$$
$$M = \quad r(\bar{\rho} + \bar{\omega}') - 2(\omega - \lambda),$$

andrerseits aber auch darstellbar durch:

$$(25.)\quad 2\mathfrak{H}dt = -\Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega}d\mathsf{E}]DsDs_1 - d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) \\ + \Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})(Ds\Delta s_1 - \Delta sDs_1).$$

Dabei stehen P, Ω zur Abkürzung für die in (9.) genannten Aggregate.

§. 6.

Anwendung des elektromotorischen Integralgesetzes.

Um Genaueres zu ermitteln in Betreff der in den Formeln (15.) und (16.a, b) noch enthaltenen unbekannten Functionen ρ, $\bar{\rho}$, ω, $\bar{\omega}$, λ, benutze ich das von meinem Vater aufgestellte elektromotorische Integralgesetz, welches folgendermassen lautet:

Sind zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe (s) und (s_1) in beliebigen Bewegungen begriffen, und befindet sich im letztern ein stets *gleichförmig* bleibender Strom J_1, so hat die Summe $\mathfrak{S}dt$ der von ihm während der Zeit dt im Ringe (s) erzeugten elektromotorischen Kräfte den Werth:

$$(26.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 f),$$

wo f lediglich abhängt von der augenblicklichen Gestalt und Lage der beiden Ringe.

Durch Combination dieses Gesetzes (26.) mit der vorhin entwickelten Formel (23.) folgt sofort:

$$(27.)\qquad \mathfrak{H} = 0,$$

also, falls man für $\mathfrak{H}$ seinen Werth (24.) substituirt:

$$(28.)\quad \Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathsf{E}\right]drDsDs_1 + 2\Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})\Delta sDs_1 = 0;$$

und zwar erkennt man, dass diese Gleichung (27.) oder (28.), ebenso wie das Gesetz (26.), gültig sein muss für willkührliche Bewegungen der beiden Ringe.

Für solche Bewegungen, bei denen die Gestalten der beiden

Ringe ungeändert bleiben, mithin die Δs, Δs_1 sämmtlich Null sind, reducirt sich die Gleichung (26.) auf:

$$\Sigma\Sigma\left[\left(L - \frac{M}{r}\right)\Theta\Theta_1 + \frac{M}{r}\mathrm{E}\right] dr Ds Ds_1 = 0 .$$

Hieraus folgt, unter Anwendung eines früheren Satzes (pag. 440), sofort:

$$(29.)\quad \begin{cases} L = 0, \\ M = 0, \end{cases} \quad \text{das ist:} \quad \begin{cases} \varrho + \bar{\varrho} + \bar{\omega}' = \omega' - 2\lambda', \\ r(\bar{\varrho} + \bar{\omega}') = 2\omega - 2\lambda. \end{cases}$$

Solches erkannt, reducirt sich die für beliebige Bewegungen gültige Gleichung (28.) auf:

$$\Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E})\Delta s Ds_1 = 0 .$$

Bringt man diese in Anwendung auf solche Bewegungen, bei denen nur ein Δs vorhanden ist, alle übrigen Δs aber Null sind, so erhält man:

$$\Delta s . \Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E}) Ds_1 = 0 .$$

Hieraus folgt nach einem früheren Satze (pag. 436), dass zwischen λ und $\bar{\omega}$ die Beziehung stattfinden muss:

$$(30.)\qquad \lambda = r\bar{\omega}' .$$

Vermittelst der Relationen (29.) und (30.) kann man ϱ, $\bar{\varrho}$, λ durch ω, $\bar{\omega}$ ausdrücken; man erhält:

$$(31.)\qquad \begin{cases} \varrho = -\frac{2\omega}{r} + \omega' - 2r\omega'', \\ \bar{\varrho} = +\frac{2\omega}{r} - 3\bar{\omega}', \\ \lambda = +r\bar{\omega}'. \end{cases}$$

Somit sind die unbekannten Functionen auf zwei reducirt, nämlich auf ω und $\bar{\omega}$.

§. 7.

Die aus der entwickelten Theorie fliessenden Integralgesetze.

Da nach (27.) $\mathfrak{H}$ jederzeit verschwindet, so reducirt sich die Formel (23.) auf:

$$(32.)\qquad \mathfrak{S}dt = d(J_1 . \Sigma\Sigma\Omega Ds Ds_1) .$$

Aus gleichem Grunde reducirt sich die Formel (25.) auf:

$$(33.)\quad \Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega}d\mathsf{E}]DsDs_1 = -d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1) + \Sigma\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})(Ds\Delta s_1 - \Delta sDs_1).$$

Das hier in die zweite Zeile gesetzte Glied besteht aus einzelnen Integralen, welche theils von der Form sind:

$$\Delta s\,.\,\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})Ds_1,$$

theils von der Form:

$$\Delta s_1\,.\,\Sigma(\lambda\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})Ds.$$

Zufolge eines früheren Satzes (pag. 436) sind diese Integrale, weil zwischen λ, $\bar{\omega}$ die Relation (30.) stattfindet, sämmtlich Null; so dass also jenes Glied zweiter Zeile verschwindet, mithin die Formel (33.) die einfachere Gestalt gewinnt:

$$(34.)\quad \Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega}d\mathsf{E}]DsDs_1 = -d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1).$$

Die inducirten elektromotorischen Kräfte sind (zufolge der vorausgesetzten Grundeigenschaften) unabhängig von den im inducirten Körper etwa vorhandenen elektrischen Vorgängen. Nehmen wir daher an, dass nicht nur in (s_1), sondern ebenso auch in (s) ein gleichförmiger Strom vorhanden sei, so wird trotzdem die Summe der von (s_1) in (s) inducirten elektromotorischen Kräfte immer noch ausgedrückt sein durch die Formel (32.).

Gleichzeitig wird alsdann die zwischen diesen beiden Stromringen (J, s) und (J_1, s_1) stattfindende ponderomotorische Arbeit, nach (15.), den Werth haben:

$$(35.)\quad \Sigma\Sigma dS = JJ_1\,.\,\Sigma\Sigma[\mathsf{P}dr - \lambda d(\Theta\Theta_1) - \bar{\omega}d\mathsf{E}]DsDs_1,$$

wofür mit Rücksicht auf (34.) auch geschrieben werden kann:

$$(36.)\quad \Sigma\Sigma dS = -JJ_1\,.\,d(\Sigma\Sigma\Omega DsDs_1).$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$(37.)\quad Q = \Sigma\Sigma\Omega DsDs_1 = \Sigma\Sigma(\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathsf{E})DsDs_1,$$

so gewinnen die Formeln (32.) und (36.) folgende Gestalt:

$$(38.)\quad \mathfrak{S}dt = d(J_1Q),$$

$$(39.)\quad \Sigma\Sigma dS = -JJ_1dQ;$$

so dass sich also für zwei biegsame, mit Gleitstellen versehene Ringe, die in beliebigen Bewegungen begriffen und von gleichförmigen Strömen durchflossen sind, folgende Gesetze ergeben:

Das elektromotorische Integralgesetz. — Die Summe der vom Ringe (J_1, s_1) während der Zeit dt im Ringe (J, s) hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte ist gleich dem Zuwachs von $J_1 Q$.

Das ponderomotorische Integralgesetz. — Die während der Zeit dt von den beiden Ringen (J, s) und (J_1, s_1) aufeinander ausgeübte ponderomotorische Arbeit ist gleich $(-1) JJ_1$, multiplicirt mit dem Zuwachs von Q.

Der Ausdruck Q (37.), welcher lediglich abhängt von der augenblicklichen Lage und Gestalt der beiden Ringe, wird zu bezeichnen sein als ihr elektrodynamisches Potential, bezogen auf die Stromeinheit.

§. 8 und §. 9.

Die aus der entwickelten Theorie für den Fall beträchtlicher Entfernungen resultirenden Elementargesetze.

Dass das Potential P oder JJ_1Q zweier gleichförmiger Stromringe (J, s) und (J_1, s_1) für den Fall beträchtlicher Entfernung den Werth

$$P = JJ_1 Q = -A^2 JJ_1 \,.\, \Sigma\Sigma \frac{\Theta\Theta_1 Ds Ds_1}{r} \tag{40.}$$

besitze, unterliegt keinem Zweifel (pag. 502). Andrerseits sind wir durch die hier entwickelte Theorie zu der Formel (37.) gelangt:

$$P = JJ_1 Q = JJ_1 \,.\, \Sigma\Sigma(\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E}) Ds Ds_1, \tag{41.}$$

wo ω, $\bar{\omega}$ zwei noch unbekannte Functionen von r sind.

Gehen wir nun von der Hypothese aus, dass diese Functionen ω, $\bar{\omega}$ für den Fall beträchtlicher Entfernungen proportional sind mit irgend welchen Potenzen von r:

$$\begin{aligned} \omega &= gr^p, \\ \bar{\omega} &= hr^q, \end{aligned} \tag{42.}$$

so ergeben sich durch Combination der Formeln (40.), (41.) die Mittel zur näheren Bestimmung der Constanten g, h, p, q.

Aus (40.) und (41.) folgt nämlich sofort:

$$\Sigma\Sigma(\omega\Theta\Theta_1 + \bar{\omega}\mathrm{E}) Ds Ds_1 = -A^2 \,.\, \Sigma\Sigma \frac{\Theta\Theta_1 Ds Ds_1}{r},$$

oder falls man die Werthe (42.) substituirt:

$$\Sigma\Sigma\left[\left(gr^p + \frac{A^2}{r}\right)\Theta\Theta_1 + hr^q\mathsf{E}\right] DsDs_1 = 0\,.\,.$$

Diese Gleichung, welche stattfinden soll für je zwei Ringe von beliebiger Lage und Gestalt, führt [unter Anwendung des Satzes (23.a, b) pag. 432] zu dem Resultat, dass

$$gr^p + \frac{A^2}{r} = hqr^q$$

sein muss. Hieraus aber folgt zunächst:

$$(43.)\qquad p = q = -1\,,$$

und sodann:

$$(44.)\qquad g + h = -A^2.$$

Somit erhalten wir aus (42.):

$$(45.)\qquad \begin{aligned} \omega &= \frac{g}{r}\,, \\ \bar{\omega} &= \frac{h}{r}\,, \end{aligned}$$

wo g, h zwei durch die Relation (44.) verbundene Constante vorstellen.

Selbstverständlich wird, weil wir die Formel (40.) und die Hypothese (42.) nur für beträchtliche Entfernungen als gültig erachten, Gleiches auch zu bemerken sein in Betreff der Formeln (45.).

Unter Zugrundelegung der Werthe (45.) resultiren für die Functionen ϱ, $\bar{\varrho}$, λ (31.) folgende Ausdrücke:

$$(46.)\qquad \begin{aligned} \varrho &= -\frac{3g + 4h}{r^2}\,, \\ \bar{\varrho} &= +\frac{2g + 3h}{r^2}\,, \\ \lambda &= -\frac{h}{r}\,; \end{aligned}$$

und hieraus ergeben sich die Aggregate Ω, P (9.) in folgender Form:

$$(47.)\qquad \begin{aligned} \Omega &= \frac{g\Theta\Theta_1 + h\mathsf{E}}{r}\,, \\ \mathsf{P} &= \frac{-(3g + 4h)\Theta\Theta_1 + (2g + 3h)\mathsf{E}}{r^2}\,, \end{aligned}$$

so dass also zwischen Ω und P die Relation stattfindet:

$$(48.)\qquad \mathsf{P} = \frac{\Omega}{r} + \frac{2(g + h)\,(\mathsf{E} - 2\Theta\Theta_1)}{r^2}\,.$$

Endlich folgt durch Substitution der Werthe (45.), (46.), (47.) in die beiden Formeln (16.a) und (15.):

$$(49.)\qquad \mathfrak{E}dt = J_1Ds_1\left[\frac{(g+2h)(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})dr}{r^2} + \frac{g\Theta d\Theta_1 - h\Theta_1 d\Theta + hd\mathsf{E}}{r}\right] + (dJ_1)Ds_1\,\frac{g\Theta\Theta_1 + h\mathsf{E}}{r},$$

$$(50.)\qquad dS = JJ_1DsDs_1\left[\mathsf{P}dr + \frac{h\,.\,d(\Theta\Theta_1 - \mathsf{E})}{r}\right].$$

Diese Formeln (49.) und (50.) sind es also, durch welche (im Sinne der gegenwärtigen Theorie) das elektromotorische und das ponderomotorische Elementargesetz für beträchtliche Entfernungen sich ausdrücken.

Setzt man, ähnlich wie früher (pag. 500) nämlich unter Anwendung eines mit Ds starr verbundenen Coordinatensystemes:

$$(\alpha.)\qquad \mathfrak{E}dt = (\mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{B}\mathfrak{Y} + \mathfrak{C}\mathfrak{Z})dt,$$

$$(\beta.)\qquad \Theta = \mathfrak{A}\mathfrak{U} + \mathfrak{B}\mathfrak{V} + \mathfrak{C}\mathfrak{W},$$

$$(\gamma.)\qquad \mathsf{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{C}\mathfrak{C}_1,$$

so erhält man aus (49.):

$$(51.)\qquad \mathfrak{X}dt = J_1Ds_1\left[\frac{(g+2h)(\mathfrak{U}\Theta_1 - \mathfrak{A}_1)dr}{r^2} + \frac{g\mathfrak{U}d\Theta_1 - h\Theta_1 d\mathfrak{U} + hd\mathfrak{A}_1}{r}\right] + (dJ_1)Ds_1\,\frac{g\mathfrak{U}\Theta_1 + h\mathfrak{A}_1}{r},$$

und analoge Werthe für $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$. — Der Werth von $\mathfrak{X}dt$ (51.) ist eine homogene lineare Function von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{A}_1$, $d\mathfrak{U}$, $d\mathfrak{A}_1$; und Analoges wird offenbar gelten von $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$; so dass wir also schreiben können:

$$(52.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}dt &= K\mathfrak{U} + L\mathfrak{A}_1 + Md\mathfrak{U} + Nd\mathfrak{A}_1, \\ \mathfrak{Y}dt &= K\mathfrak{V} + L\mathfrak{B}_1 + Md\mathfrak{V} + Nd\mathfrak{B}_1, \\ \mathfrak{Z}dt &= K\mathfrak{W} + L\mathfrak{C}_1 + Md\mathfrak{W} + Nd\mathfrak{C}_1. \end{aligned}$$

Um von der Bedeutung dieser Formeln (51.), (52.) eine Vorstellung zu erhalten, haben wir uns einen körperlichen Leiter zu denken, mit welchem drei (auf einander senkrechte) Axen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ starr verbunden sind. Alsdann sind $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ die diesen Axen entsprechenden Componenten derjenigen elektromotorischen Kraft Edt, welche ein ausserhalb des Körpers befindliches Stromelement J_1Ds_1 während der Zeit dt hervorbringt in irgend einem Punkte m

des Körpers. Dabei repräsentiren $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ die Richtungscosinus von r ($Ds_1 \longrightarrow m$) und von J_1Ds_1; während gleichzeitig Θ_1 den Cosinus des zwischen r und J_1Ds_1 gelegenen Winkels bezeichnet.

Die Formeln (52.) zeigen, dass die Kraft Edt in vier Kräfte zerlegbar ist, nämlich in die beiden Kräfte K, L und in zwei andere Kräfte M', N', welche mit M, N proportional sind. Die Kräfte K und L sind respective mit r und Ds_1 parallel; hingegen steht die Kraft M' senkrecht gegen r, und N' senkrecht gegen Ds_1. Um die Richtungen der beiden letzten Kräfte genauer angeben zu können, denke man sich diejenigen beiden Elementarflächen construirt, welche im Raume des gegebenen Körpers während der Zeit dt beschrieben werden durch den von m ausgehenden Strahl r, und durch einen zweiten von m ausgehenden und beständig mit Ds_1 parallel bleibenden Strahl ϱ. Alsdann ist M' senkrecht gegen r, und gelegen in der von r beschriebenen Elementarfläche;*) andererseits N' senkrecht gegen ϱ und gelegen in der von ϱ beschriebenen Elementarfläche.

Wir gehen über zur Betrachtung des ponderomotorischen Elementargesetzes (50.). Die beiden Elemente JDs, J_1Ds_1 seien in beliebigen Bewegungen begriffen, und mögen mit Bezug auf ein absolut festes Coordinatensystem die Coordinaten x, y, z, x_1, y_1, z_1 und die Richtungscosinus A, B, Γ, A_1, B_1, Γ_1 besitzen; ausserdem seien U, V, W die Richtungscosinus von r ($Ds_1 \longrightarrow Ds$).

Genauer betrachtet, werden unter x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes von JDs (etwa des Schwerpunktes von JDs) zu verstehen sein. Die Bewegung dieses Elementes JDs während der Zeit dt wird daher zu charakterisiren sein durch die Zuwüchse dx, dy, dz, welche jene Coordinaten binnen der Zeit dt erleiden, und daneben durch diejenigen Drehungen $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, welche das Element während dieser Zeit in Bezug auf die drei Coordinatenaxen ausführt. Analoge Bedeutungen mögen dx, dy, dz, und $d\alpha_1$, $d\beta_1$, $d\gamma_1$ für das Element J_1Ds_1 besitzen. — Alsdann finden die Relationen statt:

---

*) Denn die Richtung M' ($d\mathfrak{U}$, $d\mathfrak{V}$, $d\mathfrak{W}$) steht nicht nur senkrecht gegen r ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$), sondern auch senkrecht gegen die Richtung ($\mathfrak{V}d\mathfrak{W} - \mathfrak{W}d\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}d\mathfrak{U} - \mathfrak{U}d\mathfrak{W}$, $\mathfrak{U}d\mathfrak{V} - \mathfrak{V}d\mathfrak{U}$).

$$dr = U(dx - dx_1) + V(dy - dy_1) + W(dz - dz_1),$$
$$d\mathsf{A} = \Gamma d\beta - \mathsf{B} d\gamma, \qquad d\mathsf{A}_1 = \Gamma_1 d\beta_1 - \mathsf{B}_1 d\gamma_1,$$
$$d\mathsf{B} = \mathsf{A} d\gamma - \Gamma d\alpha, \qquad d\mathsf{B}_1 = \mathsf{A}_1 d\gamma_1 - \Gamma_1 d\alpha_1,$$
$$d\Gamma = \mathsf{B} d\alpha - \mathsf{A} d\beta, \qquad d\Gamma_1 = \mathsf{B}_1 d\alpha_1 - \mathsf{A}_1 d\beta_1.$$

Sämmtliche in dS (50.) enthaltenen Zuwüchse dr, $d\Theta$, $d\Theta_1$, $d\mathsf{E}$ können (wie aus diesen Relationen folgt) ausgedrückt werden durch $dx, dy, dz, d\alpha, d\beta, d\gamma, dx_1, dy_1, dz_1, d\alpha_1, d\beta_1, d\gamma_1$; so dass sich also für dS selber ein Ausdruck von folgender Form ergiebt:

$$(53.) \quad dS = (S_x dx + S_y dy + S_z dz) + (S_\alpha d\alpha + S_\beta d\beta + S_\gamma d\gamma)$$
$$+ (T_x dx_1 + T_y dy_1 + T_z dz_1) + (T_\alpha d\alpha_1 + T_\beta d\beta_1 + T_\gamma d\gamma_1).$$

Alsdann repräsentiren offenbar S_x, S_y, S_z und S_α, S_β, S_γ die von $J_1 Ds_1$ auf JDs ausgeübten ponderomotorischen Kräfte und Drehungsmomente, während T_x, T_y, T_z und T_α, T_β, T_γ die analoge Bedeutung haben für die von JDs auf $J_1 Ds_1$ ausgeübte Wirkung.

Wenn man nun den Ausdruck (53.) wirklich bildet, so erhält man:

$$(54.) \qquad S_x = JJ_1 Ds Ds_1 \left[\left(\mathsf{P} - \frac{2h\Theta\Theta_1}{r^2}\right)U + \frac{h(\Theta_1 \mathsf{A} + \Theta \mathsf{A}_1)}{r^2}\right],$$

$$(55.) \qquad S_\alpha = JJ_1 Ds Ds_1 \left[\frac{h\Theta_1(\mathsf{B}W - \Gamma V)}{r} - \frac{h(\mathsf{B}\Gamma_1 - \Gamma \mathsf{B}_1)}{r}\right],$$

und analoge Werthe für S_y, S_z und S_β, S_γ; dabei repräsentirt P den Ausdruck (47.).

Nach (54.) ist die auf JDs ausgeübte ponderomotorische Kraft (S_x, S_y, S_z) zerlegbar in drei Kräfte, welche respective parallel mit r, mit Ds und mit Ds_1 sind.

Andererseits ist nach (55.) das auf JDs ausgeübte ponderomotorische Drehungsmoment (S_α, S_β, S_γ) zerlegbar in zwei Drehungsmomente, von denen das eine die Normale der Ebene (Ds, r), das andere die Normale der Ebene (Ds, Ds_1) zur Axe hat.

Die erhaltenen Elementargesetze (51.) und (54.), (55.) besitzen, wie man sieht, einen abschreckend complicirten Charakter. Auch erkennt man leicht, dass eine Vereinfachung dieser Gesetze nur dadurch erreicht werden kann, dass man in Betreff der beiden durch die Relation (44.)

$$(56.) \qquad g + h = -A^2$$

verbundenen Constanten g und h annimmt, die erstere wäre $= -A^2$, die letztere $= 0$. Alsdann aber werden die in Rede

stehenden Gesetze identisch mit denjenigen, zu welchen wir im vorhergehenden Abschnitt (pag. 503) gelangt sind.

Setzt man der Relation (56.) entsprechend:

$$g = -A^2 \frac{1-k}{2},\qquad (57.)$$
$$h = -A^2 \frac{1+k}{2},$$

wo k eine unbekannte Constante vorstellt, so wird das eben Gesagte dahin auszudrücken sein, dass die gefundenen Elementargesetze *nur dann* einen einfacheren Charakter annehmen, wenn k den Werth (-1) besitzt, dass sie in diesem Falle aber identisch sind mit den Gesetzen des vorhergehenden Abschnitts.

Inhalt.

Dritter Abschnitt.

Untersuchung der von Ampère und Faraday entdeckten Kräfte. Erste Methode.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der von Ampère und Faraday entdeckten Kräfte. Zweite Methode.

Verbesserungen.

I. Die letzte Zeile von pag. 423 soll lauten:

$$\frac{Dx}{Ds} = \mathsf{A}, \quad \frac{Dy}{Ds} = \mathsf{B}, \quad \frac{Dz}{Ds} = \Gamma;$$

II. Auf Seite 429, Zeile 8 v. o. setze man: »alle Elemente der beiden« statt: »zwei beliebig gegebene«.

III. Das im Teubner'schen Verlag erscheinende Werk, auf welches ich mich im Verlaufe dieser Untersuchungen mehrfach gestützt habe (vergl. z. B. die Noten zu pag. 425, 431, 432 u. s. w.), ist irrthümlicher Weise als »Theorie der elektrischen Kräfte« bezeichnet worden. Sein wahrer Titel lautet kurzweg: »Die elektrischen Kräfte«.

VON DER

BESTIMMUNG DER THEILUNGSFEHLER

EINES

GRADLINIGEN MAASSSTABES.

VON

P. A. HANSEN
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1874.

Im Manuscript übergeben am 15. Januar 1874; im Druck vollendet am 28. März, dem Todestage des Verfassers.

VON DER

BESTIMMUNG DER THEILUNGSFEHLER

EINES

GRADLINIGEN MAASSSTABES.

VON

P. A. HANSEN.

Als ich im XVII. Bande von Schumacher's Astr. Nachr. die von mir ausgedachte Einrichtung veröffentlichte, welche gestattet, auf einem zu Winkelmessungen bestimmten Kreise, die Anzahl der erforderlichen Theilstriche auf eine sehr geringe zurückzuführen, war das Verfahren um die Fehler der Theilstriche eines Kreises zu bestimmen schon bekannt, und es konnte auf das von Bessel herstammende hingewiesen werden. In Folge meiner neuen Einrichtung war es möglich geworden, dieses Verfahren mit Leichtigkeit auf jeden einzelnen Theilstrich des Kreises ausdehnen zu können, während diess bei der gewöhnlichen Einrichtung der zu Winkelmessungen bestimmten Kreise, wenngleich theoretisch möglich, der übergrossen Arbeit wegen, welche es verursachen würde, praktisch in den Bereich der Unmöglichkeit versetzt werden muss. Anders verhält sich die Sache in Bezug auf die Hülfstheilungen, welche meine Einrichtung erfordert. Hier reichte das damals bekannte Verfahren zur Bestimmung der Fehler der Theilstriche nicht aus, sondern musste durch ein wesentlich abgeändertes, noch nicht angewandtes, ersetzt werden, welches ich auch in der angezogenen Abhandlung beschrieben und erklärt habe. Dieses, damals neue, Verfahren kann ohne Abänderung auch zur Bestimmung der Theilungsfehler eines gradlinigen Maassstabes angewandt werden, und ist auch dazu benutzt worden; da jedoch nicht behauptet werden kann, dass man es immer richtig angewandt habe, so dürfte es wohl nicht für überflüssig gehalten werden auf dasselbe zurück zu kommen, und es von Neuem, mit specieller Rücksichtnahme auf den eben genannten Zweck, und zwar etwas ausführlicher, als in der angezogenen Abhandlung geschehen ist, zu erläutern.

Vorbereitende Entwickelungen.

1.

Neben dem Maassstabe, dessen Theilungsfehler ermittelt werden sollen, lasse man sich ein ähnliches Metallstück anfertigen, und auf demselben vorläufig zwei Theilstriche ziehen, die ein Intervall bilden, welches den Intervallen des Maassstabes ohngefähr gleich ist, folglich entweder ein Millimeter, oder eine Linie, oder andere dergleichen Maasstheile, je nach der Beschaffenheit des zu berichtigenden Maassstabes, darstellt. Es ist durchaus nicht nöthig, dass dieses Intervall, welches ich das Prüfungsintervall nennen werde, irgend einem der Intervalle des Maassstabes vollständig entspreche, sondern es kann, ohne den mindesten Einfluss auf das Resultat hervor zu bringen, merklich davon abweichen.

Durch Hülfe eines dazu geeigneten mikrometrischen Apparats messe man die Unterschiede zwischen dem Prüfungsintervall und jedem der Intervalle des Maassstabes. Die Art der Ausführung dieser Messungen wird durch die Einrichtung des angewandten Apparats bedingt, und kann daher hier nicht näher erörtert werden; es ist nur darauf aufmerksam zu machen, dass die Messung eines jeden Intervalls des Maassstabes unabhängig von der Messung der übrigen Intervalle auszuführen ist, so dass die Messungen aller Intervalle nur das gemeinsam haben, dass sie alle von der noch unbekannten Grösse des Prüfungsintervalls abhängen.

Die Resultate dieser Messungen, oder mit anderen Worten die durch die Messungen gefundenen Unterschiede zwischen den Intervallen des Maassstabes und dem Prüfungsintervalle, sollen der Reihe nach mit α_0, α_1, α_2, etc. bezeichnet, und positiv angenommen werden, wenn das betreffende Intervall des Maassstabes grösser gefunden worden ist, als das Prüfungsintervall, dessen unbekannte Grösse ich mit w bezeichnen will. Die wahren Grössen der Intervalle des Maassstabes sind also durch die Ausdrücke $w + \alpha_0$, $w + \alpha_1$, $w + \alpha_2$, etc. gegeben, und da dieselben mit Theilungsfehlern behaftet angenommen werden, so sind sie einander ungleich. Durch Anbringung der Theilungsfehler sollen diese Intervalle aber auf eine gleiche Grösse, die wir mit i bezeichnen wollen, hingeführt werden. Bezeichnen wir daher die Theilungsfehler der Theilstriche des Maassstabes, von dem einen Ende desselben anfan-

gend, der Reihe nach mit (0), (1), (2), (3), etc., so erhalten wir sogleich die Gleichungen

$$-(0)+(1)+w+\alpha_0=i$$
$$-(1)+(2)+w+\alpha_1=i$$
etc.

Man sieht schon aus den beiden hingeschriebenen Gleichungen, dass sich in der Rechnung w von i nicht trennen lässt; setzen wir daher

$$w-i=m$$

und nehmen an, dass die Anzahl der Intervalle des Maassstabes mit n bezeichnet werde, so geben die beschriebenen Messungen die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} -(0)+(1)+m+\alpha_0=0 \\ -(1)+(2)+m+\alpha_1=0 \\ -(2)+(3)+m+\alpha_2=0 \\ \text{etc. bis} \\ -(n-2)+(n-1)+m+\alpha_{n-2}=0 \\ -(n-1)+(n)+m+\alpha_{n-1}=0 \end{array}\right\} (a)$$

in welchen schon eine vollständige Auflösung der Aufgabe enthalten ist.

2.

Zur Bestimmung der den Gleichungen (a) beizulegenden Gewichte mache ich auf den längst bewiesenen Grundsatz aufmerksam, dass ohne Ausnahme jeder von unmittelbar beobachteten (oder durch Messungen bestimmten) Grössen abhängigen Gleichung das Gewicht beizulegen ist, welches der darin vorkommenden, durch Beobachtungen bestimmten Grösse zukommt. In den Gleichungen (a) sind diess die mit α_0, α_1, α_2, etc. bezeichneten Grössen, und folglich sind den Gleichungen diejenigen Gewichte beizulegen, die den α_0, α_1, α_2, etc. zukommen. Nun erhellt aber aus dem Vorhergehenden, dass alle diese Grössen, ohne Ausnahme, auf gleiche Weise durch die Messungen ermittelt werden, und folglich kommt denselben, in der Voraussetzung, dass jede derselben auf derselben Anzahl mit gleicher Sorgfalt ausgeführter Messungen beruht, ein gleiches Gewicht zu, welches der Einheit gleich gesetzt werden kann. Einer jeden der Gleichungen (a) darf mithin das Gewicht $=1$ beigelegt werden, da die verlangte Voraussetzung immer erfüllt werden kann, und eine absichtliche Abweichung davon keinen Zweck hat, vielmehr den Uebelstand hervorruft, dass die Behandlung der Gleichungen unnützer Weise verweitläuftigt wird.

3.

Untersuchen wir das Resultat, welches hervorgeht, wenn zur Auflösung unserer Aufgabe blos die Gleichungen (a) verwendet werden. Da den eben gegebenen Erklärungen zufolge, einer jeden dieser Gleichungen das Gewicht $= 1$ beigelegt werden muss, so führt die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf dieselben zu den folgenden Endgleichungen,

$$\begin{array}{rl}
(0) - (1) \qquad\qquad - m &= \varepsilon_0 \\
-(0) + 2\,(1) - (2) \qquad\qquad &= \varepsilon_1 \\
-(1) + 2\,(2) - (3) \qquad\qquad &= \varepsilon_2 \\
\text{etc. bis} \qquad\qquad & \\
-(n-3) + 2\,(n-2) - (n-1) &= \varepsilon_{n-2} \\
-(n-2) + 2\,(n-1) - (n) \qquad &= \varepsilon_{n-1} \\
-(n-1) + (n) + m &= \varepsilon_n \\
-(0) \qquad\qquad + (n) + nm &= \Theta
\end{array}$$

in welchen

$$\varepsilon_0 = \alpha_0,\ \varepsilon_1 = \alpha_1 - \alpha_0,\ \varepsilon_2 = \alpha_2 - \alpha_1,\ \text{etc. bis}$$

$$\varepsilon_{n-2} = \alpha_{n-2} - \alpha_{n-3},\ \varepsilon_{n-1} = \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2},\ \varepsilon_n = -\alpha_{n-1}$$

so wie

$$\Theta = -(\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n)$$

gesetzt worden sind. Die Auflösung unserer Aufgabe beruht nun auf der der vorstehenden Endgleichungen, aber es ist leicht zu erkennen, dass hiebei zwei der Unbekannten (0), (1), (2), etc. unbestimmt bleiben, und folglich willkührlich angenommen werden können. Wir können hier ohne Weiteres als vollgültigen Grund für diesen Umstand angeben, dass die Anzahl der Gleichungen (a), von welchen wir ausgegangen sind, um zwei kleiner ist, als die Anzahl der darin enthaltenen Unbekannten. Die einfachste Bestimmung, die wir über die zwei unbestimmbaren Unbekannten treffen können, ist die, dass wir

$$(0) = 0 \text{ und } (n) = 0$$

setzen. Diese Bestimmungen sind mit der Natur unserer Aufgabe aufs Engste verwandt, und werden sich weiter unten in allen noch zu entwickelnden Auflösungen wiederholen. Denn durch die Bedingungen der vorgelegten Aufgabe kann die absolute Länge des zu prüfenden Maassstabes nicht bestimmt werden; es werden vielmehr durch dieselbe nur die Verschiedenheiten oder Unregelmässigkeiten, welche

die Intervalle des Maassstabes besitzen, ausgeglichen, und diese Intervalle auf ein gleiches Maass hingeführt. Hiebei müssen selbstverständlich die Fehler der beiden äussersten Theilstriche unberührt bleiben. Wenn man auch die absolute Länge des zu prüfenden Maassstabes kennen lernen will, so müssen dazu andere Hülfsmittel angewendet werden, von welchen jedoch hier nicht die Rede sein wird.

4.

Nach der Einführung der beiden Bedingungsgleichungen $(0) = 0$ und $(n) = 0$ in die Endgleichungen des vor. Art. giebt die letzte derselben sogleich

$$m = \frac{\Theta}{n}$$

wodurch m bestimmt ist. Bei der Auflösung der übrigen Endgleichungen müssen die erste und die letzte derselben weggelassen werden, da sie in den anderen enthalten sind, und folglich zugleich mit diesen erfüllt werden. Die aufzulösenden Gleichungen sind daher die folgenden,

$$\begin{aligned}
2\,(1) - (2) &= \varepsilon_1 \\
-(1) + 2\,(2) - (3) &= \varepsilon_2 \\
-(2) + 2\,(3) - (4) &= \varepsilon_3 \\
&\text{etc. bis} \\
-(n-4) + 2\,(n-3) - (n-2) &= \varepsilon_{n-3} \\
-(n-3) + 2\,(n-2) - (n-1) &= \varepsilon_{n-2} \\
-(n-2) + 2\,(n-1) \qquad &= \varepsilon_{n-1}
\end{aligned}$$

deren bestimmte Auflösung nach bekannten Regeln ausgeführt werden kann, und hier nicht angeführt zu werden braucht. Es kommt uns vielmehr darauf an zu erfahren, wie die Gewichte der Unbekannten beschaffen sind, die durch diese Auflösung hervorgehen, und zu diesem Zweck müssen wir die unbestimmte Auflösung der vorstehenden Gleichungen kennen lernen, die auch leicht zu erhalten ist.

Setzt man alle Grössen rechter Hand der Gleichheitszeichen, mit Ausnahme von ε_1, gleich Null, multiplicirt hierauf die vorletzte Gleichung mit 2, und addirt dieses Product zur letzten, so ergiebt sich

$$-2\,(n-3) + 3\,(n-2) = 0$$

in welcher $(n-1)$ eliminirt ist. Multiplicirt man ferner die drittletzte mit 3, und addirt das Product zur vorstehenden, so bekommt man

$$-3\,(n-4) + 4\,(n-3) = 0$$

in welcher beides $(n-1)$ und $(n-2)$ eliminirt sind. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf

$$-(n-2)\,(1) + (n-1)\,(2) = 0$$

wo $(n-2)$ und $(n-1)$ die numerischen Coefficienten der Theilungsfehler (1) und (2) sind. Die Verbindung dieser Gleichung mit

$$2\,(1) - (2) = \varepsilon_1$$

giebt

$$(1) = \frac{n-1}{n}\,\varepsilon_1$$

$$(2) = \frac{n-2}{n}\,\varepsilon_1$$

und eben so findet man

$$(3) = \frac{n-3}{n}\,\varepsilon_1 \text{ etc. bis}$$

$$(n-2) = \frac{2}{n}\,\varepsilon_1,\ (n-1) = \frac{1}{n}\,\varepsilon_1$$

Da die Gleichungen, von welchen wir ausgegangen sind, reciproke Gleichungen sind, so muss die unbestimmte Auflösung derselben die nämliche Eigenschaft besitzen; wir können demzufolge vermittelst der so eben erhaltenen Ausdrücke sogleich die Gleichung hinschreiben:

$$(1) = \frac{n-1}{n}\,\varepsilon_1 + \frac{n-2}{n}\,\varepsilon_2 + \frac{n-3}{n}\,\varepsilon_3 + \ldots$$
$$+ \frac{3}{n}\,\varepsilon_{n-3} + \frac{2}{n}\,\varepsilon_{n-2} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_{n-1}$$

Setzt man nun $\varepsilon_1 = 0$, und wendet die daraus entspringende Gleichung

$$2\,(1) - (2) = 0$$

auf die vorstehende an, so entsteht

$$(2) = \frac{n-2}{n}\,\varepsilon_1 + 2\,\frac{n-2}{n}\,\varepsilon_2 + 2\,\frac{n-3}{n}\,\varepsilon_3 + \ldots .$$
$$+ 2\,\frac{3}{n}\,\varepsilon_{n-3} + 2\,\frac{2}{n}\,\varepsilon_{n-2} + 2\,\frac{1}{n}\,\varepsilon_{n-1}$$

womit zugleich alle mit ε_2 multiplicirten Glieder in den übrigen Gleichungen gegeben sind. Nachdem auch $\varepsilon_2 = 0$ gesetzt und die daraus entstehende Gleichung

$$-(1) + 2\,(2) - (3) = 0$$

auf die vorstehenden angewandt worden ist, so folgt

$$(3) = \frac{n-3}{n}\,\varepsilon_1 + 2\,\frac{n-3}{n}\,\varepsilon_2 + 3\,\frac{n-3}{n}\,\varepsilon_3 + \ldots .$$
$$+ 3\,\frac{3}{n}\,\varepsilon_{n-3} + 3\,\frac{2}{n}\,\varepsilon_{n-2} + 3\,\frac{1}{n}\,\varepsilon_{n-1}$$

welches Verfahren man beliebig fortsetzen kann.

5.

Es ist nicht nothwendig das eben angegebene Verfahren hier weiter fortzusetzen, da das Gesetz des Fortganges derjenigen Coefficienten, auf deren Kenntniss es hier allein ankommt, sich durch die vorstehenden Entwickelungen deutlich ausspricht. Es sollen die Gewichte der durch das angewandte Verfahren bestimmten Theilungsfehler erhalten werden, und da diese überhaupt, wenn mit (p) irgend einer der Theilungsfehler bezeichnet wird, dem Coefficienten von e_p in der Gleichung für (p) umgekehrt proportional sind, so geben die Entwickelungen des vor. Art. sogleich allgemein das Gewicht dieser Bestimmung von (p)

$$= \frac{n}{p\,(n-p)}$$

welchen Ausdruck ich schon in der Eingangs angezogenen Abhandlung, jedoch ohne den Beweis hinzuzufügen, gegeben habe.

Betrachtet man dieses Gewicht näher, so findet man, dass es für jede zwei Theilungsfehler, welche solchen Theilstrichen angehören, die gleich weit von den Endpunkten des Maassstabes entfernt sind, gleiche Grösse hat, aber fortwährend kleiner wird, je mehr sich die Theilstriche der Mitte des Maassstabes nähern, wo dasselbe überhaupt ein Minimum wird.

Nehmen wir z. B. an, dass der zu berichtigende Maassstab 60 Intervalle besitze, so ist das Gewicht des durch das vorstehende Verfahren bestimmten Theilungsfehlers (30) nur $= \frac{1}{15}$; wenn der Maassstab 120 Intervalle hat, so ist das Gewicht von (60) nur $= \frac{1}{30}$ u. s. w. Es giebt sich hieraus zu erkennen, dass das im Vorhergehenden erklärte Verfahren zu geringe Sicherheit darbietet, um ausreichend genaue Resultate zu liefern, und dass die Messungen vermehrt werden müssen um überall ausreichende Sicherheit zu erlangen.

Die zu dem genannten Zwecke dienlichen Verfahrungsarten sollen im Folgenden auseinandergesetzt werden.

Erstes Verfahren.

6.

Die grösstmögliche Sicherheit oder Genauigkeit in den Resultaten erlangt man, wenn man nicht nur, wie im Vorhergehenden angenommen wurde, die einzelnen Intervalle, sondern alle Combinationen zu je zweien derselben mit einem Prüfungsintervall vergleicht. Zu dem Ende muss man einen Prüfungsmaassstab anwenden, welcher dem zu prüfenden nahe gleich ist. Mit irgend einem bestimmten Intervall des Prüfungsmaassstabes müssen nicht nur alle Intervalle des zu berichtigenden verglichen werden, sondern es müssen die Summen von 2, 3 u. s. w. bestimmten Intervallen des Prüfungsmaassstabes mit allen entsprechenden Intervallen des zu berichtigenden verglichen werden, das heisst, es müssen die Unterschiede derselben von dem betreffenden Prüfungsintervall durch mikrometrische Messungen ermittelt werden.

7.

Es erscheint angemessen jetzt einige der bisher angewandten Bezeichnungen abzuändern. Statt der in den Gleichungen (a) für die Unterschiede der dort vorkommenden Intervalle mit dem Prüfungsintervall eingeführten Grössen α_0, α_1, α_2, etc. schreiben wir jetzt $[0]_0$, $[1]_0$, $[2]_0$, etc. und für m soll m_0 geschrieben werden. Für die gemessenen Intervalle, die den Theilstrichen 0 und 2, 1 und 3, 2 und 4, etc. zukommen, sollen $[0]_1$, $[1]_1$, $[2]_1$, etc. nebst m_1 gesetzt, für die zu 0 und 3, 1 und 4, etc. gehörigen $[0]_2$, $[1]_2$, etc. nebst m_2 angewandt werden, u. s. w.

Wir erhalten hierauf, nachdem die Messungen aller Combinationen zu je zweien ausgeführt worden sind, statt der Gleichungen (a) die folgenden:

$$-(0)+(1)+m_0+[0]_0=0$$
$$-(1)+(2)+m_0+[1]_0=0$$
etc. bis
$$-(n-2)+(n-1)+m_0+[n-2]_0=0$$
$$-(n-1)+(n)+m_0+[n-1]_0=0$$

$$-(0)+(2)+m_1+[0]_1=0$$
$$-(1)+(3)+m_1+[1]_1=0$$
etc. bis

$$-(n-3)+(n-1)+m_1+[n-3]_1=0$$
$$-(n-2)+(n)\quad+m_1+[n-2]_1=0$$

$$-(0)\quad+(3)\quad+m_2+\quad[0]_2=0$$
$$-(1)\quad+(4)\quad+m_2+\quad[1]_2=0$$

etc. bis

$$-(n-4)+(n-1)+m_2+[n-4]_2=0$$
$$-(n-3)+(n)\quad+m_2+[n-3]_2=0$$

etc. bis

$$-(0)+(n-2)+m_{n-3}+[0]_{n-3}=0$$
$$-(1)+(n-1)+m_{n-3}+[1]_{n-3}=0$$
$$-(2)+(n)\quad+m_{n-3}+[2]_{n-3}=0$$

$$-(0)+(n-1)+m_{n-2}+[0]_{n-2}=0$$
$$-(1)+(n)\quad+m_{n-2}+[1]_{n-2}=0$$

$$-(0)+(n)\quad+m_{n-1}+[0]_{n-1}=0$$

Die letzte Combination habe ich nur der Vollständigkeit wegen angesetzt; ihre Messung kann nichts nützen, und sie fällt, wie man sehen wird, von selbst aus den Formeln hinaus.

8.

Behandelt man nun die Gleichungen des vor. Art. nach den Vorschriften der Methode der kleinsten Quadrate, und setzt dabei wieder das Gewicht jeder Gleichung $= 1$, so ergeben sich die folgenden Endgleichungen:

$$n(0)-(1)-(2)-\ldots\ldots-(n)$$
$$\qquad -m_0-m_1-m_2-\ldots\ldots-m_{n-1}+\{0\}=0$$
$$-(0)+n(1)-(2)-\ldots\ldots-(n)$$
$$\qquad -m_1-m_2-m_3-\ldots\ldots-m_{n-2}+\{1\}=0$$
$$-(0)-(1)+n(2)-(3)-\ldots\ldots-(n)$$
$$\qquad -m_2-m_3-\ldots\ldots-m_{n-3}+\{2\}=0$$

etc. bis

$$-(0)-(1)-(2)-\ldots\ldots+n(n-2)-(n-1)-(n)$$
$$\qquad +m_2+m_3+\ldots\ldots+m_{n-3}+\{n-2\}=0$$
$$-(0)-(1)-(2)-\ldots\ldots-(n-2)+n(n-1)-(n)$$
$$\qquad +m_1+m_2+\ldots\ldots+m_{n-2}+\{n-1\}=0$$
$$-(0)-(1)-(2)-\ldots\ldots-(n-2)-(n-1)+n(n)$$
$$\qquad +m_0+m_1+m_2+\ldots\ldots+m_{n-1}+\{n\}\quad=0$$

$$
\begin{array}{l}
-(0) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (n) \quad + nm_0 + \{0\}' = 0 \\
-(0)-(1) \qquad\qquad\qquad + (n-1) + (n) + (n-1)m_1 + \{1\}' = 0 \\
-(0)-(1)-(2) + (n-2) + (n-1) + (n) + (n-2)m_2 + \{2\}' = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\text{etc. bis} \\
-(0)-(1)-(2) + (n-2) + (n-1) + (n) + 3m_{n-3} + \{n-3\}' = 0 \\
-(0)-(1) \qquad\qquad\qquad + (n-1) + (n) + 2m_{n-2} + \{n-2\}' = 0 \\
-(0) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (n) + m_{n-1} + \{n-1\}' = 0
\end{array}
$$

deren Anzahl der der Unbekannten gleich ist, und worin die völlig bekannten Glieder die folgende Zusammensetzung haben:

$$
\begin{array}{l}
\{0\} = -[0]_0-[0]_1-[0]_2- \dots\dots\dots\dots -[0]_{n-2}-[0]_{n-1} \\
\{1\} = [0]_0-[1]_0-[1]_1-[1]_2- \dots\dots\dots -[1]_{n-3}-[1]_{n-2} \\
\{2\} = [1]_0-[2]_0 + [0]_1-[2]_1-[2]_2- \dots -[2]_{n-4}-[2]_{n-3} \\
\qquad\qquad\qquad\text{etc. bis} \\
\{n-2\} = [n-3]_0-[n-2]_0+[n-4]_1-[n-2]_1+[n-5]_2+\dots+[0]_{n-3} \\
\{n-1\} = [n-2]_0-[n-1]_0+[n-3]_1+[n-4]_2+ \dots\dots\dots +[0]_{n-2} \\
\{n\} \quad = [n-1]_0+[n-2]_1+[n-3]_2+ \dots\dots\dots\dots\dots +[0]_{n-1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \dots\dots + [n-1]_0 \\
\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \dots\dots + [n-2]_1 \\
\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \dots\dots + [n-3]_2 \\
\qquad\qquad\qquad\text{etc. bis} \\
\{n-3\}' = [0]_{n-3} + [1]_{n-3} + [2]_{n-3} \\
\{n-2\}' = [0]_{n-2} + [1]_{n-2} \\
\{n-1\}' = [0]_{n-1} .
\end{array}
$$

Es kann bemerkt werden, dass

$$(a) \qquad \{0\} + \{1\} + \{2\} + \dots\dots + \{n\} = 0$$

sowie

$$
\begin{array}{l}
(b)\; n(\{0\}-\{n\}) + (n-2)(\{1\}-\{n-1\}) + (n-4)(\{2\}-\{n-2\}) + \dots \\
\qquad + 2(\{0\}'+n\{n-1\}') + 2(2\{1\}'+(n-1)\{n-2\}') \\
\qquad\qquad + 2(3\{2\}'+(n-2)\{n-3\}') + \dots = 0
\end{array}
$$

sind.

Die vorstehenden Endgleichungen lassen sich ohne Schwierigkeit vollständig auflösen, und führen auf sehr einfache Resultate.

9.

Die erhaltenen Endgleichungen können durch die Einführung der Summen und der Unterschiede der gleich weit von den Enden

des zu berichtigenden Maassstabes liegenden Theilungsfehler in zwei völlig von einander unabhängige Systeme von Gleichungen zerlegt werden. Seien

$$
\begin{aligned}
(s,0) &= (0) + (n)\\
(s,1) &= (1) + (n-1)\\
(s,2) &= (2) + (n-2)\\
&\text{etc. bis}\\
(s,p-1) &= (p-1)+(p+1)\\
(s,p) &= 2(p)
\end{aligned}
$$

wenn n eine grade Zahl ist, und bis

$$
\begin{aligned}
(s,q-1) &= (q-1)+(q+2)\\
(s,q) &= (q)+(q+1)
\end{aligned}
$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, und man in jenem Falle zur Abkürzung

$$p = \frac{n}{2}$$

sowie in diesem

$$q = \frac{n-1}{2}$$

setzt, folglich immer p und q ganze Zahlen sind. Führt man diese Grössen in die erste Abtheilung der Endgleichungen des vor. Art. ein, und setzt zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{0\} + \{n\}\\
S_1 &= \{1\} + \{n-1\}\\
S_2 &= \{2\} + \{n-2\}\\
&\text{etc. bis}\\
S_{p-1} &= \{p-1\}+\{p+1\}\\
S_p &= 2\{p\}
\end{aligned}
$$

wenn n eine grade Zahl ist, und bis

$$
\begin{aligned}
S_{q-1} &= \{q-1\}+\{q+2\}\\
S_q &= \{q\}+\{q+1\}
\end{aligned}
$$

wenn n eine ungrade Zahl ist, so gehen sie über in

$$
\begin{aligned}
(n-1)(s,0)-2(s,1)-2(s,2)-\ldots\ldots-(s,p)+S_0 &= 0\\
-2(s,0)+(n-1)(s,1)-2(s,2)-\ldots\ldots-(s,p)+S_1 &= 0\\
-2(s,0)-2(s,1)+(n-1)(s,2)-\ldots\ldots-(s,p)+S_2 &= 0\\
&\text{etc. bis}\\
-2(s,0)-2(s,1)-\ldots\ldots+(n-1)(s,p-1)-(s,p)+S_{p-1} &= 0\\
-(s,0)-(s,1)-\ldots\ldots-(s,p-1)+\frac{n}{2}(s,p)+\frac{1}{2}S_p &= 0
\end{aligned}
$$

wenn n eine grade Zahl ist, und

$$(n-1)(s,0)-2(s,1)-2(s,2)-\ldots\ldots-2(s,q)+S_0=0$$
$$-2(s,0)+(n-1)(s,1)-2(s,2)-\ldots-2(s,q)+S_1=0$$
$$-2(s,0)-2(s,1)+(n-1)(s,2)-\ldots-2(s,q)+S_2=0$$

etc. bis

$$-2(s,0)-2(s,1)-\ldots+(n-1)(s,q-1)-2(s,q)+S_{q-1}=0$$
$$-2(s,0)-2(s,1)-\ldots-2(s,q-1)+(n-1)(s,q)+S_q=0$$

wenn n eine ungrade Zahl ist.

Diese Gleichungen bilden für sich ein abgeschlossenes System, da alle m daraus verschwunden sind, aber sie sind nicht von einander unabhängig. Denn addirt man sie, so verschwinden, sowohl wenn n grade, als wenn n ungrade ist, alle Unbekannten, und zufolge der Bedingungsgleichung (a) des Art. 8 wird auch die Summe der völlig bekannten Glieder gleich Null. Es ist also von diesen Gleichungen jede in den übrigen enthalten, und man darf daher irgend einer der Unbekannten einen beliebigen Werth beilegen. Am besten eignet sich dazu $(s,0)$, und man kann in vielen Fällen $(s,0)=0$ setzen. Der Allgemeinheit wegen soll im folgenden Art. indess keiner der Unbekannten ein bestimmter Werth beigelegt werden.

10.

Ziehen wir die erste der im vor. Art. erhaltenen Gleichungen nach und nach von allen übrigen ab, so ergeben sich sogleich

$$(n+1)\{(s,1)-(s,0)\}+S_1-S_0=0$$
$$(n+1)\{(s,2)-(s,0)\}+S_2-S_0=0$$

etc.

womit unsere Gleichungen schon vollständig aufgelöst sind. Es werden vollständig

$$(s,1)=(s,0)+\frac{S_0-S_1}{n+1}$$
$$(s,2)=(s,0)+\frac{S_0-S_2}{n+1}$$
$$(s,3)=(s,0)+\frac{S_0-S_3}{n+1}$$

etc. bis

$$(s,p-1)=(s,0)+\frac{S_0-S_{p-1}}{n+1}$$
$$(s,p)=(s,0)+\frac{S_0-S_p}{n+1}$$

welche für den Fall, dass n grade ist, ausdrücklich hingeschrieben sind, aber auch dem Falle, dass n ungrade ist, angehören, wenn darin q statt p geschrieben wird.

In jedem speciellen Falle, in welchem diese Gleichungen zur Anwendung kommen, muss der der Sachlage entsprechende, numerische Werth von $(s,0)$ darin substituirt werden, für welchen stets, wenn diesem Nichts entgegen steht, die Null zu wählen ist.

Man kann ausserdem bemerken, dass die vorstehende Auflösung unserer Gleichungen von der unbestimmbaren Grösse $[0]_{n-1}$ unabhängig, folglich bestimmt ist, denn zufolge der Ausdrücke des Art. 8 kommt diese Grösse nur in $\{0\}$ und $\{n\}$ vor, und verschwindet in der Summe derselben, die oben mit S_0 bezeichnet wurde.

11.

Gehen wir jetzt von den Summen zu den ähnlichen Unterschieden der Theilungsfehler über, und setzen

$$\begin{aligned}(d,0) &= (0)-(n)\\ (d,1) &= (1)-(n-1)\\ (d,2) &= (2)-(n-2)\\ &\text{etc. bis}\\ (d,p-2) &= (p-2)-(p+2)\\ (d,p-1) &= (p-1)-(p+1)\\ &\text{oder bis}\\ (d,q-1) &= (q-1)-(q+2)\\ (d,q) &= (q)-(q+1)\end{aligned}$$

je nachdem n grade oder ungrade ist. Man kann bemerken, dass $(d,p) = 0$ wird. Sei überdies

$$\begin{aligned}l_0 &= m_0 + m_{n-1}\\ l_1 &= m_1 + m_{n-2}\\ l_2 &= m_2 + m_{n-3}\\ &\text{etc. bis}\\ l_{p-2} &= m_{p-2} + m_{p+1}\\ l_{p-1} &= m_{p-1} + m_p\\ &\text{und bez. bis}\\ l_{q-1} &= m_{q-1} + m_{q+1}\\ l_q &= 2m_q\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_0 &= \{0\}-\{n\}, & K_0 &= \{0\}'+n\{n-1\}' \\
D_1 &= \{1\}-\{n-1\}, & K_1 &= 2\{1\}'+(n-1)\{n-2\}' \\
D_2 &= \{2\}-\{n-2\}, & K_2 &= 3\{2\}'+(n-2)\{n-3\}'
\end{aligned}
$$

etc. bis

$$
\begin{aligned}
D_{p-2} &= \{p-2\}-\{p+2\}, & K_{p-2} &= (p-1)\{p-2\}'+(p+2)\{p+1\}' \\
D_{p-1} &= \{p-1\}-\{p+1\}, & K_{p-1} &= p\{p-1\}'+(p+1)\{p\}'
\end{aligned}
$$

und bez. bis

$$
\begin{aligned}
D_{q-1} &= \{q-1\}-\{q+2\}, & K_{q-1} &= q\{q-1\}'+(q+2)\{q+1\}' \\
D_q &= \{q\}-\{q+1\}, & K_q &= 2(q+1)\{q\}'
\end{aligned}
$$

dann kann man die Endgleichungen des Art. 8 in die folgenden verwandeln,

$$
\begin{aligned}
&(n+1)(d,0)-2l_0-2l_1-2l_2-\dots-2l_{p-1}+D_0=0 \\
&(n+1)(d,1)\quad -2l_1-2l_2-\dots-2l_{p-1}+D_1=0 \\
&(n+1)(d,2)\quad -2l_2-\dots-2l_{p-1}+D_2=0
\end{aligned}
$$

etc. bis

$$
\begin{aligned}
&(n+1)(d,p-2)\quad -2l_{p-2}-2l_{p-1}+D_{p-2}=0 \\
&(n+1)(d,p-1)\quad -2l_{p-1}+D_{p-1}=0
\end{aligned}
$$

und bez. bis

$$
\begin{aligned}
&(n+1)(d,q-1)\quad -2l_{q-1}-l_q+D_{q-1}=0 \\
&(n+1)(d,q)\quad -l_q+D_q=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-(n+1)(d,0) \quad +nl_0+K_0=0 \\
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)\} \quad +2(n-1)l_1+K_1=0 \\
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+(d,2)\} \quad +3(n-2)l_2+K_2=0
\end{aligned}
$$

etc. bis

$$
\begin{aligned}
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+\dots+(d,p-2)\}+(p-1)(p+2)l_{p-2}+K_{p-2}=0 \\
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+\dots+(d,p-1)\}+p(p+1)l_{p-1}+K_{p-1}=0
\end{aligned}
$$

und bez. bis

$$
\begin{aligned}
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+\dots+(d,q-1)\}+q(q+2)l_{q-1}+K_{q-1}=0 \\
&-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+\dots+(d,q)\}+(q+1)^2l_q+K_q=0
\end{aligned}
$$

wozu bemerkt werden muss, dass wenn n eine ungrade Zahl ist, allenthalben q statt p, und im ersten Abschnitte überdies l_q statt $2l_{p-1}$ gesetzt werden muss.

Diese Gleichungen bilden nicht minder als diejenigen für die (s,k) ein für sich bestehendes System, in welchem die Anzahl der Gleichungen der der Unbekannten gleich ist. Auch diese Gleichungen können

in Bezug auf alle Unbekannten, welche sie enthalten, vollständig aufgelöst werden, wie man weiter unten sehen wird.

12.

Auch in dem im vor. Art. erhaltenen zweiten System von Endgleichungen ist jede in den übrigen enthalten, wie auf folgende Weise gezeigt werden kann.

Wenn n eine grade Zahl ist, multiplicire man die Gleichungen der ersten Abtheilung der Reihe nach mit

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots\ldots 4,\ 2$$

und addire die Producte, wodurch die folgende Gleichung entsteht,

$$\begin{aligned}&(n+1)\{n(d,0)+(n-2)(d,1)+\ldots+4(d,p-2)+2(d,p-1)\}\\ &\quad -2nl_0-4(n-1)l_1-\ldots\ldots-2(p-1)(p+2)l_{p-2}-2p(p+1)l_{p-1}\\ &\quad +nD_0+(n-2)D_1+\ldots\ldots+4D_{p-2}+2D_{p-1}=0\end{aligned}$$

Die Summe der Gleichungen der zweiten Abtheilung ist aber

$$\begin{aligned}&-\tfrac{n+1}{2}\{n(d,0)+(n-2)(d,1)+\ldots\ldots+4(d,p-2)+2(d,p-1)\}\\ &\quad +nl+2(n-1)l_1+\ldots+(p-1)(p+2)l_{p-2}+p(p+1)l_{p-1}\\ &\quad +K_0+K_1+\ldots\ldots+K_{p-2}+K_{p-1}=0\end{aligned}$$

Verdoppelt man diese und addirt sie darauf zur vorhergehenden, so verschwinden nicht nur alle Unbekannten, sondern auch die Summe der völlig bekannten Glieder wird vermöge der Bedingungsgleichung (b) des Art. 8, welche sich nach Einführung der D und K wie folgt stellen lässt,

$$\begin{aligned}&nD_0+(n-2)D_1+\ldots\ldots+4D_{p-2}+2D_{p-1}\\ &\quad +2K_0+2K_1+\ldots\ldots+2K_{p-2}+2K_{p-1}=0\end{aligned}$$

gleich Null; wir sind daher auf eine identische Gleichung hingeführt worden.

Wenn n eine ungrade Zahl ist, multiplicire man die Gleichungen der ersten Abtheilung der Reihe nach mit

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots\ldots 3,\ 1$$

und addire wieder die Producte, wodurch die Gleichung

$$\begin{aligned}&(n+1)\{n(d,0)+(n-2)(d,1)+\ldots+3(d,q-1)+(d,q)\}\\ &\quad -2nl_0-4(n-1)l_1-\ldots-2q(q+2)l_{q-1}-(q+1)^2 l_q\\ &\quad +nD_0+(n-2)D_1+\ldots+3D_{q-1}+D_q=0\end{aligned}$$

entsteht. Die doppelte Summe der Gleichungen der zweiten Abtheilung, weniger der letzten derselben, giebt aber

$$-(n+1)\{n(d,0)+(n-2)(d,1)+\ldots+3(d,q-1)+(d,q)\}$$
$$+2nl_0+4(n-1)l_1+\ldots+2q(q+2)l_{q-1}+(q+1)^2l_q$$
$$+2K_0+2K_1+\ldots+2K_{q-1}+K_q=0$$

In der Summe dieser beiden Gleichungen verschwinden nicht nur wieder alle Unbekannten, sondern auch die Summe aller völlig bekannten Glieder ist wieder gleich Null. Denn die Bedingungsgleichung (b) des Art. 8 lässt sich, wenn n ungrade ist, unter der folgenden Form aufstellen,

$$nD_0+(n-2)D_1+\ldots+3D_{q-1}+D_q$$
$$+2K_0+2K_1+\ldots+2K_{q-1}+K_q=0$$

woraus sogleich die Identität der jetzt erhaltenen Gleichung hervorgeht.

Man kann daher wieder irgend einer der Unbekannten, wozu sich am besten $(d,0)$ eignet, einen willkührlichen Werth beilegen, und in vielen Fällen $(d,0)=0$ setzen. In Verbindung mit der oben erhaltenen Bestimmung $(s,0)=0$ folgt hieraus, dass die Theilungsfehler

$$(0)=0,\ (n)=0$$

werden, auf welche Gleichungen wir schon in den »Vorbereitenden Entwickelungen« gekommen sind. Wir werden jetzt auf dieselben Gleichungen hingeführt, obgleich die Anzahl der ursprünglichen Gleichungen grösser ist, als die der Unbekannten, was in den vorbereitenden Entwickelungen nicht der Fall war.

Da jedoch die Gleichung $(d,0)=0$ nicht immer statthaft ist, sondern Fälle vorkommen können, in denen der Grösse $(d,0)$ irgend ein anderer, bestimmter Werth beigelegt werden muss, so soll im Folgenden nicht nur $(s,0)$, sondern auch $(d,0)$ unbestimmt gelassen werden. Später werden wir auf diesen Umstand zurückkommen.

13.

Die Endgleichungen des Art. 11 können auch vollständig aufgelöst werden. Setzen wir

$$L_0=2l_0+2l_1+2l_2+\ldots+2l_{p-1},\ \text{und bez.}+l_q$$
$$L_1=\qquad 2l_1+2l_2+\ldots+2l_{p-1},\ \text{und bez.}+l_q$$
$$L_2=\qquad\qquad 2l_2+\ldots+2l_{p-1},\ \text{und bez.}+l_q$$

etc. bis

$$L_{p-2}=2l_{p-2}+2l_{p-1}$$
$$L_{p-1}=2l_{p-1}$$

und bez. bis

$$L_{q-1} = 2l_{q-1} + l_q$$
$$L_q \quad = l_q$$

so geben die genannten Gleichungen ohne Ausnahme die allgemeine Gleichung

$$(n+1)(d,k) - L_k + D_k = 0 \,\ldots\ldots\ldots\, (D)$$

Aus dem Art. 11 erhalten wir ferner allgemein

$$m_k + m_{n-k-1} = l_k$$

und aus den Gleichungen des Art. 8 ergiebt sich sogleich

$$(n-k)m_k - (k+1)m_{n-k-1} + \{k\}' - \{n-k-1\}' = 0$$

woraus man durch Elimination

$$\left.\begin{aligned}(n+1)m_k &= (k+1)l_k - \{k\}' + \{n-k-1\}' \\ (n+1)m_{n-k-1} &= (n-k)l_k + \{k\}' - \{n-k-1\}'\end{aligned}\right\}\ldots (m)$$

zieht. Aus den Werthen der L ergeben sich aber

$$2l_0 = L_0 - L_1$$
$$2l_1 = L_1 - L_2$$
$$2l_2 = L_2 - L_3$$

etc. bis

$$2l_{p-2} = L_{p-2} - L_{p-1}$$
$$2l_{p-1} = L_{p-1}$$

und bez. bis

$$2l_{q-1} = L_{q-1} - L_q$$
$$l_q \quad = L_q$$

womit man l_k aus den Gleichungen (m) eliminiren, und folglich auch die m_0, m_1, etc. in Function der L_k ausdrücken kann. Unsere Auflösung erfordert also jetzt nur noch, dass die L_k durch bekannte Grössen ausgedrückt werden.

14.

In Hinblick auf die Fälle, in welchen man $(d,0)$ nicht der Null gleichsetzen darf, soll hier $(d,0)$ unbestimmt gelassen werden, gleichwie oben in Bezug auf $(s,0)$ geschehen ist. Da aber hier die Entwickelungen sich anders gestalten wie oben, so muss ein verändertes Verfahren eingehalten werden. Seien

$$D'_0 = D_0 + (n+1)(d,0)$$
$$K'_0 = K_0 - (n+1)(d,0)$$
$$K'_1 = K_1 - (n+1)(d,0)$$
$$K'_2 = K_2 - (n+1)(d,0)$$
etc.

durch deren Substitution aus allen Endgleichungen des Art. 11 $(d,0)$ äusserlich verschwindet. Die erste derselben giebt nun

$$L_0 = D'_0$$

wodurch L_0 gegeben ist, da dem in D'_0 enthaltenen $(d,0)$ in den Anwendungen jedenfalls ein bestimmter Werth beigelegt werden muss. Dieselbe erste Gleichung giebt aber auch

$$2l_0 - L_1 + D'_0 = 0$$

und die erste Gleichung der zweiten Abtheilung wird

$$nl_0 + K'_0 = 0$$

woraus man

$$L_1 = D'_0 + \frac{2}{n} K'_0$$

erhält, und folglich L_1 auch durch bekannte Grössen ausgedrückt wird. Die zweiten Gleichungen einer jeden Abtheilung der in Rede stehenden Endgleichungen des Art. 11 sind nun

$$\begin{aligned} (n+1)(d,1) - L_1 \qquad\qquad + D_1 &= 0 \\ -(n+1)(d,1) + 2(n-1)l_1 + K'_1 &= 0 \end{aligned}$$

aus deren Verbindung mit

$$L_2 - L_1 + 2l_1 = 0$$

die Gleichung

$$L_2 = L_1 + \frac{1}{n-1} \{K'_1 + D_1 - L_1\}$$

hervorgeht. Zur Bestimmung von L_3 geben die ferneren Endgleichungen des Art. 11 zunächst

$$\begin{aligned} (n+1)\{(d,1) + (d,2)\} + D_2 + D_1 - L_2 - L_1 &= 0 \\ -(n+1)\{(d,1) + (d,2)\} + 3(n-2)l_2 + K'_2 &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen man mit Zuziehung von

$$L_3 - L_2 + 2l_2 = 0$$

sehr leicht

$$L_3 = L_2 + \frac{2}{3(n-2)} \{K'_2 + D_2 + D_1 - L_2 - L_1\}$$

erhält. Diese Entwickelungen kann man fortsetzen so weit man will, allein ihre Fortsetzung ist nicht nöthig, da aus den schon erhaltenen

Ausdrücken das Gesetz, nach welchem sie fortschreiten, deutlich erkennbar ist. Stellen wir die Resultate zusammen, so ergiebt sich, dass zur Berechnung aller (d,k) zuerst

$$L_1 = D'_0 + \frac{2}{n} K'_0$$
$$L_2 = L_1 + \frac{2}{2(n-1)} \{K'_1 + D_1 - L_1\}$$
$$L_3 = L_2 + \frac{2}{3(n-2)} \{K'_2 + D_2 + D_1 - L_2 - L_1\}$$
$$L_4 = L_3 + \frac{2}{4(n-3)} \{K'_3 + D_3 + D_2 + D_1 - L_3 - L_2 - L_1\}$$

etc.

zu berechnen sind, worauf man ohne Ausnahme, durch die Gleichung (D) des vor. Art.,

$$(d,k) = \frac{L_k - D_k}{n+1} \quad \ldots\ldots (d)$$

erhält. Durch die Einführung der L in die Gleichungen (m) des vor. Art. bekommt man ferner

$$m_k = \frac{\frac{1}{2}(k+1)(L_k - L_{k+1}) - \{k\}' + \{n-k-1\}'}{n+1}$$
$$m_{n-k-1} = \frac{\frac{1}{2}(n-k)(L_k - L_{k+1}) + \{k\}' - \{n-k-1\}'}{n+1}$$

womit die Endgleichungen des Art. 11 vollständig aufgelöst sind. Nachdem man die (s,k) und die (d,k) erhalten hat, ergeben sich die Theilungsfehler selbst durch die Gleichungen

$$(k) = \frac{1}{2} \{(s,k) + (d,k)\}$$
$$(n-k) = \frac{1}{2} \{(s,k) - (d,k)\}$$

welche auch ohne Ausnahmen statt finden.

15.

Zur vorstehenden Auflösung ist die Bemerkung zu machen, dass die an sich unbestimmbare Grösse $[0]_{n-1}$ nur in m_{n-1} vorkommt. Durch die vorhergehenden Ausdrücke wird man erkennen, dass diese Grösse hier nur in D'_0, K'_0, $\{n-1\}'$ auftritt, und dass man mit blosser Rücksichtnahme darauf

$$D'_0 = -2[0]_{n-1},\ K'_0 = n[0]_{n-1},\ \{n-1\}' = [0]_{n-1}$$

erhält. Nun kommen aber in den obigen Gleichungen für die (d,k) D'_0 und K'_0 nur in der Function L_1 oder $D'_0 + \frac{2}{n} K'_0$ vor, und in dieser

verschwindet den vorstehenden Gleichungen zufolge $[0]_{n-1}$, folglich werden alle (d,k) von $[0]_{n-1}$ unabhängig.

Von den übrigen Unbekannten ist vor Allem m_0 zu betrachten, wofür aus dem vor. Art., wenn in der betreffenden Gleichung $k = 0$ gesetzt wird,

$$m_0 = \frac{-\frac{1}{n}K'_0 - \{0\}' + \{n-1\}'\{n-1\}'}{n+1}$$

hervorgeht. Aber vermöge der obigen Gleichungen verschwindet auch hier $[0]_{n-1}$, und m_0 ist folglich auch unabhängig von $[0]_{n-1}$. Dasselbe findet, wie sich leicht ergiebt, auch für m_1, m_2, etc. bis auf m_{n-1} statt, für welche Grösse, wenn in der Gleichung des vor. Art. für m_{n-k-1} der Index $k = 0$ gesetzt wird, man

$$m_{n-1} = \frac{-K'_0 + \{0\}' - \{n-1\}'}{n+1}$$

oder, nach der Elimination von K'_0,

$$m_{n-1} = -\{n-1\}' + (d,0)$$

erhält. Hier verschwindet $[0]_{n-1}$ nicht, und zwar ist es der einzige Fall, wo diess stattfindet. Die Grösse m_{n-1} bleibt also unbestimmt, aber dieser Umstand hat auf die Auflösung unserer Aufgabe nicht den geringsten Einfluss; man kann $[0]_{n-1}$ annehmen wie man will, ohne dass irgend eine der Unbekannten, m_{n-1} ausgenommen, dadurch geändert wird. Am zweckmässigsten setzt man entweder

$$[0]_{n-1} = 0$$

wodurch

$$m_{n-1} = (d,0)$$

oder

$$[0]_{n-1} = (d,0)$$

wodurch

$$m_{n-1} = 0$$

wird, ohne dass daraus weitere Folgen in Bezug auf die übrigen Unbekannten entstehen.

16.

Es darf nicht unbemerkt gelassen werden, dass nachdem die (d,k) bestimmt worden sind, sich für die m andere einfache Ausdrücke darbieten, welche sich ohne Weiteres aus der zweiten Abtheilung der Gleichungen des Art. 8 ergeben. Diese Ausdrücke sind

$$m_0 = -\frac{1}{n}\{\{0\}' - (d,0)\}$$

$$m_1 = -\frac{1}{n-1}\{\{1\}' - (d,0) - (d,1)\}$$

$$m_2 = -\frac{1}{n-2}\{\{2\}' - (d,0) - (d,1) - (d,2)\}$$

etc. bis

$$m_{p-1} = -\frac{1}{p+1}\{\{p-1\}' - (d,0) - (d,1) - \dots - (d,p-1)\}$$

oder bez. bis

$$m_q = -\frac{1}{q+1}\{\{q\}' - (d,0) - (d,1) - \dots\dots - (d,q)\}$$

ferner, in umgekehrter Ordnung

$$m_{n-1} = - \quad \{\{n-1\}' - (d,0)\}$$

$$m_{n-2} = -\frac{1}{2}\{\{n-2\}' - (d,0) - (d,1)\}$$

$$m_{n-3} = -\frac{1}{3}\{\{n-3\}' - (d,0) - (d,1) - (d,2)\}$$

etc. bis

$$m_p = -\frac{1}{p}\{\{p\}' - (d,0) - (d,1) - \dots\dots - (d,p-1)\}$$

oder bez. bis

$$m_{q+1} = -\frac{1}{q}\{\{q+1\}' - (d,0) - (d,1) - \dots - (d,q-1)\}$$

Wie man sieht, ist die obige Gleichung für m_{n-1} dieselbe, auf welche wir im vor. Art. gekommen sind, zugleich sieht man hier unmittelbar, dass alle übrigen m von $[0]_{n-1}$ unabhängig sind.

17.

Aus dem Art. 10 giebt sich unmittelbar die Wirkung der Summe $(s,0)$ auf die Theilungsfehler zu erkennen: man sieht, dass $(s,0)$ alle Theilungsfehler um eine beständige Grösse ändert, folglich keine andere Wirkung ausübt, als den Anfangspunkt der berichtigten Theilung zu verschieben. Anders verhält sich diess in Bezug auf den Unterschied $(d,0)$, dessen Wirkung nicht ohne Weiteres erkennbar ist, da diese Grösse in die Analyse hinein geflochten worden ist. Man kann indess die Wirkung, welche $(d,0)$ sowohl auf die Theilungsfehler wie auf die verschiedenen m ausübt, leicht ermitteln.

Bezeichnen wir die im Art. 13 eingeführten Functionen L_0, L_1, L_2, etc. für den Fall, dass $(d,0) = 0$ gesetzt worden ist, mit $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$, etc., so entstehen die Gleichungen

$$A_0 = D_0$$
$$A_1 = D_0 + \frac{2}{n} K_0$$
$$A_2 = A_1 + \frac{2}{2(n-1)} \{K_1 + D_1 - A_1\}$$
$$A_3 = A_2 + \frac{2}{3(n-2)} \{K_2 + D_2 + D_1 - A_2 - A_1\}$$
etc.

Zieht man diese von den Gleichungen für L_0, L_1, L_2, etc. des Art. 14 ab, so erhält man

$$L_0 - A_0 = D'_0 - D_0$$
$$L_1 - A_1 = D'_0 - D_0 + \frac{2}{n} \{K'_0 - K_0\}$$
$$L_2 - A_2 = L_1 - A_1 + \frac{2}{2(n-1)} \{K'_1 - K_1 - (L_1 - A_1)\}$$
$$L_3 - A_3 = L_2 - A_2 + \frac{2}{3(n-2)} \{K'_2 - K_2 - (L_2 - A_2) - (L_1 - A_1)\}$$
etc.

woraus vermittelst einer einfachen Elimination

$$L_0 = A_0 + (n+1)(d,0)$$
$$L_1 = A_1 + \frac{n-2}{n}(n+1)(d,0)$$
$$L_2 = A_2 + \frac{n-4}{n}(n+1)(d,0)$$
$$L_3 = A_3 + \frac{n-6}{n}(n+1)(d,0)$$
etc.

also allgemein

$$L_k = A_k + \frac{n-2k}{n}(n+1)(d,0)$$

folgt. Man erkennt schon hieraus, dass die Aenderungen, welche $(d,0)$ in den Theilungsfehlern hervorbringt, einer arithmetischen Progression folgen, deren Gliedern der Unterschied

$$-\frac{(d,0)}{n}$$

zukommt. Um der Gesammtwirkung, welche $(s,0)$ und $(d,0)$ auf die Theilungsfehler ausüben, einen Ausdruck zu verleihen, soll diese Wirkung, oder, mit anderen Worten, der Zuwachs, welchen die Theilungsfehler und die damit verwandten Grössen erhalten, durch ein der betreffenden Grösse vorgesetztes δ bezeichnet werden. Wir bekommen daher zunächst aus dem Vorhergehenden

$$\delta(s,k) = (s,0)$$
$$\delta(d,k) = \frac{n-2k}{n}(d,0)$$

woraus sich, wenn wir zu den Theilungsfehlern selbst übergehen, die Ausdrücke

$$\delta(k) = \frac{1}{2}(s,0) + \frac{n-2k}{2n}(d,0)$$
$$\delta(n-k) = \frac{1}{2}(s,0) - \frac{n-2k}{2n}(d,0)$$

ergeben, welche in

$$\delta(k) = \frac{n-k}{n}(0) + \frac{k}{n}(n) \ldots\ldots\ldots\ldots (k)$$

zusammengefasst werden können. Es folgt weiter

$$\delta(k+1) - \delta(k) = -\frac{1}{n}\{(0) - (n)\}$$

woraus man erkennen kann, dass jedes in der Voraussetzung $(0) = 0$ und $(n) = 0$ berichtigte Intervall des Maassstabes, dadurch dass diesen Grössen andere Werthe beigelegt werden, um die Grösse $\frac{(d,0)}{n}$ verkleinert wird, $(s,0)$ hingegen keine Wirkung auf die Intervalle ausübt.

Dieses Resultat lässt sich leicht erklären. Wenn $(d,0) = 0$ ist, so bleibt durch die Berichtigung des Maassstabes die ganze Länge desselben unverändert; bezeichnen wir diese mit λ, so muss nach der Anbringung der erhaltenen Theilungsfehler jedes Intervall des Maassstabes

$$= \frac{\lambda}{n}$$

werden. Wenn aber $(d,0)$ von der Null verschieden ist, so wird durch die Berichtigung des Maassstabes die Länge desselben verändert, und geht in $\lambda - (d,0)$ über. Folglich muss in diesem Falle nach der Anbringung der Theilungsfehler jedes Intervall den Werth

$$= \frac{\lambda-(d,0)}{n}$$

annehmen, also um die Grösse $\frac{(d,0)}{n}$ verkleinert werden, was mit dem durch die obige Analyse erhaltenen Resultat übereinstimmt, da dasselbe auf die nämliche Verkleinerung der Intervalle hingeführt hat.

18.

Es ist nun leicht auch die Aenderungen zu ermitteln, welche $(d,0)$ in den Werthen der verschiedenen m hervorbringt. Durch Anwendung des im vor. Art. erhaltenen Ausdrucks für $\delta(d,k)$ auf die Gleichungen des Art. 16 erhält man ohne Mühe

$$
(m) \ldots \left\{
\begin{aligned}
\delta m_0 &= \tfrac{1}{n}\,(d,0) \\
\delta m_1 &= \tfrac{2}{n}\,(d,0) \\
\delta m_2 &= \tfrac{3}{n}\,(d,0) \\
&\text{etc. bis} \\
\delta m_{n-3} &= \tfrac{n-2}{n}\,(d,0) \\
\delta m_{n-2} &= \tfrac{n-1}{n}\,(d,0) \\
\delta m_{n-1} &= (d,0)
\end{aligned}
\right.
$$

Auch dieses Resultat ist leicht zu erklären, und rührt davon her, dass sich jetzt die m auf andere Werthe der berichtigten Intervalle beziehen, als in dem Falle, wo $(d,0) = 0$ ist.

Wir können aus dem Vorhergehenden noch ein merkwürdiges Resultat ziehen. Gehen wir zu den Functionen der Unbekannten über, welche in den ursprünglichen Gleichungen des Art. 7 vorkommen, so geben die Entwickelungen dieses und des vor. Art. sogleich zu erkennen, dass die folgenden Gleichungen stattfinden,

$$
\begin{aligned}
-\delta(k) + \delta(k+1) + \delta m_0 &= 0 \\
-\delta(k) + \delta(k+2) + \delta m_1 &= 0 \\
-\delta(k) + \delta(k+3) + \delta m_2 &= 0 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

woraus man den Schluss ziehen kann, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler von $(d,0)$ unabhängig ist; wir werden jedoch von diesem Satze weiter unten einen directen Beweis liefern, weshalb wir uns hier dabei nicht länger aufhalten wollen.

19.

Die eben ausgeführten Entwickelungen geben ausserdem zu erkennen, dass man in allen Anwendungen, welche überhaupt von dem in Rede stehenden Verfahren gemacht werden können, die Berechnung in der Annahme, dass $(s,0) = 0$ und $(d,0) = 0$ seien, ausführen kann. Sind diese Annahmen in dem betreffenden Falle zulässig, so erhält man sogleich die Endresultate; sind aber die speciellen Umstände so beschaffen, dass den $(s,0)$ und $(d,0)$, oder einer derselben, Werthe beigelegt werden müssen, welche von der Null verschieden sind, so sind die auf die genannte Weise erhaltenen Werthe der Theilungsfehler und der Prüfungsintervalle durch die

Gleichungen (k) und (m) der beiden vorhergehenden Artikel auf ihre wahren Werthe hinzuführen.

Man kann weiter gehen. Es können Fälle vorkommen, in welchen nicht die Theilungsfehler der beiden Endstriche des zu berichtigenden Maassstabes, sondern die Fehler irgend zweier anderen Theilstriche desselben gegebene Grössen sind; auch dieser Fall kann durch einen kleinen Zusatz zu den vorhergehenden Entwickelungen auf sehr einfache Art berücksichtigt werden.

Seien die Indices der Theilstriche, deren Fehler im Voraus gegeben sein sollen, c und e, und die gegebenen Theilungsfehler selbst (c) und (e). Werden ferner die Fehler derselben beiden Theilstriche, welche man in der Voraussetzung, dass $(s,0) = 0$ und $(d,0) = 0$ seien, erhalten hat, mit (γ) und (ε) bezeichnet, dann erhalten wir im Sinne des Art. 17

$$\delta(c) = (c)-(\gamma), \quad \delta(e) = (e)-(\varepsilon)$$

und die Anwendung der Gleichung (k) auf diese beiden Theilstriche führt auf die beiden Gleichungen

$$(c)-(\gamma) = \tfrac{n-c}{n}.(0) + \tfrac{c}{n}(n)$$

$$(e)-(\varepsilon) = \tfrac{n-e}{n}(0) + \tfrac{e}{n}(n)$$

aus welchen sich durch Elimination

$$(0) = \tfrac{e}{e-c}\{(c)-(\gamma)\}-\tfrac{c}{e-c}\{(e)-(\varepsilon)\}$$

$$(n) = -\tfrac{n-e}{e-c}\{(c)-(\gamma)\}+\tfrac{n-c}{e-c}\{(e)-(\varepsilon)\}$$

ergeben. Die hieraus folgenden Werthe von (0) und (n) sind diejenigen, welche im gegenwärtigen Falle in den Gleichungen (k) und (m) anzuwenden sind, und zu dem Ende daraus eliminirt werden können. Setzt man zur Abkürzung

$$C = \tfrac{(c)-(\gamma)}{e-c}, \quad E = \tfrac{(e)-(\varepsilon)}{e-c}$$

so erhält man allgemein

$$\delta'(k) = (e-k)C + (k-c)E \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (k')$$

und

$$\delta' m_k = (k+1)(C-E) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (m')$$

welche im gegenwärtigen Falle die Berichtigung der Theilungsfehler und der Prüfungsintervalle geben. Die vollständigen Ausdrücke derselben werden nun

$$(k) + \delta'(k) \text{ und } m_k + \delta' m_k$$

wo wieder (k) und m_k diejenigen Werthe dieser Grössen bezeich-

nen, welche man in der Voraussetzung $(s,0) = 0$ und $(d,0) = 0$ im Voraus erhalten hat.

Man erkennt übrigens sogleich, dass die Gleichungen (k') und (m') in (k) und (m) übergehen, wenn man $c = 0$ und $e = n$ setzt, und demzufolge $(\gamma) = 0$ und $(\varepsilon) = 0$ macht.

20.

Eine wichtige Untersuchung besteht in der Ableitung des Ausdrucks für die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der übrig bleibenden Fehler der zur Lösung der Aufgabe ausgeführten Messungen, weil aus dieser Summe der mittlere zu befürchtende Fehler einer Messung mit grösstmöglicher Sicherheit berechnet, und durch dessen Verbindung mit den Gewichten der Bestimmung der Unbekannten, auch die mittleren zu befürchtenden Fehler derselben auf bekannte Weise berechnet werden können. Zur Ableitung des verlangten Ausdrucks soll von der längst bekannten Gleichung

$$\Omega = (ll) + (al)\, x + (bl)\, x' + (cl)\, x'' + \text{etc.}$$

ausgegangen werden, in welcher Ω die verlangte Summe, (ll) die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Quadrate der völlig bekannten Glieder der ursprünglichen Gleichungen, (al), (bl), (cl), etc. die völlig bekannten Glieder der Endgleichungen, und x, x', x'', etc. die Unbekannten bezeichnen.

In Bezug auf unsere Aufgabe, in welcher die Gewichte aller durch die Messungen erhaltenen Grössen der ursprünglichen Gleichungen $= 1$ gesetzt worden sind, wird

$$\begin{aligned}(ll) = {} & [0]_0^2 + [1]_0^2 + [2]_0^2 + \ldots\ldots + [n-1]_0^2 \\ & + [0]_1^2 + [1]_1^2 + [2]_1^2 + \ldots + [n-2]_1^2 \\ & \qquad \text{etc. bis} \\ & + [0]_{n-2}^2 + [1]_{n-2}^2 \\ & + [0]_{n-1}^2\end{aligned}$$

wo das letzte Glied, wenn es nicht $= 0$ gesetzt worden ist, mit aufgenommen werden muss. Die Coefficienten (al), (bl), (cl), etc. werden bezüglich

$$= \{0\}, = \{1\}, = \text{etc.} = \{n\}, = \{0\}', = \{1\}', = \text{etc.} = \{n-1\}'$$

wo wieder das letzte Glied nicht weggelassen werden darf, wenn es nicht $= 0$ ist. Die Unbekannten x, x', x'', etc. werden bezüglich

$= (0), = (1), =$ etc. $= (n), = m_0, = m_1, =$ etc. $= m_{n-1}$
wo in Bezug auf das letzte Glied wieder die vorstehenden Bemerkungen gelten.

Der obige allgemeine Ausdruck für Ω geht daher in Bezug auf unsere Aufgabe über in

$$\Omega = (ll) + \Sigma\,\{k\}(k) + \Sigma\,\{k\}'m_k \ldots (\Omega)$$

wo das erste Summenzeichen von $k = 0$ bis $k = n$, und das zweite von $k = 0$ bis $k = n-1$ ausgedehnt werden muss. Dieser Ausdruck ist schon der Anwendung zugänglich, da die Multiplicationen und Summirungen, welche er verlangt, leicht auszuführen sind; für die Quadrate, aus welchen das erste Glied besteht, bedient man sich am zweckmässigsten einer Tafel der Quadrate der Zahlen, deren es längst mehrere giebt. Der Ausdruck für Ω kann übrigens auf lauter Summen von Quadraten hingeführt werden, die mit ganzen Zahlen multiplicirt oder dividirt sind, wie jetzt gezeigt werden soll.

21.

Um die eben genannte Form herzustellen, gehen wir von den folgenden, theils oben ausdrücklich vorkommenden, theils aus dem Vorhergehenden leicht abzuleitenden Gleichungen aus,

$$\{k\}(k) + \{n-k\}(n-k) = \tfrac{1}{2}\,\{S_k\,(s,k) + D_k\,(d,k)\}$$
$$(s,k) = (s,0) + \frac{S_0 - S_k}{n+1}$$
$$(d,k) = \frac{L_k - D_k}{n+1}$$
$$\tfrac{1}{2}(S_k^2 + D_k^2) = \{k\}^2 + \{n-k\}^2$$

von welchen die zweite von $k = 1$ bis $k = p$, oder bez. bis $k = q$, die übrigen aber von $k = 0$ bis zu denselben oberen Grenzen sich erstrecken. Man bekommt nun leicht, wenn man diese allgemeinen Gleichungen ausschreibt,

$$\{0\}(0) + \{n\}(n) = \tfrac{1}{2}\,S_0\,(s,0) + \frac{D_0}{2(n+1)}\,(L_0 - D_0)$$
$$\{1\}(1) + \{n-1\}(n-1) = \tfrac{1}{2}\,S_1\,(s,0) + \frac{S_0S_1}{2(n+1)} + \frac{L_1D_1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\left\{\{1\}^2 + \{n-1\}^2\right\}$$
$$\{2\}(2) + \{n-2\}(n-2) = \tfrac{1}{2}\,S_2\,(s,0) + \frac{S_0S_2}{2(n+1)} + \frac{L_2D_2}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1}\left\{\{2\}^2 + \{n-2\}^2\right\}$$

etc. bis

$$\{p\}(p) = \frac{1}{4} S_p (s,0) + \frac{S_0 S_p}{4(n+1)} - \frac{1}{n+1} \{p\}^2$$

und bez. bis

$$\{q\}(q) + \{q+1\}(q+1) = \frac{1}{2} S_q (s,0) + \frac{S_0 S_q}{2(n+1)} + \frac{L_q D_q}{2(n+1)}$$
$$- \frac{1}{n+1} \left\{ \{q\}^2 + \{q+1\}^2 \right\}$$

Aber die Bedingungsgleichung (a) des Art. 8 giebt

$$0 = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} S_p$$

und bez.

$$0 = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_q$$

Aus der Summe der vorstehenden Gleichungen erhält man daher

$$\Sigma \{k\}(k) = - \frac{\Sigma \{k\}^2}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} \left\{ L_0 D_0 + L_1 D_1 + L_2 D_2 + \text{etc.} \right\}$$

welche allgemein gültig ist, und in welcher das Summenzeichen von $k = 0$ bis $k = n$ ausgedehnt werden muss.

22.

Die Gleichungen des Art. 16 geben durch Multiplication mit nm_0, $(n-1)m_1$, $(n-2)m_2$, etc. und Addition

$$nm_0^2 + (n-1)\, m_1^2 + (n-2)\, m_2^2 + \ldots + 2\, m_{n-2}^2 + m_{n-1}^2 =$$
$$- \left\{ \{0\}' m_0 + \{1\}' m_1 + \{2\}' m_2 + \ldots + \{n-2\}' m_{n-2} + \{n-1\}' m_{n-1} \right\}$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ L_0 (d,0) + L_1 (d,1) + L_2 (d,2) + \text{etc.} \right\}$$

Nachdem die (d,k) durch die Gleichung (d) des Art. 14 eliminirt worden sind, geht dieser Ausdruck über in

$$\Sigma \{k\}' m_k = \frac{1}{2(n+1)} \left\{ L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + \text{etc.} \right\}$$
$$- \frac{1}{2(n+1)} \left\{ L_0 D_0 + L_1 D_1 + L_2 D_2 + \text{etc.} \right\}$$
$$- \left\{ nm_0^2 + (n-1)\, m_1^2 + (n-2)\, m_2^2 + \text{etc.} \right\}$$

wo das letzte Glied auch

$$- \Sigma \left\{ (n-k)\, m_k^2 + (k+1)\, m_{n-k-1}^2 \right\}$$

geschrieben werden kann, wenn man die Summe von $k = 0$ bis $k = p-1$, oder bez. bis $k = q$ ausdehnt, und im letzteren Falle das letzte Glied halbirt.

Wenden wir uns jetzt zu den Gleichungen (m) des Art. 13, quadriren sie und addiren die Quadrate, nachdem diese letzteren

mit $n-k$ und bez. $k+1$ multiplicirt worden sind, so entsteht die Gleichung

$$(n-k)m_k^2 + (k+1)m_{n-k-1}^2 = \frac{(n-k)(k+1)}{n+1} l_k^2 + \frac{1}{n+1}\left\{\{k\}'-\{n-k-1\}'\right\}^2$$

in welcher

$$l_k = \tfrac{1}{2}(L_k - L_{k+1})$$

mit der Ausnahme

$$l_q = L_q$$

gesetzt werden muss. (S. Art. 13.)

23.

Setzt man nun die Ausdrücke, welche in den letzten Artt. erhalten worden sind, in den Ausdruck (Ω) des Art. 20, und führt zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\Delta_k = \{k\}' - \{n-k-1\}', \ \Delta'_k = L_k - L_{k+1}$$

mit den Ausnahmen

$$\Delta'_{p-1} = L_{p-1}, \text{ und bez. } \Delta'_q = L_q$$

ein, so erhält man sogleich

$$\Omega = (ll) - \frac{1}{n+1}\Sigma\{k\}^2 - \frac{1}{n+1}\Sigma\Delta_k^2$$
$$+ \frac{1}{2(n+1)}\Sigma L_k^2 - \frac{1}{4(n+1)}\Sigma(k+1)(n-k)\Delta'^2_k$$

welcher Ausdruck aus lauter mit ganzen Zahlen dividirten und multiplicirten Quadratsummen besteht. Die untere Grenze aller vier Summen ist $k = 0$, und die obere Grenze der ersten Summe immer $k = n$, aber in den drei folgenden Summen hängt die obere Grenze von der Form von n ab. Die oberen Grenzglieder sind

wenn n grade ist	wenn n ungrade ist
Δ^2_{p-1}	Δ^2_{q-1}
L^2_{p-1}	L^2_q
$p(p+1)\,\Delta'^2_{p-1}$	$2(q+1)^2\Delta'^2_q$

Der entwickelte Ausdruck für (ll), welcher keiner weiteren Reduction fähig ist, befindet sich im Art. 20.

Man kann zum vorstehenden Ausdruck von Ω bemerken, dass in demselben $[0]_{n-1}$ von selbst verschwindet, und $(s,0)$ gar nicht vorkommt; diese beiden Grössen üben also gar keine Wirkung auf die Summe der Fehlerquadrate aus. Die Grösse $(d,0)$ ist zwar in Ω enthalten, übt aber dennoch auch keine Wirkung aus, wie schon im Art. 18 angedeutet wurde.

24.

Um den zuletzt ausgesprochenen Satz direkt zu beweisen, ist zuerst zu bemerken, dass $(d,0)$ nur in den beiden letzten Gliedern des im vor. Art. für Ω erhaltenen Ausdrucks vorkommt, und dass daher, wenn dieser Satz richtig ist, die Function

$$(A) \ldots L_0^2 + L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 + \ldots$$
$$-\tfrac{1}{2}\left\{n(L_0-L_1)^2 + 2(n-1)(L_1-L_2)^2 + 3(n-2)(L_2-L_3)^2 + \ldots\ldots\right\}$$

von $(d,0)$ unabhängig sein muss. Wenden wir uns, um diesen Beweis zu führen, an die im Art. 17 erhaltenen Relationen zwischen den verschiedenen L und Λ, welche, wenn zur Abkürzung d statt $(n+1)(d,0)$ gesetzt wird, wie folgt geschrieben werden können:

$$L_0 = \Lambda_0 + d$$
$$L_1 = \Lambda_1 + \tfrac{n-2}{n}\, d$$
$$L_2 = \Lambda_2 + \tfrac{n-4}{n}\, d$$

etc. bis

$$L_{p-2} = \Lambda_{p-2} + \tfrac{4}{n}\, d$$
$$L_{p-1} = \Lambda_{p-1} + \tfrac{2}{n}\, d$$

oder bez. bis

$$L_{q-1} = \Lambda_{q-1} + \tfrac{3}{n}\, d$$
$$L_q = \Lambda_q + \tfrac{1}{n}\, d$$

Durch Substitution derselben kann die oben angeführte Function ausdrücklich durch $(d,0)$, oder, was hier gleichgültig ist, durch d dargestellt werden, wobei aber unterschieden werden muss, ob n grade oder ungrade ist.

Wenn n eine grade Zahl ist, so giebt die genannte Substitution der Function (A) zunächst die Form

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + \text{etc.} - \tfrac{1}{2}\left\{n(\Lambda_1-\Lambda_0)^2 + 2(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1)^2 + \text{etc.}\right\}$$
$$+ \tfrac{2}{n}\left\{n\Lambda_0 + (n-2)\Lambda_1 + (n-4)\Lambda_2 + \ldots + 4\Lambda_{p-2} + 2\Lambda_{p-1}\right\} d$$
$$+ \tfrac{2}{n}\left\{\begin{matrix} n(\Lambda_1-\Lambda_0) + 2(n-1)(\Lambda_2-\Lambda_1) + 3(n-2)(\Lambda_3-\Lambda_2) + \ldots \\ \ldots + (p-1)(p+2)(\Lambda_{p-1}-\Lambda_{p-2}) - p(p+1)\Lambda_{p-1} \end{matrix}\right\} d$$
$$+ \tfrac{4}{n^2}\left\{n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \ldots + 4^2 + 2^2\right\} d^2$$
$$- \tfrac{2}{n^2}\left\{n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + (p-1)(p+2) + p(p+1)\right\} d^2$$

Man erkennt hier leicht sofort, dass die Summe der Coefficienten von d gleich Null ist, aber um dasselbe für die Coefficienten von d^2 erkennen zu können, muss eine Summation der einzelnen Glieder vorgenommen werden.

Die Summe der beiden k^{ten} Glieder der zwei im vorstehenden Ausdruck mit d^2 multiplicirten Reihen wird, wenn wir $2p = n$ einführen, und die allgemeinen Factoren weglassen,

$$2k^2 - k(2p - k + 1)$$

die Summe aller Coefficienten von d^2 kann daher geschrieben werden,

$$2\Sigma_0^p k^2 - \Sigma_0^p k(2p - k + 1) = 3\Sigma_0^p k^2 - (2p+1)\Sigma_0^p k$$

indem die Anzahl der Glieder in jeder der beiden Reihen $= p$ ist. Längst bekannt sind aber die beiden Summenformeln

$$\Sigma_0^p k^2 = \tfrac{1}{3}p^3 + \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{6}p$$

$$\Sigma_0^p k = \tfrac{1}{2}p(p+1)$$

durch deren Substitution

$$3\Sigma_0^p k^2 - (2p+1)\Sigma_0^p k = p^3 + \tfrac{3}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}p - (p^2 + \tfrac{1}{2}p)(p+1) = 0$$

und es verschwinden daher, wenigstens im gegenwärtigen Falle, alle von d abhängigen Glieder in der Function (A).

Wenn n eine ungrade Zahl ist, so kann ebenso verfahren werden, nur die Form der einzelnen Glieder ist eine etwas andere. Die erste Substitution bringt den von $(d,0)$ abhängigen Theil der Function (A) zunächst auf die Form

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\left\{nA_0 + (n-2)A_1 + (n-4)A_2 + \ldots + 3A_{q-1} + A_q\right\}d \\
&+ \frac{2}{n}\left\{\begin{aligned}&n(A_1 - A_0) + 2(n-1)(A_2 - A_1) + 3(n-2)(A_3 - A_2) + \ldots \\ &\qquad \ldots + q(q+2)(A_q - A_{q-1}) - (q+1)^2 A_q\end{aligned}\right\}d \\
&+ \frac{1}{n^2}\left\{n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \ldots + 3^2 + 1^2\right\}d^2 \\
&- \frac{2}{n^2}\left\{n + 2(n-1) + 3(n-2) + \ldots + q(q+2) + \tfrac{1}{2}(q+1)^2\right\}d^2
\end{aligned}$$

und man erkennt hier wieder sogleich, dass die Summe aller Coefficienten von d gleich Null ist. Zur Reduction der mit d^2 multiplicirten Glieder dieses Ausdrucks bemerken wir, dass

$$n^2 + (n-2)^2 + \ldots + 3^2 + 1^2 = \Sigma_0^n k^2 - 4\Sigma_0^q k^2$$

und

$$-2\{n+2(n-1)+\ldots+q(q+2)\} = -2\Sigma_0'^{q}k(n-k+1)$$

sind, in welchen Gleichungen bei der Ausführung rechter Hand allenthalben $\frac{n-1}{2}$ statt q geschrieben werden muss. Die Summe aller Coefficienten von d^2 des obigen Ausdrucks kann daher mit Weglassung der allgemeinen Factoren

$$\Sigma_0^n k^2 - 2\Sigma_0^q k^2 - 2(n+1)\Sigma_0'^q k - \tfrac{1}{4}(n+1)^2$$

geschrieben werden, und verwandelt sich durch die Anwendung der beiden oben angeführten Summenformeln in

$$\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n$$
$$-\tfrac{1}{12}(n-1)^3 - \tfrac{1}{4}(n-1)^2 - \tfrac{1}{6}(n-1) - \tfrac{1}{4}n(n+1)^2 = 0$$

wie sich durch Auflösung der Binomien zu erkennen giebt. Also auch im gegenwärtigen Falle verschwinden alle mit d behafteten Glieder in der Function (A), und es ist hiemit bewiesen, dass in allen Fällen die Summe der Fehlerquadrate von dem Werthe, den man $(d,0)$ beigelegt hat, unabhängig ist.

Ausserdem gelangt man leicht zur Einsicht, dass man zu jeder Gruppe der durch die Messungen erhaltenen Zahlenwerthe, in deren Bezeichnung der untere Index derselbe ist, eine beliebige Zahl hinzufügen darf, wenn man nur nach ausgeführter Berechnung dieselbe Zahl dem erhaltenen Werthe des betreffenden m ebenfalls hinzufügt. Die Anwendung dieser Bemerkung ist von wesentlichem Nutzen, da man dadurch die numerischen Werthe der in der Rechnung vorkommenden, durch die Messungen erhaltenen Grössen wesentlich verkleinern kann. Wählt man für diese hinzuzufügenden Grössen, die mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmenden arithmetischen Mittel aus jeder der genannten Gruppen, so werden nicht nur alle der Berechnung unterzulegenden, durch die Messungen erhaltenen Zahlen möglichst klein, sondern es werden auch alle mit $\{0\}'$, $\{1\}'$, $\{2\}'$, ... $\{n-1\}'$ bezeichneten Grössen gleich Null, wodurch mehrere Vortheile erlangt werden. In Bezug auf die Summe der Fehlerquadrate wird

$$\Sigma'\{k\}'m_k = 0$$

und der Ausdruck für Ω des vor. Art. geht in den folgenden über,

$$\Omega = (ll) - \frac{1}{n+1} \Sigma' \{k\}^2 + \frac{1}{2(n+1)} \Sigma L_k D_k$$

wo die Grenzen der zweiten Summe $k = 0$ und $k = p - 1$, bez. $= q$ sind, während der Ausdruck des vor. Art. im gegenwärtigen Falle noch seine Gültigkeit behält, und sich ohnehin vereinfacht.

Ich bemerke noch, dass man nicht die genauen arithmetischen Mittel hier anzuwenden braucht, sondern auch eine Vereinfachung der Rechnung erreicht wird, wenn die angewandten Zahlenwerthe nahe die arithmetischen Mittel sind.

25.

Zur Vervollständigung unseres Verfahrens ist noch erforderlich zu zeigen, wie die daraus hervorgehenden Gewichte der Unbekannten berechnet werden können. Hiefür ist zuerst darauf aufmerksam zu machen, dass die erhaltenen Gleichungen darthun, dass die Gewichte eines jeden Paares von Theilungsfehlern, welche Theilstrichen angehören, die gleich weit von den beiden Endpunkten des zu berichtigenden Maassstabes abstehen, einander gleich sein müssen. Bezeichnen wir daher das Gewicht irgend einer der Unbekannten unserer Aufgabe durch ein derselben vorgesetztes P, so bekommen wir vor Allem

$$P(k) = P(n-k)$$

und es brauchen daher nur die Gewichte der ersten Hälfte der Theilungsfehler ermittelt zu werden. Von diesem Satze schliesst sich aber von selbst das Gewicht $P(p)$ aus, für welches die vorstehende Gleichung identisch wird; es muss daher dieses Gewicht besonders entwickelt werden.

Beschäftigen wir uns zuerst blos mit den Gewichten der Theilungsfehler, und nehmen zu dem Ende an, dass sowohl die Functionen $(n+1)(s,k)$, wie $(n+1)(d,k)$ ausdrücklich in Bezug auf die Grössen $\{0\}$, $\{1\}$, etc. entwickelt worden seien. Heben wir aus diesen Entwickelungen die Glieder aus, welche mit $\{k\}$ multiplicirt sind, und bezeichnen die Coefficienten derselben mit F_k und Q_k, so dass mit blosser Rücksicht auf diese Glieder

$$(n+1)(s,k) + F_k\{k\} = 0$$
$$(n+1)(d,k) + Q_k\{k\} = 0$$

Die Elimination giebt nun aus diesen Gleichungen

$$2(n+1)(k) + (F_k+Q_k)\{k\} = 0$$

und nach einem bekannten Satze folgt hieraus allgemein

$$P(k) = \frac{2(n+1)}{F_k+Q_k}$$

welcher Ausdruck der obigen Bemerkung zufolge auch der für $P(n-k)$ ist.

26.

Der Ausdruck für den Coefficienten F_k lässt sich leicht aus den Gleichungen des Art. 10 erhalten, welche allgemein

$$(n+1)(s,k) + S_k - S_0 = 0$$

geben, wo aber zu erwägen ist, dass S_0 von den übrigen S abhängig ist, und daher die Gleichung (a) des Art. 8 hier berücksichtigt werden muss. Da diese

$$0 = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + \tfrac{1}{2}S_p$$

und bez.

$$0 = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + S_q$$

giebt, so folgt allgemein

$$(n+1)(s,k) + 2S_k = 0$$

mit der Ausnahme, dass

$$(n+1)(s,p) + \tfrac{3}{2}S_p = 0$$

ist. Da ferner ohne Ausnahme

$$S_k = \{k\}+\{n-k\}$$

so erhalten wir sogleich allgemein

$$F_k = 2$$

mit der Ausnahme

$$F_p = 3$$

Da $(d,p) = 0$, folglich auch $Q_p = 0$ ist, so giebt die Gleichung des vor. Art. für die Gewichte sofort

$$P(p) = \frac{2(n+1)}{3};$$

um aber die Gewichte der übrigen Theilungsfehler bestimmen zu können, muss der Ausdruck für Q_k abgeleitet werden.

27.

Die Q_k sind weit zusammengesetzter als die F_k, und ihre Bestimmung minder einfach als die der letzteren. Man könnte sie schon aus den Ausdrücken der (d,k) in den Artt. 13 u. 14 erhalten, aber ich ziehe vor den folgenden Weg einzuschlagen. Da $(d,0)$ eben so wenig wie $(s,0)$ auf die Gewichte Einfluss äussern, folglich gleich Null gesetzt werden kann, so geben die Unterschiede von je zwei auf einander folgenden Endgleichungen erster Abtheilung des Art. 11, nachdem $(d,0) = 0$ gesetzt worden ist, die folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
(n+1)(d,1) & +\, 2l_0 + D_1 - D_0 = 0 \\
(n+1)\{-(d,1)+(d,2)\} & +\, 2l_1 + D_2 - D_1 = 0 \\
(n+1)\{-(d,2)+(d,3)\} & +\, 2l_2 + D_3 - D_2 = 0 \\
(n+1)\{-(d,3)+(d,4)\} & +\, 2l_3 + D_4 - D_3 = 0 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Durch die Verbindung dieser mit den Gleichungen zweiter Abtheilung lassen sich leicht die l_0, l_1, etc. eliminiren. Man erhält

$$\left.\begin{array}{lr}
(n+1)(d,1) & + M_1 = 0 \\
(n+1)\left\{-\frac{2n-4}{2(n-1)}(d,1) + (d,2)\right\} & + M_2 = 0 \\
(n+1)\left\{\frac{2}{3(n-2)}(d,1) - \frac{3n-8}{3(n-2)}(d,2) + (d,3)\right\} & + M_3 = 0 \\
(n+1)\left\{\frac{2}{4(n-3)}(d,1) + \frac{2}{4(n-3)}(d,2) - \frac{4n-14}{4(n-3)}(d,3) + (d,4)\right\} & + M_4 = 0 \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} &
\end{array}\right\} \quad (c)$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{array}{l}
M_1 = D_1 - D_0 - \frac{2}{n} K_0 \\
M_2 = D_2 - D_1 - \frac{2}{2(n-1)} K_1 \\
M_3 = D_3 - D_2 - \frac{2}{3(n-2)} K_2 \\
M_4 = D_4 - D_3 - \frac{2}{4(n-3)} K_3 \\
\text{etc.}
\end{array}$$

gesetzt worden sind. Diese Gleichungen, welche ohne Mühe so weit fortgesetzt werden können als man will, sollen hier zur Bestimmung der Coefficienten Q_k dienen, zu welchem Ende sie wesentlich abgekürzt werden können.

28.

Es ist zunächst zu erwägen, dass die Function $D_0 + \frac{2}{n} K_0$ nicht unabhängig ist, sondern von den übrigen D und K abhängt, und daher für unseren gegenwärtigen Zweck eliminirt werden muss. Die Gleichung, durch welche diese Abhängigkeit ausgedrückt wird, ist die (b) des Art. 8, welche auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$(b) \ldots \quad 0 = \left(D_0 + \tfrac{2}{n} K_0\right) + \tfrac{n-2}{n} D_1 + \tfrac{n-4}{n} D_2 + \tfrac{n-6}{n} D_3 + \ldots$$
$$+ \tfrac{2}{n}\left(K_1 + K_2 + K_3 + \ldots\right)$$

Zur gegenwärtigen Untersuchung können aber die K_1, K_2, etc. Nichts beitragen, und wir dürfen dieselben daher aus der Gleichung weglassen. Setzt man allgemein

$$T_k = \frac{n-2k}{n}$$

so geht unsere Gleichung über in

$$D_0 + \tfrac{2}{n} K_0 + \Sigma' T_k D_k = 0$$

Setzen wir ferner

$$(n+1)(d,1) + D_1 + \Sigma' R(1,k) T_k D_k = 0$$
$$(n+1)(d,2) + D_2 + \Sigma' R(2,k) T_k D_k = 0$$
$$(n+1)(d,3) + D_3 + \Sigma' R(3,k) T_k D_k = 0$$
etc.

und substituiren diese nach und nach in die im vor. Art. erhaltenen Gleichungen. Die erste derselben giebt sogleich

$$\Sigma R(1,k) T_k D_k = \Sigma T_k D_k$$

und da hier das Summenzeichen Σ' weggelassen werden darf, weil es allen Gliedern gemeinschaftlich ist, so folgt, dass

$$R(1,k) = 1$$

ist. Die Substitution der obigen Gleichungen in die zweite der im vor. Art. erhaltenen giebt zunächst

$$\Sigma R(2,k) T_k D_k = \frac{2n-4}{2(n-1)} \left[D_1 + \Sigma R(1,k) T_k D_k\right] - D_1 = 0$$

Die mit D_1 multiplicirten Glieder brauchen hier nicht ermittelt zu werden, und diese Gleichung kann daher abgekürzt werden in

$$R(2,k) = \frac{2n-4}{2(n-1)} R(1,k)$$

wo aber in dem Gliede linker Hand k nicht kleiner als 2 angenommen werden darf. Ebenso giebt die dritte Gleichung des vor. Art.

$$R(3,k) = \frac{3n-8}{3(n-2)} R(2,k) - \frac{2}{3(n-2)} R(1,k)$$

wo aber im Gliede linker Hand k nicht kleiner als 3 gesetzt werden darf. Diese Entwickelungen kann man so weit fortsetzen als man will, und jetzt schon das Resultat derselben vollständig erkennen.

Da es hier blos auf die Ermittelung der Coefficienten $R(1,1)$, $R(2,2)$, $R(3,3)$, etc. ankommt, so soll eine einfachere Bezeichnung eingeführt, und für die angeführten Coefficienten bez. U_1, U_2, U_3, etc. geschrieben werden. Wir haben daher zunächst

$$U_1 = 1,\ U_2 = \frac{2n-4}{2(n-1)}$$

erhalten, und die folgenden U sind durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
U_3 &= \frac{3n-8}{3(n-2)} U_2 - \frac{2}{3(n-2)} \\
U_4 &= \frac{4n-14}{4(n-3)} U_3 - \frac{2}{4(n-3)} \{1 + U_2\} \\
U_5 &= \frac{5n-22}{5(n-4)} U_4 - \frac{2}{5(n-4)} \{1 + U_2 + U_3\} \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

welche nach einfachen Gesetzen fortschreiten, nach und nach zu berechnen. Da nun hier in den oben erhaltenen Gleichungen $\{k\}$ statt D_k gesetzt werden darf, so bekommen wir allgemein

$$(n+1)(d,k) + \{k\} + U_k T_k \{k\} = 0$$

und da statt dessen im Art. 25

$$(n+1)(d,k) + Q_k\{k\}$$

angenommen wurde, so ergiebt sich

$$Q_k = 1 + U_k T_k$$

Hiemit, und da oben allgemein $F_k = 2$ gefunden wurde, geht der Ausdruck der Gewichte der Theilungsfehler, welcher im Art. 25 abgeleitet wurde, in den folgenden

$$P(k) = P(n-k) = \frac{2(n+1)}{3+U_k T_k} \cdots\cdots (p)$$

über. Man kann bemerken, dass wenn $k = p$ ist, man $T_p = 0$ erhält, und daher der vorstehende Ausdruck

$$P(p) = \frac{2(n+1)}{3}$$

giebt, welche Gleichung wir schon oben im Art. 26 auf andere Weise erhalten haben.

29.

Die Eliminationen, welche die im vor. Art. für die U erhaltenen Gleichungen erfordern, lassen sich zwar allgemein ausführen, aber der dadurch hervorgehende allgemeine Ausdruck für U_k würde sehr weitläufig werden. Dahingegen lassen sich diese Eliminationen, wenn der betreffende numerische Werth von n im Voraus gegeben und in die Gleichungen substituirt worden ist, sehr leicht numerisch ausführen, zumal wenn man die Gewichte in ganzen Zahlen, mit einigen angehängten Decimalen ausdrücken will; eine Angabe, die jedem Bedürfnisse genügt.

Die Ausdrücke der ersten U, und der daraus folgenden Gewichte, lassen sich indess in allgemeiner Form leicht angeben, und sind die folgenden:

$$U_1 = 1$$

$$U_2 = \frac{n-2}{n-1}$$

$$U_3 = \frac{3n^2-16n+18}{3(n-1)(n-2)}$$

$$U_4 = \frac{6n^3-59n^2+169n-144}{6(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$P(1) = P(n-1) = \frac{(n+1)n}{2n-1}$$

$$P(2) = P(n-2) = \frac{2(n+1)n(n-1)}{4n^2-9n+8}$$

$$P(3) = P(n-3) = \frac{6(n+1)n(n-1)(n-2)}{12n^3-61n^2+132n-108}$$

$$P(4) = P(n-4) = \frac{12(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{24n^4-216n^3+839n^2-1604n+1152}$$

womit man bis $n = 10$ ausreicht.

30.

Wenden wir uns zu den Gewichten der Prüfungsintervalle m_0, m_1, etc., so giebt die Gleichung des Art. 16 für m_0 ohne Weiteres

$$P(m_0) = n,$$

aber für die übrigen Prüfungsintervalle muss eine besondere Entwickelung ausgeführt werden, in welcher wieder die Bedingungsgleichung (b) des Art. 28 berücksichtigt werden muss. Während wir bei der Ermittelung der Gewichte der Theilungsfehler von dieser Gleichung nur die mit den D multiplicirten Glieder zu berücksichtigen hatten, sind es hier im Gegentheil die mit den K multiplicir-

ten, deren wir bedürfen. Die anzuwendende Bedingungsgleichung wird daher

$$0 = D_0 + \tfrac{2}{n}K_0 + \tfrac{2}{n}\{K_1 + K_2 + \ldots + K_{p-1} \text{ und bez. } \tfrac{1}{2}K_q\}$$

oder zur Abkürzung, und mit dem Vorbehalt, dass bei ungradem n das letzte Glied unter dem Summenzeichen halbirt werden muss,

$$0 = D_0 + \tfrac{2}{n}K_0 + \tfrac{2}{n}\Sigma K_k$$

Die Substitution dieser Gleichung in die erste (c) des Art. 27 giebt

$$(n+1)(d,1) + \tfrac{2}{n}\Sigma K_k = 0$$

und durch die Anwendung derselben Analyse wie in Art. 28, wird man, indem hier die Glieder M_2, M_3, M_4, etc. gleich Null gesetzt werden können, auf die allgemeine Gleichung

$$(n+1)(d,k) + \tfrac{2}{n}U_k\Sigma K_i = 0$$

hingeführt, in welcher die Glieder unter dem Summenzeichen mit K_k anfangen müssen. Es ergiebt sich hieraus sogleich die Formel

$$(n+1)\{(d,1)+(d,2)+\ldots+(d,k)\} + \tfrac{2}{n}\{1+U_2+U_3+\ldots+U_k\}K_k = 0$$

in welcher das Summenzeichen hat weggelassen werden müssen, weil von den verschiedenen mit K bezeichneten Functionen nur die einzige K_k aufgenommen werden darf. Auch ist zu bemerken, dass in Folge des obigen Vorbehalts im Falle $k = q$ das ganze zweite Glied halbirt werden muss.

Gehen wir nun zur zweiten Abtheilung der Endgleichungen des Art. 11 über, so erhalten wir sogleich

$$(n-k)(k+1)\, l_k + (1 + W_k)K_k = 0$$

wo zur Abkürzung

$$W_k = \tfrac{2}{n}\{1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_k\}$$

mit der Ausnahme

$$W_q = \tfrac{1}{n}\{1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_q\}$$

gesetzt worden ist. Aber es ist ohne Ausnahme

$$K_k = (k+1)\{k\}' + (n-k)\{n-k-1\}'$$

und die obige Gleichung für l_k geht daher über in

$$0 = l_k + (1+W_k)\frac{\{k\}'}{n-k} + (1+W_k)\frac{\{n-k-1\}'}{k+1} \quad \ldots\ldots (l)$$

woraus die Ausdrücke der verlangten Gewichte leicht erhalten werden können.

31.

Wenden wir uns zur zweiten Abtheilung der Endgleichnngen des Art. 8, und ziehen die vorletzte dieser Gleichungen von der zweiten, die drittletzte von der dritten, u. s. w. ab, dann entsteht eine Reihe von Gleichungen, welche durch die folgende, allgemeine dargestellt werden können

$$(n-k)m_k - (k+1)m_{n-k-1} + \{k\}' - \{n-k-1\}' = 0$$

Da aber allgemein

$$l_k = m_k + m_{n-k-1}$$

ist, so giebt die obige Gleichung (l)

$$m_k + m_{n-k-1} + (1+W_k)\left\{\frac{\{k\}'}{n-k} + \frac{\{n-k-1\}'}{k+1}\right\} = 0$$

und wir erhalten durch eine leichte Elimination

$$(n+1)m_k \quad + \left\{1 + \frac{k+1}{n-k}(1+W_k)\right\}\{k\}' + W_k\{n-k-1\}' = 0$$

$$(n+1)m_{n-k-1} + \left\{1 + \frac{n-k}{k+1}(1+W_k)\right\}\{n-k-1\}' + W_k\{k\}' = 0$$

Hieraus gehen, zufolge eines schon mehrmals angewandten Satzes, die beiden Gleichungen

$$(P) \ldots \begin{cases} P(m_k) = \dfrac{n+1}{1 + \frac{k+1}{n-k}(1+W_k)} \\ P(m_{n-k-1}) = \dfrac{n+1}{1 + \frac{n-k}{k+1}(1+W_k)} \end{cases}$$

hervor, deren erste für die erste Hälfte der m, und deren zweite für die zweite Hälfte derselben gilt, in welchen aber der Fall $k = q$ vorläufig ausgeschlossen ist. Da in diesem Falle auch $n-k-1 = q$ wird, und W_k halbirt werden muss, so geben die obigen Gleichungen für m_k und m_{n-k-1} ohne Unterschied

$$(n+1)m_q + (2+W_k)\{q\}' = 0$$

folglich

$$P(m_q) = \frac{n+1}{2+W_k}$$

wo auch rechter Hand $k = q$ zu setzen ist. Vergleicht man diese Gleichung mit den Gleichungen (P), nachdem in diesen auch $k = q$ gesetzt worden ist, so findet man, dass alle drei Gleichungen mit einander übereinstimmen; die Gleichungen (P) gelten also ohne Ausnahme, und wenn $k = q$ ist, ist es gleichgültig, welche von beiden man anwendet.

32.

Für die vier ersten W, sowie für die vier ersten und die vier letzten Gewichte, sind wieder die Ausdrücke in Function von n entwickelt, und wie folgt gefunden worden:

$$W_1 = \frac{2}{n}$$

$$W_2 = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}$$

$$W_3 = \frac{2(9n^2-37n+36)}{3n(n-1)(n-2)}$$

$$W_4 = \frac{24n^3-187n^2+468n-360}{3n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

$$P(m_1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{n^2+n+4}$$

$$P(m_2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{n^3 \quad +11n-18}$$

$$P(m_3) = \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^4-6n^3+69n^2-290n+288}$$

$$P(m_4) = \frac{3(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3n^5-15n^4+135n^3-920n^2+2297n-1800}$$

$$P(m_{n-5}) = \frac{15(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^5+9n^4-268n^3+1226n^2-2230n+1440}$$

$$P(m_{n-4}) = \frac{12(n+1)n(n-1)(n-2)}{3n^4+12n^3-131n^2+300n-216}$$

$$P(m_{n-3}) = \frac{3(n+1)n(n-1)}{n^3+4n^2-15n+12}$$

$$P(m_{n-2}) = \frac{2(n+1)n}{n^2+3n-2}$$

Wir verweisen in Bezug auf die Berechnung der numerischen Werthe dieser Gewichte bei gegebenem n und grösseren Indices wieder auf die Benutzung der oben entwickelten, concreten Gleichungen, welche leicht zu behandeln sind.

33.

Um eine deutlichere Einsicht in die Beschaffenheit der im Vorhergehenden gefundenen Gewichte zu gewähren, haben wir die numerischen Werthe derselben für eine Reihe von numerischen Werthen von n berechnet, und zwar von $n = 12$ an abwärts. Bis $n = 10$ können alle Gewichte durch die vorhergehenden, in Function von n dargestellten Ausdrücke berechnet werden, aber für die Werthe 11 und 12 von n müssen die vom Index 5 abhängenden durch die concreten Formeln berechnet werden. Die Gleichungen für die U des Art. 28 geben zu dem Ende

für $n = 12$

$$U_5 = \tfrac{19}{20}\, U_4 + \tfrac{1}{20}\left(1 + U_2 + U_3\right)$$

und für $n = 11$

$$U_5 = \tfrac{33}{35}\, U_4 + \tfrac{2}{35}\left(1 + U_2 + U_3\right)$$

woraus man U_5 erhält, nachdem die bez. Werthe von U_2, U_3, U_4 aus den in Function von n dargestellten Ausdrücken berechnet worden sind. Die Gleichung (p) des Art. 28 giebt darauf die Gewichte der Theilungsfehler 5 und 7, bez. 6.

Zur Berechnung der Gewichte der Prüfungsintervalle giebt der Art. 30

für $n = 12$

$$W_5 = \tfrac{1}{6}\left(1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5\right)$$

und für $n = 11$

$$W_5 = \tfrac{2}{11}\left(1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5\right)$$

worauf die Gleichungen (P) des Art. 31 die bez. Gewichte geben.

34.

Die erhaltenen numerischen Werthe der Gewichte sind nun die folgenden:

$$n = 12.$$

$$U_2 = \tfrac{10}{11},\ U_3 = \tfrac{48}{55},\ U_4 = \tfrac{313}{495},\ U_5 = \tfrac{923}{1980}$$

$$W_1 = \tfrac{1}{6},\ W_2 = \tfrac{7}{22},\ W_3 = \tfrac{74}{165},\ W_4 = \tfrac{329}{594},\ W_5 = \tfrac{2501}{3960}$$

$$P(1) = P(11) = \tfrac{156}{23} = 6.78$$

$$P(2) = P(10) = \tfrac{858}{119} = 7.21$$

$$P(3) = P(9) = \tfrac{2860}{373} = 7.67$$

$$P(4) = P(8) = \tfrac{19305}{2384} = 8.09$$

$$P(5) = P(7) = \tfrac{308880}{36563} = 8.45$$

$$P(6) = \tfrac{26}{3} = 8.67$$

$$P(m_0) = 12$$

$$P(m_1) = \tfrac{429}{40} = 10.73$$

$$P(m_2) = \tfrac{2860}{307} = 9.31$$

$$P(m_3) = \frac{49805}{2444} = 7.94$$
$$P(m_4) = \frac{61776}{9367} = 6.59$$
$$P(m_5) = \frac{8580}{1583} = 5.42$$
$$P(m_6) = \frac{308880}{68987} = 4.47$$
$$P(m_7) = \frac{19305}{5177} = 3.72$$
$$P(m_8) = \frac{8580}{2811} = 3.05$$
$$P(m_9) = \frac{429}{178} = 2.41$$
$$P(m_{10}) = \frac{156}{89} = 1.77$$

$n = 11.$

$$U_2 = \frac{9}{10},\ U_3 = \frac{41}{54},\ U_4 = \frac{427}{720},\ U_5 = \frac{6157}{15120}$$
$$W_1 = \frac{2}{11},\ W_2 = \frac{19}{55},\ W_3 = \frac{722}{1481},\ W_4 = \frac{1410}{2376},\ W_5 = \frac{1537}{2310}$$
$$P(1) = P(10) = \frac{44}{7} = 6.29$$
$$P(2) = P(9) = \frac{880}{131} = 6.72$$
$$P(3) = P(8) = \frac{14256}{1987} = 7.16$$
$$P(4) = P(7) = \frac{63360}{8347} = 7.59$$
$$P(5) = P(6) = \frac{3991680}{505117} = 7.90$$
$$P(m_0) = 11$$
$$P(m_1) = \frac{165}{17} = 9.71$$
$$P(m_2) = \frac{1980}{239} = 8.29$$
$$P(m_3) = \frac{35640}{5178} = 6.88$$
$$P(m_4) = \frac{199584}{35537} = 5.62$$
$$P(m_5) = \frac{27720}{6157} = 4.50$$
$$P(m_6) = \frac{142560}{38347} = 3.72$$
$$P(m_7) = \frac{17820}{5894} = 3.02$$
$$P(m_8) = \frac{660}{277} = 2.38$$
$$P(m_9) = \frac{33}{19} = 1.74$$

$$n = 10.$$

$$P(1) = P(9) = \frac{110}{19} = 5.79$$
$$P(2) = P(8) = \frac{330}{53} = 6.23$$
$$P(3) = P(7) = \frac{5940}{889} = 6.69$$
$$P(4) = P(6) = \frac{166320}{23503} = 7.07$$
$$P(5) = \frac{22}{3} = 7.33$$
$$P(m_0) = 10$$
$$P(m_1) = \frac{165}{19} = 8.68$$
$$P(m_2) = \frac{660}{91} = 7.25$$
$$P(m_3) = \frac{10395}{1768} = 5.88$$
$$P(m_4) = \frac{3024}{649} = 4.66$$
$$P(m_5) = \frac{420}{113} = 3.72$$
$$P(m_6) = \frac{23760}{7921} = 3.00$$
$$P(m_7) = \frac{1485}{631} = 2.35$$
$$P(m_8) = \frac{55}{32} = 1.72$$

$$n = 9.$$

$$P(1) = P(8) = \frac{90}{17} = 5.29$$
$$P(2) = P(7) = \frac{1440}{251} = 5.74$$
$$P(3) = P(6) = \frac{1120}{181} = 6.19$$
$$P(4) = P(5) = \frac{1120}{171} = 6.55$$
$$P(m_0) = 9$$
$$P(m_1) = \frac{360}{47} = 7.66$$
$$P(m_2) = \frac{56}{9} = 6.22$$
$$P(m_3) = \frac{210}{43} = 4.88$$
$$P(m_4) = \frac{56}{15} = 3.73$$
$$P(m_5) = \frac{140}{47} = 2.98$$
$$P(m_6) = \frac{72}{31} = 2.32$$
$$P(m_7) = \frac{90}{53} = 1.70$$

$$n = 8.$$

$$P(1) = P(7) = \tfrac{24}{5} = 4.80$$

$$P(2) = P(6) = \tfrac{21}{4} = 5.25$$

$$P(3) = P(5) = \tfrac{4536}{797} = 5.69$$

$$P(4) = 6 = 6.00$$

$$P(m_0) = 8$$

$$P(m_1) = \tfrac{126}{19} = 6.63$$

$$P(m_2) = \tfrac{504}{97} = 5.20$$

$$P(m_3) = \tfrac{567}{145} = 3.91$$

$$P(m_4) = \tfrac{4536}{1529} = 2.97$$

$$P(m_5) = \tfrac{126}{55} = 2.29$$

$$P(m_6) = \tfrac{72}{43} = 1.67$$

$$n = 7.$$

$$P(1) = P(6) = \tfrac{14}{3} = 4.67$$

$$P(2) = P(5) = \tfrac{224}{47} = 4.77$$

$$P(3) = P(4) = \tfrac{10080}{1943} = 5.19$$

$$P(m_0) = 7$$

$$P(m_1) = \tfrac{28}{5} = 5.60$$

$$P(m_2) = \tfrac{280}{67} = 4.18$$

$$P(m_3) = \tfrac{315}{106} = 2.97$$

$$P(m_4) = \tfrac{504}{223} = 2.26$$

$$P(m_5) = \tfrac{28}{17} = 1.65$$

$$n = 6.$$

$$P(1) = P(5) = \tfrac{42}{11} = 3.82$$

$$P(2) = P(4) = \tfrac{30}{7} = 4.29$$

$$P(3) = \tfrac{14}{3} = 4.67$$

$$P(m_0) = 6$$

$$P(m_1) = \tfrac{105}{23} = 4.57$$

$$P(m_2) = \tfrac{35}{11} = 3.18$$
$$P(m_3) = \tfrac{105}{47} = 2.23$$
$$P(m_4) = \tfrac{21}{13} = 1.62$$

$n = 5.$

$$P(1) = P(4) = \tfrac{10}{3} = 3.33$$
$$P(2) = P(3) = \tfrac{80}{21} = 3.81$$
$$P(m_0) = 5$$
$$P(m_1) = \tfrac{60}{17} = 3.53$$
$$P(m_2) = \tfrac{20}{9} = 2.22$$
$$P(m_3) = \tfrac{30}{19} = 1.58$$

$n = 4.$

$$P(1) = P(3) = \tfrac{20}{7} = 2.86$$
$$P(2) = \tfrac{10}{3} = 3.33$$
$$P(m_0) = 4$$
$$P(m_1) = \tfrac{5}{2} = 2.50$$
$$P(m_2) = \tfrac{20}{13} = 1.53$$

$n = 3.$

$$P(1) = P(2) = \tfrac{12}{5} = 2.40$$
$$P(m_0) = 3$$
$$P(m_1) = \tfrac{6}{5} = 1.20$$

$n = 2.$

$$P(1) = 2$$
$$P(m_0) = 2$$

Der letzte Fall geht in das Verfahren über, auf welches wir in den »Vorbereitenden Entwickelungen« gekommen sind, wenn man dort auch $n = 2$ macht; man erkennt leicht, dass die Gewichte sowohl wie die anderen Resultate mit einander übereinstimmen.

Die vorstehenden Zahlenwerthe der Gewichte zeigen zur Genüge, dass beim gegenwärtigen Verfahren die Maxima derselben in die Mitte des zu prüfenden Maassstabes fallen, während beim Verfahren des Art. 1 u. flg. das Gegentheil stattfindet. Aber auch die Gewichte

der an den Enden dieses Maassstabes liegenden Theilungsfehler sind so gross, dass die Bestimmung der letzteren als hinreichend sicher erkannt werden muss. Dass die Gewichte der Prüfungsintervalle vom ersten bis zum letzten stark abnehmen, liegt in der Natur der Sache, und kann nicht anders sein. Man sieht ferner, dass alle Gewichte mit der Anzahl der Intervalle, d. i mit n, wachsen; der Grund davon ist in dem Umstande zu suchen, dass die Anzahl der zu messenden Combinationen in weit grösserem Maasse, als n, wächst und ihre Anzahl überhaupt nahe im Verhältnisse von n^2 zunimmt.

35.

Um die Zusammensetzung der mit $\{0\}$, $\{1\}$, etc. bezeichneten Zahlenwerthe, die von den durch die Messungen erhaltenen Grössen abhängen, deutlich vor Augen zu führen, sollen einige derselben hier ausdrücklich angeführt werden.

$$n = 12.$$

$$\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 + [1]_0 + \dots\dots\dots\dots + [11]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 + [1]_1 + \dots\dots\dots + [10]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 + [1]_2 + \dots\dots\dots + [9]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 + [1]_3 + \dots\dots + [8]_3 \\
\{4\}' &= [0]_4 + [1]_4 + \dots\dots + [7]_4 \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
\{8\}' &= [0]_8 + [1]_8 + [2]_8 + [3]_8 \\
\{9\}' &= [0]_9 + [1]_9 + [2]_9 \\
\{10\}' &= [0]_{10} + [1]_{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 - [0]_7 - [0]_8 - [0]_9 - [0]_{10} \\
\{1\} &= [0]_0 \\
&\quad - [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 - [1]_6 - [1]_7 - [1]_8 - [1]_9 - [1]_{10} \\
\{2\} &= [1]_0 + [0]_1 \\
&\quad - [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 - [2]_5 - [2]_6 - [2]_7 - [2]_8 - [2]_9 \\
\{3\} &= [2]_0 + [1]_1 + [0]_2 \\
&\quad - [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 - [3]_4 - [3]_5 - [3]_6 - [3]_7 - [3]_8 \\
\{4\} &= [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3 \\
&\quad - [4]_0 - [4]_1 - [4]_2 - [4]_3 - [4]_4 - [4]_5 - [4]_6 - [4]_7 \\
\{5\} &= [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4 \\
&\quad - [5]_0 - [5]_1 - [5]_2 - [5]_3 - [5]_4 - [5]_5 - [5]_6 \\
\{6\} &= [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5 \\
&\quad - [6]_0 - [6]_1 - [6]_2 - [6]_3 - [6]_4 - [6]_5 \\
\{7\} &= [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6 \\
&\quad - [7]_0 - [7]_1 - [7]_2 - [7]_3 - [7]_4
\end{aligned}$$

$\{8\} = [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6 + [0]_7$
$\qquad - [8]_0 - [8]_1 - [8]_2 - [8]_3$
$\{9\} = [8]_0 + [7]_1 + [6]_2 + [5]_3 + [4]_4 + [3]_5 + [2]_6 + [1]_7 + [0]_8$
$\qquad - [9]_0 - [9]_1 - [9]_2$
$\{10\} = [9]_0 + [8]_1 + [7]_2 + [6]_3 + [5]_4 + [4]_5 + [3]_6 + [2]_7 + [1]_8 + [0]_9$
$\qquad - [10]_0 - [10]_1$
$\{11\} = [10]_0 + [9]_1 + [8]_2 + [7]_3 + [6]_4 + [5]_5 + [4]_6 + [3]_7 + [2]_8 + [1]_9 + [0]_{10}$
$\qquad - [11]_0$
$\{12\} = [11]_0 + [10]_1 + [9]_2 + [8]_3 + [7]_4 + [6]_5 + [5]_6 + [4]_7 + [3]_8 + [2]_9 + [1]_{10}$

$n = 11.$

$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots\ldots + [10]_0$
$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots\ldots\ldots + [9]_1$
$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots\ldots + [8]_2$
etc. etc.
$\{7\}' = [0]_7 + [1]_7 + [2]_7 + [3]_7$
$\{8\}' = [0]_8 + [1]_8 + [2]_8$
$\{9\}' = [0]_9 + [1]_9$

$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 - [0]_7 - [0]_8 - [0]_9$
$\{1\} = [0]_0$
$\qquad - [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 - [1]_6 - [1]_7 - [1]_8 - [1]_9$
$\{2\} = [1]_0 + [0]_1$
$\qquad - [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 - [2]_5 - [2]_6 - [2]_7 - [2]_8$
$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2$
$\qquad - [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 - [3]_4 - [3]_5 - [3]_6 - [3]_7$
$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3$
$\qquad - [4]_0 - [4]_1 - [4]_2 - [4]_3 - [4]_4 - [4]_5 - [4]_6$
$\{5\} = [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4$
$\qquad - [5]_0 - [5]_1 - [5]_2 - [5]_3 - [5]_4 - [5]_5$
$\{6\} = [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5$
$\qquad - [6]_0 - [6]_1 - [6]_2 - [6]_3 - [6]_4$
$\{7\} = [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6$
$\qquad - [7]_0 - [7]_1 - [7]_2 - [7]_3$
$\{8\} = [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6 + [0]_7$
$\qquad - [8]_0 - [8]_1 - [8]_2$
$\{9\} = [8]_0 + [7]_1 + [6]_2 + [5]_3 + [4]_4 + [3]_5 + [2]_6 + [1]_7 + [0]_8$
$\qquad - [9]_0 - [9]_1$
$\{10\} = [9]_0 + [8]_1 + [7]_2 + [6]_3 + [5]_4 + [4]_5 + [3]_6 + [2]_7 + [1]_8 + [0]_9$
$\qquad - [10]_0$
$\{11\} = [10]_0 + [9]_1 + [8]_2 + [7]_3 + [6]_4 + [5]_5 + [4]_6 + [3]_7 + [2]_8 + [1]_9$

$n = 10.$

$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots + [9]_0$
$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots + [8]_1$

$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots\ldots + [7]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + \ldots\ldots + [6]_3$$
$$\{4\}' = [0]_4 + [1]_4 + [2]_4 + \ldots + [5]_4$$
$$\{5\}' = [0]_5 + [1]_5 + [2]_5 + [3]_5 + [4]_5$$
$$\{6\}' = [0]_6 + [1]_6 + [2]_6 + [3]_6$$
$$\{7\}' = [0]_7 + [1]_7 + [2]_7$$
$$\{8\}' = [0]_8 + [1]_8$$

$$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 - [0]_7 - [0]_8$$
$$\{1\} = [0]_0$$
$$- [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 - [1]_6 - [1]_7 - [1]_8$$
$$\{2\} = [1]_0 + [0]_1$$
$$- [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 - [2]_5 - [2]_6 - [2]_7$$
$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2$$
$$- [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 - [3]_4 - [3]_5 - [3]_6$$
$$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3$$
$$- [4]_0 - [4]_1 - [4]_2 - [4]_3 - [4]_4 - [4]_5$$
$$\{5\} = [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4$$
$$- [5]_0 - [5]_1 - [5]_2 - [5]_3 - [5]_4$$
$$\{6\} = [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5$$
$$- [6]_0 - [6]_1 - [6]_2 - [6]_3$$
$$\{7\} = [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6$$
$$- [7]_0 - [7]_1 - [7]_2$$
$$\{8\} = [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6 + [0]_7$$
$$- [8]_0 - [8]_1$$
$$\{9\} = [8]_0 + [7]_1 + [6]_2 + [5]_3 + [4]_4 + [3]_5 + [2]_6 + [1]_7 + [0]_8$$
$$- [9]_0$$
$$\{10\} = [9]_0 + [8]_1 + [7]_2 + [6]_3 + [5]_4 + [4]_5 + [3]_6 + [2]_7 + [1]_8$$

$$n = 9.$$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots + [8]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots\ldots + [7]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots\ldots + [6]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + \ldots + [5]_3$$
$$\{4\}' = [0]_4 + [1]_4 + [2]_4 + [3]_4 + [4]_4$$
$$\{5\}' = [0]_5 + [1]_5 + [2]_5 + [3]_5$$
$$\{6\}' = [0]_6 + [1]_6 + [2]_6$$
$$\{7\}' = [0]_7 + [1]_7$$

$$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 - [0]_7$$
$$\{1\} = [0]_0$$
$$- [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 - [1]_6 - [1]_7$$
$$\{2\} = [1]_0 + [0]_1$$
$$- [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 - [2]_5 - [2]_6$$
$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2$$
$$- [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 - [3]_4 - [3]_5$$

$$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3$$
$$- [4]_0 - [4]_1 - [4]_2 - [4]_3 - [4]_4$$
$$\{5\} = [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4$$
$$- [5]_0 - [5]_1 - [5]_2 - [5]_3$$
$$\{6\} = [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5$$
$$- [6]_0 - [6]_1 - [6]_2$$
$$\{7\} = [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6$$
$$- [7]_0 - [7]_1$$
$$\{8\} = [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6 + [0]_7$$
$$- [8]_0$$
$$\{9\} = [8]_0 + [7]_1 + [6]_2 + [5]_3 + [4]_4 + [3]_5 + [2]_6 + [1]_7$$

$$n = 8.$$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots\ldots\ldots + [7]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots\ldots\ldots + [6]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots\ldots\ldots + [5]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + \ldots\ldots + [4]_3$$
$$\{4\}' = [0]_4 + [1]_4 + [2]_4 + [3]_4$$
$$\{5\}' = [0]_5 + [1]_5 + [2]_5$$
$$\{6\}' = [0]_6 + [1]_6$$

$$\{0\} = - [0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6$$
$$\{1\} = [0]_0$$
$$- [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 - [1]_6$$
$$\{2\} = [1]_0 + [0]_1$$
$$- [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 - [2]_5$$
$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2$$
$$- [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 - [3]_4$$
$$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3$$
$$- [4]_0 - [4]_1 - [4]_2 - [4]_3$$
$$\{5\} = [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4$$
$$- [5]_0 - [5]_1 - [5]_2$$
$$\{6\} = [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5$$
$$- [6]_0 - [6]_1$$
$$\{7\} = [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6$$
$$- [7]_0$$
$$\{8\} = [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6$$

$$n = 7.$$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots + [6]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots\ldots + [5]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + [3]_2 + [4]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + [3]_3$$
$$\{4\}' = [0]_4 + [1]_4 + [2]_4$$
$$\{5\}' = [0]_5 + [1]_5$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 -[0]_3 -[0]_4 -[0]_5 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
& -[1]_0 -[1]_1 -[1]_2 -[1]_3 -[1]_4 -[1]_5 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 \\
& -[2]_0 -[2]_1 -[2]_2 -[2]_3 -[2]_4 \\
\{3\} &= [2]_0 +[1]_1 +[0]_2 \\
& -[3]_0 -[3]_1 -[3]_2 -[3]_3 \\
\{4\} &= [3]_0 +[2]_1 +[1]_2 +[0]_3 \\
& -[4]_0 -[4]_1 -[4]_2 \\
\{5\} &= [4]_0 +[3]_1 +[2]_2 +[1]_3 +[0]_4 \\
& -[5]_0 -[5]_1 \\
\{6\} &= [5]_0 +[4]_1 +[3]_2 +[2]_3 +[1]_4 +[0]_5 \\
& -[6]_0 \\
\{7\} &= [6]_0 +[5]_1 +[4]_2 +[3]_3 +[2]_4 +[1]_5
\end{aligned}
$$

$n = 6.$

$$
\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 +[1]_0 +[2]_0 + \dots +[5]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 +[1]_1 +[2]_1 +[3]_1 +[4]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 +[1]_2 +[2]_2 +[3]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 +[1]_3 +[2]_3 \\
\{4\}' &= [0]_4 +[1]_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 -[0]_3 -[0]_4 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
& -[1]_0 -[1]_1 -[1]_2 -[1]_3 -[1]_4 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 \\
& -[2]_0 -[2]_1 -[2]_2 -[2]_3 \\
\{3\} &= [2]_0 +[1]_1 +[0]_2 \\
& -[3]_0 -[3]_1 -[3]_2 \\
\{4\} &= [3]_0 +[2]_1 +[1]_2 +[0]_3 \\
& -[4]_0 -[4]_1 \\
\{5\} &= [4]_0 +[3]_1 +[2]_2 +[1]_3 +[0]_4 \\
& -[5]_0 \\
\{6\} &= [5]_0 +[4]_1 +[3]_2 +[2]_3 +[1]_4
\end{aligned}
$$

$n = 5.$

$$
\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 +[1]_0 +[2]_0 +[3]_0 +[4]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 +[1]_1 +[2]_1 +[3]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 +[1]_2 +[2]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 +[1]_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 -[0]_3 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
& -[1]_0 -[1]_1 -[1]_2 -[1]_3 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 \\
& -[2]_0 -[2]_1 -[2]_2
\end{aligned}
$$

$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2 - [3]_0 - [3]_1$$
$$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3 - [4]_0$$
$$\{5\} = [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3$$

$n = 4.$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + [3]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2$$

$$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2$$
$$\{1\} = [0]_0 - [1]_0 - [1]_1 - [1]_2$$
$$\{2\} = [1]_0 + [0]_1 - [2]_0 - [2]_1$$
$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1 + [0]_2 - [3]_0$$
$$\{4\} = [3]_0 + [2]_1 + [1]_2$$

$n = 3.$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1$$

$$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1$$
$$\{1\} = [0]_0 - [1]_0 - [1]_1$$
$$\{2\} = [1]_0 - [2]_0 + [0]_1$$
$$\{3\} = [2]_0 + [1]_1$$

$n = 2.$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0$$

$$\{0\} = -[0]_0$$
$$\{1\} = [0]_0 - [1]_0$$
$$\{2\} = [1]_0$$

Alle diese Ausdrücke schreiten nach so einfachen Gesetzen fort, dass man sie ohne Schwierigkeit für jeden beliebigen Werth von n hinschreiben kann. Die willkührliche Grösse $[0]_{n-1}$ ist allenthalben weggelassen worden, man kann sie aber leicht ergänzen, wenn man sie nicht gleich Null machen will.

36.

Zur näheren Einsicht in die überaus kurze Rechnung, auf welche das in Rede stehende Verfahren hinführt, sollen zwei kleine

Beispiele hinzugefügt werden, die aber fingirte sein müssen, da gegenwärtig keine in Wirklichkeit ausgeführten vorliegen. Fingirte Beispiele haben übrigens den Nutzen, dass sie so eingerichtet werden können, dass die Eigenthümlichkeiten des durch sie zu erläuternden Verfahrens hervortreten, was bei den der Wirklichkeit entnommenen nicht immer der Fall ist.

Sei zuerst

$$n = 8$$

und habe man durch die Messungen die folgenden Zahlenwerthe erhalten, unter deren Einheit man sich $\frac{1}{10}$ Millimeter denken kann, und die sich folglich bis auf $\frac{1}{1000}$ Millimeter einschliesslich erstrecken:

$[0]_0 = +0.32$, $[0]_1 = +0.55$, $[0]_2 = +1.22$, $[0]_3 = +0.27$
$[1]_0 = +0.32$, $[1]_1 = +0.52$, $[1]_2 = +1.17$, $[1]_3 = +0.11$
$[2]_0 = +0.28$, $[2]_1 = +0.48$, $[2]_2 = +1.08$, $[2]_3 = +0.02$
$[3]_0 = +0.22$, $[3]_1 = +0.43$, $[3]_2 = +0.95$, $[3]_3 = -0.17$
$[4]_0 = +0.20$, $[4]_1 = +0.35$, $[4]_2 = +0.82$, $[4]_3 = -0.27$
$[5]_0 = +0.20$, $[5]_1 = +0.27$, $[5]_2 = +0.79$
$[6]_0 = +0.10$, $[6]_1 = +0.20$
$[7]_0 = +0.16$

$[0]_4 = +0.31$, $[0]_5 = -1.80$, $[0]_6 = -0.95$
$[1]_4 = +0.20$, $[1]_5 = -2.04$, $[1]_6 = -1.07$
$[2]_4 = -0.03$, $[2]_5 = -2.18$
$[3]_4 = -0.12$

In Folge der Bemerkung des Art. 24 sollen den einzelnen Zahlenwerthen dieser Gruppen bez. die Zahlen

$$-0.22,\quad -0.40,\quad -1.00,\quad 0.00$$
$$-0.09,\quad +2.00,\quad +1.01,$$

hinzugefügt werden, wodurch sie in die folgenden übergehen,

$[0]_0 = +0.10$, $[0]_1 = +0.15$, $[0]_2 = +0.22$, $[0]_3 = +0.27$
$[1]_0 = +0.10$, $[1]_1 = +0.12$, $[1]_2 = +0.17$, $[1]_3 = +0.11$
$[2]_0 = +0.06$, $[2]_1 = +0.08$, $[2]_2 = +0.08$, $[2]_3 = +0.02$
$[3]_0 = +0.00$, $[3]_1 = +0.03$, $[3]_2 = -0.05$, $[3]_3 = -0.17$
$[4]_0 = -0.02$, $[4]_1 = -0.05$, $[4]_2 = -0.18$, $[4]_3 = -0.27$
$[5]_0 = -0.02$, $[5]_1 = -0.13$, $[5]_2 = -0.21$
$[6]_0 = -0.12$, $[6]_1 = -0.20$
$[7]_0 = -0.06$

$\overline{0}_4 = +0.22$, $\overline{0}_5 = +0.20$, $\overline{0}_6 = +0.06$
$\overline{1}_4 = +0.11$, $\overline{1}_5 = -0.04$, $\overline{1}_6 = -0.06$
$\overline{2}_4 = -0.12$, $\overline{2}_5 = -0.18$
$\overline{3}_4 = -0.21$

Hieraus bekommt man zuerst durch die unter $n = 8$ in den Artt. 35, 10 und 11 ausgeschriebenen Ausdrücke

$\{0\}' = +0.04$, $\{0\} = -1.22$, $S_0 = -2.41$, $D_0 = -0.03$, $K_0 = +0.04$
$\{1\}' = 0.00$, $\{1\} = -0.41$, $S_1 = -1.05$, $D_1 = +0.23$, $K_1 = 0.00$
$\{2\}' = +0.03$, $\{2\} = +0.31$, $S_2 = +0.84$, $D_2 = -0.22$, $K_2 = -0.03$
$\{3\}' = -0.04$, $\{3\} = +0.80$, $S_3 = +1.58$, $D_3 = +0.02$, $K_3 = -0.16$
$\{4\}' = 0.00$, $\{4\} = +1.04$, $S_4 = +2.08$
$\{5\}' = -0.02$, $\{5\} = +0.78$
$\{6\}' = 0.00$, $\{6\} = +0.53$
$\{7\}' = 0$, $\{7\} = -0.64$
$\{8\} = -1.19$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass diese Zahlenwerthe den beiden Bedingungsgleichungen (a) und (b) des Art. 8 Genüge leisten. Seien nun die Theilungsfehler

$$(0) = 0, \quad (8) = 0$$

dann geben die Gleichungen des Art. 14 zunächst

$$L_0 = -0.03$$
$$L_1 = -0.02$$
$$L_2 = +0.0157$$
$$L_3 = +0.0140$$

Es ist zu bemerken, dass zur Berechnung dieser L die letzten der mit K und D bezeichneten Grössen gar nicht gebraucht worden sind, und dass diess immer der Fall sein wird; man kann sie dahingegen zur Controle der numerischen Berechnung der L verwenden. Berechnet man durch Hülfe dieser Grössen, deren allgemeine Bezeichnung den Index $p-1$ und bez. q hat, durch fortgesetzte Anwendung der betreffenden Gleichungen des Art. 14, auch L_p, oder bez. L_{q+1}, so muss man, wenn die numerische Rechnung fehlerfrei ausgeführt ist,

$$L_p = 0, \text{ und bez. } L_{q+1} = -L_q$$

erhalten. Man kann sich leicht überzeugen, dass die eben für unser Beispiel angegebenen Zahlenwerthe der ersten dieser beiden Bedingungen (indem hier n grade ist) entsprechen.

Man bekommt hierauf leicht

$$(s,1) = -0.1511 \qquad (s,3) = -0.4433$$
$$(d,1) = -0.0277 \qquad (d,3) = -0.0007$$
$$(s,2) = -0.3611 \qquad (s,4) = -0.4989$$
$$(d,2) = +0.0262$$

und hieraus die Theilungsfehler

$$(1) = -0.0894 \qquad (5) = -0.2213$$
$$(2) = -0.1675 \qquad (6) = -0.1937$$
$$(3) = -0.2220 \qquad (7) = -0.0617$$
$$(4) = -0.2494$$

wozu noch

$$(0) = 0 \ , \ (8) = 0$$

kommen.

Um die Summe der Fehlerquadrate zu berechnen, giebt der Art. 20 für unser Beispiel zuerst

$$(ll) = 0.6961$$

und die obigen Zahlenwerthe geben ferner

$$\Sigma\{k\}^2 = 6.1892$$

$$\Delta_0^2 = 0.0016, \quad L_0^2 = 0.0009, \quad 8\Delta'^2_0 = 0.0200$$
$$\Delta_1^2 = 0.0000, \quad L_1^2 = 0.0004, \quad 14\Delta'^2_1 = 0.0178$$
$$\Delta_2^2 = 0.0025, \quad L_2^2 = 0.0002, \quad 18\Delta'^2_2 = 0.0005$$
$$\Delta_3^2 = 0.0016, \quad L_3^2 = 0.0002, \quad 20\Delta'^2_3 = 0.0040$$
$$0.0057, \qquad 0.0017, \qquad 0.0423$$

womit der Ausdruck des Art. 23

$$\Omega = 0.0067$$

ergiebt.

Berechnet man endlich auch die Werthe der m_0, m_1, m_2, etc., wozu man sich am einfachsten der Gleichungen des Art. 16 bedient, so erhält man, wenn zugleich die obige Bemerkung in Betreff der den Messungen hinzugefügten Zahlenwerthe berücksichtigt wird,

$$m_0 = -0.0050 \ -0.22 = -0.2250$$
$$m_1 = -0.0040 \ -0.40 = -0.4040$$
$$m_2 = -0.0053 \ -1.00 = -1.0053$$
$$m_3 = +0.0076 \quad 0 \quad = +0.0076$$
$$m_4 = -0.0006 \ -0.09 = -0.0906$$
$$m_5 = +0.0062 \ +2.00 = +2.0062$$
$$m_6 = -0.0139 \ +1.01 = +0.9961$$
$$m_7 = 0 \qquad\qquad = 0$$

Aus diesen Bestimmungen erhält man die Längen der angewandten Prüfungsintervalle selbst, durch Anwendung der in Art. 1 gegebenen Erklärungen der überhaupt mit m bezeichneten Grössen. Nennt man, wie dort, i die Grösse der Intervalle des Maassstabes nach der Anbringung der Theilungsfehler, so werden die Längen der bei der Berichtigung desselben angewandten Prüfungsintervalle durch die Ausdrücke

$$i + m_0,\ i + m_1,\ i + m_2,\ \text{etc.}$$

gegeben.

37.

Als zweites Beispiel seien

$$n = 5$$

und die durch die angestellten Messungen erhaltenen Zahlenwerthe

$$\begin{array}{ll}
[0]_0 = +0.20 & [0]_1 = -0.40 \\
[1]_0 = +0.30 & [1]_1 = -0.20 \\
[2]_0 = +0.36 & [2]_1 = +0.22 \\
[3]_0 = +0.68 & [3]_1 = +0.74 \\
[4]_0 = +0.90 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
[0]_2 = -0.68 & [0]_3 = -0.28 \\
[1]_2 = -0.05 & [1]_3 = +0.33 \\
[2]_2 = +0.65 &
\end{array}$$

Wir wollen diese zuerst unverändert anwenden, und zugleich in der Berechnung

$$(s,0) = -0.3\ ,\ (d,0) = +0.2$$

woraus

$$(0) = -0.05\ ,\ (5) = -0.25$$

folgen, annehmen. Aus den vorstehenden Zahlenwerthen ergeben sich nun zunächst, durch Anwendung der in den Artt. 35, 10 und 11 unter $n = 5$ ausgeschriebenen Formeln,

$$\begin{array}{lllll}
\{0\}' = +2.44, & \{0\} = +1.16, & S_0 = +3.78, & D_0 = -1.46, & K_0 = +2.44 \\
\{1\}' = +0.36, & \{1\} = -0.18, & S_1 = -0.51, & D_1 = +0.15, & K_1 = +0.92 \\
\{2\}' = -0.08, & \{2\} = -1.33, & S_2 = -3.27, & D_2 = +0.61, & K_2 = -0.48 \\
\{3\}' = -0.05, & \{3\} = -1.94 & & & \\
\{4\}' = 0 & \{4\} = -0.33 & & & \\
 & \{5\} = +2.12 & & &
\end{array}$$

welche wieder den Bedingungsgleichungen (a) und (b) des Art. 8

genügen. Durch die bez. Gleichungen des Art. 14 ergeben sich zunächst hieraus

$$D'_0 = -0.26,\quad K'_0 = +1.24,\quad L_0 = -0.26$$
$$K'_1 = -0.28,\quad L_1 = +0.236$$
$$K'_2 = -1.68,\quad L_2 = +0.1445$$

wo die Berechnung der L wieder auf die im vor. Art. angegebene Weise hat geprüft werden können. Hieraus folgen nun

$$(s,1) = +0.415 \qquad (s,2) = +0.875$$
$$(d,1) = +0.0143 \qquad (d,2) = -0.0776$$
$$(0) = -0.0500 \qquad (3) = +0.4768$$
$$(1) = +0.2147 \qquad (4) = +0.2004$$
$$(2) = +0.3987 \qquad (5) = -0.2500$$

Man erhält ferner

$$(ll) = 3.4027 \qquad \Sigma\{k\}^2 = 13.8838$$
$$\Delta_0^2 = 5.9536,\quad L_0^2 = 0.0676,\quad 5\Delta'^2_0 = 1.2300$$
$$\Delta_1^2 = 0.0961,\quad L_1^2 = 0.0557,\quad 8\Delta'^2_1 = 0.0692$$
$$6.0497 \qquad L_2^2 = 0.0209,\quad 18\Delta'^2_2 = 0.3762$$
$$0.1442 \qquad 1.6754$$

womit sich

$$\Omega = 0.0226$$

ergiebt. Schliesslich werden

$$m_0 = -0.4480$$
$$m_1 = -0.0364$$
$$m_2 = +0.0722$$
$$m_3 = +0.0821$$
$$m_4 = +0.2000$$

womit man eben so, wie beim vorigen Beispiel erklärt wurde, zu den Prüfungsintervallen selbst übergehen kann.

38.

Es soll nun dasselbe Beispiel auf andere Weise behandelt werden. Zuerst setze man

$$(0) = 0,\quad (5) = 0$$

und addire zu den, im vor. Art. gegebenen, durch die Messungen erhaltenen Zahlenwerthen bez. die folgenden,

$$-0.488;\ -0.09;\ +0.03;\ -0.025$$

wodurch an deren Stelle die folgenden

$$[0]_0 = -0.288,\ [0]_1 = -0.49,\ [0]_2 = -0.65$$
$$[1]_0 = -0.188,\ [1]_1 = -0.29,\ [1]_2 = -0.02$$
$$[2]_0 = -0.128,\ [2]_1 = +0.13,\ [2]_2 = +0.68$$
$$[3]_0 = +0.192,\ [3]_1 = +0.65$$
$$[4]_0 = +0.412$$

$$[0]_3 = -0.305$$
$$[1]_3 = +0.305$$

erhalten werden, für welche

$$\{0\}' = 0,\ \{0\} = +1.733,\ S_0 = +3.78,\ D_0 = -0.314,\ K_0 = 0$$
$$\{1\}' = 0,\ \{1\} = -0.095,\ S_1 = -0.51,\ D_1 = +0.320,\ K_1 = 0$$
$$\{2\}' = +0.01,\ \{2\} = -1.360,\ S_2 = -3.27,\ D_2 = +0.550,\ K_2 = +0.06$$
$$\{3\}' = 0,\ \{3\} = -1.910$$
$$\{4\}' = 0,\ \{4\} = -0.415$$
$$\{5\} = +2.047$$

Wie man sieht, sind hier die Werthe der verschiedenen S genau dieselben, wie im vor. Art., und es lässt sich darthun, dass diess immer der Fall sein muss, welche Grössen man auch den verschiedenen Gruppen der Messungen hinzufügt. Hier bekommen wir nun

$$L_0 = -0.314$$
$$L_1 = -0.314$$
$$L_2 = -0.1555$$

und sodann

$$(s,1) = +0.715 \qquad (s,2) = +1.175$$
$$(d,1) = -0.1057 \qquad (d,2) = -0.1176$$
$$(0) = 0 \qquad (3) = +0.6463$$
$$(1) = +0.3047 \qquad (4) = +0.4103$$
$$(2) = +0.5287 \qquad (5) = 0$$

Zur Summe der Fehlerquadrate ergiebt sich jetzt

$$(ll) = 2.1760,\ \Sigma\{k\}^2 = 12.8724$$
$$\Delta_0^2 = 0,\ L_0^2 = 0.0986,\quad 5\Delta'^2_0 = 0$$
$$\Delta_1^2 = 0,\ L_1^2 = 0.0986,\quad 8\Delta'^2_1 = 0.2008$$
$$L_2^2 = 0.0242,\quad 18\Delta'^2_2 = 0.4356$$
$$0.2214 \qquad 0.6364$$

und hiemit

$$\Omega = 0.0226$$

wie im vor. Art., obgleich hier die Rechnung durch ganz andere Zahlen geführt worden ist.

Schliesslich erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} m_0 &= 0 \qquad\quad -0.488 = -0.4880 \\ m_1 &= -0.0264-0.09 \;\; = -0.1164 \\ m_2 &= -0.0778+0.03 \;\; = -0.0478 \\ m_3 &= -0.0529-0.025 = -0.0779 \\ m_4 &= 0 \qquad\qquad\qquad\;\; = 0 \end{aligned}$$

welche, gleichwie die Theilungsfehler, von den im vor. Art. erhaltenen Werthen bedeutend verschieden sind.

39.

Um in die eben erhaltenen Resultate die Bedingungen, welchen die Theilungsfehler der Endstriche des zu berichtigenden Maassstabes unterliegen, einzuführen, dienen die Gleichungen der Artt. 17 und 18. Nehmen wir, wie im vorvor. Art., an, dass

$$(0) = -0.05, \text{ und } (5) = -0.25$$

sein sollen, so erhalten wir durch die Gleichung (k) des Art. 17

$$\begin{aligned} \delta(0) &= -0.05 \\ \delta(1) &= -0.09 \\ \delta(2) &= -0.13 \\ \delta(3) &= -0.17 \\ \delta(4) &= -0.21 \\ \delta(5) &= -0.25 \end{aligned}$$

und aus den Gleichungen (m) des Art. 18,

$$\begin{aligned} \delta m_0 &= +0.04 \\ \delta m_1 &= +0.08 \\ \delta m_2 &= +0.12 \\ \delta m_3 &= +0.16 \\ \delta m_4 &= +0.20 \end{aligned}$$

Fügt man diese den im vor. Art. erhaltenen Resultaten hinzu, so ergeben sich

$$\begin{aligned} (0) &= -0.0500 & m_0 &= -0.4480 \\ (1) &= +0.2147 & m_1 &= -0.0364 \\ (2) &= +0.3987 & m_2 &= +0.0722 \\ (3) &= +0.4763 & m_3 &= +0.0821 \\ (4) &= +0.2003 & m_4 &= +0.2000 \\ (5) &= -0.2500 \end{aligned}$$

welche sich mit den Resultaten des vorvor. Art., wo der Rechnung

sofort dieselben Bedingungen untergelegt worden waren, in vollständiger Uebereinstimmung befinden.

40.

Die Gleichungen des Art. 19 kommen zur Anwendung, wenn nicht die Theilungsfehler der Endstriche, sondern die anderer Theilstriche des Maassstabes im Voraus gegeben sind. Zur weiteren Erläuterung dieser Gleichungen soll angenommen werden, dsss in unserem Beispiel nicht die Fehler der Theilstriche 0 und 5, sondern statt dessen die der 2 und 4 gegeben seien; und zwar dass

$$(2) = +0.4487, \text{ und } (4) = +0.2503$$

werden sollen. Zur Anwendung der Gleichungen des Art. 19 erhalten wir jetzt

$$c = 2,\ (c) = +0.4487,\ (\gamma) = +0.5287$$
$$e = 4,\ (e) = +0.2503,\ (\varepsilon) = +0.4103$$
$$C = -0.0400,\ E = -0.0800$$

wo die Werthe von (γ) und (ε) diejenigen sind, die im Art. 38 gefunden worden waren. Die Gleichungen (k') und (m') des Art. 19 geben nun durch Anwendung der vorstehenden Zahlenwerthe sogleich

$$\begin{array}{llll} \delta'(0) = & 0 & \delta' m_0 = & +0.04 \\ \delta'(1) = & -0.04 & \delta' m_1 = & +0.08 \\ \delta'(2) = & -0.08 & \delta' m_2 = & +0.12 \\ \delta'(3) = & -0.12 & \delta' m_3 = & +0.16 \\ \delta'(4) = & -0.16 & \delta' m_4 = & +0.20 \\ \delta'(5) = & -0.20 & & \end{array}$$

welche den Resultaten des Art. 38 hinzuzufügen sind. Man sieht, dass die Werthe der m dieselben werden wie im vor. Art., weshalb sie nicht hingeschrieben zu werden brauchen; für die Theilungsfehler ergeben sich jetzt

$$\begin{array}{ll} (0) = & 0 \\ (1) = & +0.2647 \\ (2) = & +0.4487 \\ (3) = & +0.5262 \\ (4) = & +0.2503 \\ (5) = & -0.2000 \end{array}$$

woraus man erkennt, dass die den Theilungsfehlern (2) und (4) oben untergelegten Bedingungen erfüllt sind. Uebrigens wird man

leicht gewahr, dass diese Bedingungen so angenommen worden sind, dass sie nur eine Verschiebung der Theilungsfehler bewirken, was jedoch in den Anwendungen nicht vorkommen wird, und auch leichter berücksichtigt werden könnte. Die vorstehende Behandlung unseres Beispiels hat blos den Zweck zu zeigen, dass man in allen Fällen, welche vorkommen können, die Aufgabe so lösen darf, als wären (0) und (n) gleich Null, und dass man darauf jede mögliche Bedingung in Betreff der zwei Theilungsfehler, welche die Auflösung unbestimmt lässt, mögen diese sein, welche sie wollen, durch die Gleichungen der Artt. 17, 18, 19 mit Leichtigkeit berücksichtigen kann.

Zweites Verfahren.

41.

Das eben abgehandelte Verfahren ist das vollkommenste, welches zur Auflösung unserer Aufgabe gegeben werden kann, da es alle Combinationen der Intervalle des zu berichtigenden Maassstabes berücksichtigt, welche überhaupt der Messung unterworfen werden können. Dieses Verfahren muss deshalb allen Unbekannten der Aufgabe die grösstmöglichen Gewichte zutheilen, auch sind die Rechnungen, welche es verlangt, so einfach und kurz, wie bei keinem anderen Verfahren möglich ist. Dieses Verfahren verdient daher vorzugsweise angewandt zu werden, und würde auch immer angewandt werden können, wenn nicht ein Umstand damit verbunden wäre, der in manchen Fällen, welche vorkommen können, wenn man von der Strenge Nichts vergeben will, dessen Anwendung sehr mühsam macht. Wenn nemlich n eine sehr grosse Zahl ist, so wächst die Anzahl der auszuführenden Messungen (nahe im Verhältniss von n^2) so an, dass die Ausführung derselben sehr mühsam und zeitraubend wird.

In Anbetracht dieses Umstandes erscheint es nicht überflüssig, noch ein anderes Verfahren anzugeben, welches bei einer grossen Anzahl von Intervallen oder Theilstrichen auf geringere Arbeit hinsichtlich der anzustellenden Messungen hinführt, und es liegt an der Hand, dass diess nur dadurch bewirkt werden kann, dass man gewisse Gattungen von Combinationen der Messung nicht unterwirft. Da aber hiemit zugleich die ganze Auflösung der vorliegenden Auf-

gabe einen veränderten Gang nimmt und auf Endgleichungen anderer Form hinführt, so muss diese Verfahrungsart besonders abgeleitet und erklärt werden.

42.

Es giebt eine Gattung von Combinationen, die auf keinen Fall weggelassen werden darf, nemlich die Verbindung der Theilstriche 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3, u. s. w. mit einander, oder mit anderen Worten die Vergleichung der einzelnen Intervalle des Maassstabes mit einem Prüfungsintervall, und diese soll daher in den nachfolgenden Entwickelungen ausdrücklich aufgenommen werden. Da es aber von der besonderen Anschauung der die Ausführung leitenden Person abhängt, welche der übrigen Combinationen entweder weggelassen oder aufgenommen werden sollen, so wollen wir diese letzteren allgemein halten, und die Formeln unter diesem Gesichtspunkt entwickeln.

Seien $\varkappa$, λ, μ, etc. die übrigen aufzunehmenden Intervalle, ihrer Grösse nach geordnet, so dass

$$\varkappa < \lambda < \mu \text{ etc.}$$

und sei das grösste dieser Intervalle nicht grösser als p oder bez. q, wo p und q dieselbe Bedeutung haben, wie in den Artt. 9 u. f. Seien ferner η die Anzahl aller aufgenommenen Intervalle, wodurch

$$\eta = (\text{der Anzahl der } \varkappa, \lambda, \mu, \text{ etc.}) + 1$$

wird, dann sind die ursprünglichen Gleichungen unserer Aufgabe

$$-(0) + (1) + m_0 + [0]_0 = 0$$
$$-(1) + (2) + m_0 + [1]_0 = 0$$
$$-(2) + (3) + m_0 + [2]_0 = 0$$

etc. bis

$$-(n-2) + (n-1) + m_0 + [n-2]_0 = 0$$
$$-(n-1) + (n) + m_0 + [n-1]_0 = 0$$

$$-(0) + (\varkappa) + m_1 + [0]_1 = 0$$
$$-(1) + (\varkappa+1) + m_1 + [1]_1 = 0$$

etc. bis

$$-(n-\varkappa-1) + (n-1) + m_1 + [n-\varkappa-1]_1 = 0$$
$$-(n-\varkappa) + (n) + m_1 + [n-\varkappa]_1 - 0$$

$$-(0) + (\lambda) + m_2 + [0]_2 = 0$$
$$-(1) + (\lambda+1) + m_2 + [1]_2 = 0$$

etc. bis

$$-(n-\lambda-1)+(n-1)+m_2+[n-\lambda-1]_2=0$$
$$-(n-\lambda)+(n)+m_2+[n-\lambda]_2=0$$

$$-(0)+(\mu)+m_3+[0]_3=0$$
$$-(1)+(\mu+1)+m_3+[1]_3=0$$
etc. bis
$$-(n-\mu-1)+(n-1)+m_3+[n-\mu-1]_3=0$$
$$-(n-\mu)+(n)+m_3+[n-\mu]_3=0$$

etc.

die nach der Methode der kleinsten Quadrate zu behandeln sind.

43.

Das bekannte Verfahren führt auf die folgenden Endgleichungen:

$$\eta(0)-(1)-(\varkappa)-(\lambda)-(\mu)-\text{etc.}$$
$$-m_0-m_1-\ldots-m_{\eta-1}+\{0\}=0$$
$$-(0)+(\eta+1)(1)-(2)-(\varkappa+1)-(\lambda+1)-(\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-m_1-m_2-\ldots-m_{\eta-1}+\{1\}=0$$
$$-(1)+(\eta+1)(2)-(3)-(\varkappa+2)-(\lambda+2)-(\mu+2)-\text{etc.}$$
$$-m_1-m_2-\ldots-m_{\eta-1}+\{2\}=0$$

u. s. w. bis zur Gleichung für den Theilungsfehler $(\varkappa-1)$, ferner

$$-(0)-(\varkappa-1)+(\eta+2)(\varkappa)-(\varkappa+1)-(2\varkappa)-(\varkappa+\lambda)-(\varkappa+\mu)-\text{etc.}$$
$$-m_2-m_3-\ldots-m_{\eta-1}+\{\varkappa\}=0$$
$$-(1)-(\varkappa)+(\eta+2)(\varkappa+1)-(\varkappa+2)-(2\varkappa+1)-(\varkappa+\lambda+1)-(\varkappa+\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-m_2-m_3-\ldots-m_{\eta-1}+\{\varkappa+1\}=0$$

u. s. w. bis zur Gleichung für den Theilungsfehler $(\lambda-1)$, ferner

$$-(0)-(\lambda-\varkappa)-(\lambda-1)+(\eta+3)(\lambda)-(\lambda+1)-(\lambda+\varkappa)-(2\lambda)-(\lambda+\mu)-\text{etc.}$$
$$-m_3-m_4-\ldots-m_{\eta-1}+\{\lambda\}=0$$
$$-(1)-(\lambda-\varkappa+1)-(\lambda)+(\eta+3)(\lambda+1)-(\lambda+2)$$
$$-(\lambda+\varkappa+1)-(2\lambda+1)-(\lambda+\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-m_3-m_4-\ldots-m_{\eta-1}+\{\lambda+1\}=0$$

u. s. w. bis zur Gleichung für den Theilungsfehler $(\mu-1)$, ferner

$$-(0)-(\mu-\lambda)-(\mu-\varkappa)-(\mu-1)+(\eta+4)(\mu)$$
$$-(\mu+1)-(\mu+\varkappa)-(\lambda-\mu)-(2\mu)-\text{etc.}$$
$$-m_4-m_5-\ldots-m_{\eta-1}+\{\mu\}=0$$
$$-(1)-(\mu-\lambda+1)-(\mu-\varkappa+1)-(\mu)+(\eta+4)(\mu+1)$$
$$-(\mu+2)-(\mu+\varkappa+1)-(\mu+\lambda+1)-(2\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-m_4-m_5-\ldots-m_{\eta-1}+\{\mu+1\}=0$$

u. s. w. bis alle aufgenommenen Combinationen erschöpft, und die

Gleichungen für alle Theilungsfehler erhalten sind.*) Hierauf kommen noch die folgenden Gleichungen für die Prüfungsintervalle hinzu:

$$-(0) \qquad\qquad\qquad\qquad + (n) \quad + nm_0 \quad + \{0\}' = 0$$
$$-(0)-(1)-\ldots-(\varkappa-1)+(n-\varkappa+1)+\ldots+(n)+(n-\varkappa+1)m_1+\{1\}'=0$$
$$-(0)-(1)-\ldots-(\lambda-1)+(n-\lambda+1)+\ldots+(n)+(n-\lambda+1)m_2+\{2\}'=0$$
$$-(0)-(1)-\ldots-(\mu-1)+(n-\mu+1)+\ldots+(n)+(n-\mu+1)m_3+\{3\}'=0$$

u. s. w. bis die Gleichungen für alle Prüfungsintervalle erhalten sind.

Die völlig bekannten Glieder dieser Gleichungen haben die folgenden Ausdrücke:

$$\{0\} = -[0]_0-[0]_1-[0]_2-[0]_3-\text{etc.}$$
$$\{1\} = [0]_0-[1]_0-[1]_1-[1]_2-[1]_3-\text{etc.}$$
$$\{2\} = [1]_0-[2]_0-[2]_1-[2]_2-[2]_3-\text{etc.}$$

u. s. w. bis zu $\{\varkappa-1\}$, ferner

$$\{\varkappa\} = [\varkappa-1]_0-[\varkappa]_0+[0]_1-[\varkappa]_1-[\varkappa]_2-[\varkappa]_3-\text{etc.}$$
$$\{\varkappa+1\} = [\varkappa]_0-[\varkappa+1]_0+[1]_1-[\varkappa+1]_1-[\varkappa+1]_2-[\varkappa+1]_3-\text{etc.}$$

u. s. w. bis $\{\lambda-1\}$, ferner

$$\{\lambda\} = [\lambda-1]_0-[\lambda]_0+[\lambda-\varkappa]_1-[\lambda]_1+[0]_2-[\lambda]_2-[\lambda]_3-\text{etc.}$$
$$\{\lambda+1\} = [\lambda]_0-[\lambda+1]_0+[\lambda-\varkappa+1]_1-[\lambda+1]_1+[1]_2-[\lambda+1]_2-[\lambda+1]_3-\text{etc.}$$

u. s. w. bis $\{\mu-1\}$, ferner

$$\{\mu\} = [\mu-1]_0-[\mu]_0+[\mu-\varkappa]_1-[\mu]_1+[\mu-\lambda]_2-[\mu]_2 + [0]_3-[\mu]_3-[\mu]_4-\text{etc.}$$
$$\{\mu+1\} = [\mu]_0-[\mu+1]_0+[\mu-\varkappa+1]_1-[\mu+1]_1+[\mu-\lambda+1]_2-[\mu+1]_2 - [1]_3-[\mu+1]_3-[\mu+1]_4-\text{etc.}$$

u. s. w. bis

$$\{n-1\} = [n-2]_0-[n-1]_0+[n-\varkappa-1]_1+[n-\lambda-1]_2+[n-\mu-1]_3+\text{etc.}$$
$$\{n\} = [n-1]_0+[n-\varkappa]_1+[n-\lambda]_2+[n-\mu]_3+\text{etc.}$$

ferner

$$\{0\}' = [0]_0+[1]_0+[2]_0+\ldots+[n-1]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1+[1]_1+[2]_1+\ldots+[n-\varkappa]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2+[1]_2+[2]_2+\ldots+[n-\lambda]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3+[1]_3+[2]_3+\ldots+[n-\mu]_3$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

womit schon die Aufgabe allgemein gelöst ist.

---

*) Ich bemerke zum Ueberfluss, dass alle in den vorstehenden Gleichungen in ( ) eingeschlossenen Grössen Theilungsfehler bedeuten, mit Ausnahme von $(\eta+1)$, $(\eta+2)$, etc. welche numerische Coefficienten sind.

44.

Zur näheren Verständigung der im vor. Art. erhaltenen Endgleichungen wollen wir hier die Haupteigenthümlichkeiten derselben angeben.

1) Keine der Endgleichungen enthält alle Unbekannten, sondern es fehlen in jeder Gleichung eine Anzahl der letzteren, wodurch ihre Auflösung erleichtert wird.

2) Das ganze System von Endgleichungen besteht aus reciproken Gleichungen, nemlich aus solchen, welche zu beiden Seiten der Diagonale, die man durch sie ziehen kann, wenn sie geordnet aufgestellt werden, sowohl in vertikaler wie in horizontaler Richtung dieselben Coefficienten haben.

3) Diese Endgleichungen sind ausserdem in Bezug auf die Glieder, welche die Theilungsfehler enthalten, symmetrisch. Wenn man den letzten Theilungsfehler mit dem ersten, den vorletzten mit dem zweiten, u. s. w. vertauscht, dann bleiben alle diese Glieder dieselben. In Bezug auf die Prüfungsintervalle kann man auch die erste Gleichung mit der letzten, die zweite mit der vorletzten, u. s. w. vertauschen, wenn man zugleich die Zeichen derselben umkehrt. Seien für einen Augenblick (g), (h), (i), (k), (l), etc. irgend welche Theilungsfehler, und r ein numerischer Coefficient, dann findet neben der Gleichung

$$-(g)-(h)-(i)+r(k)-(l)-(m)-\text{etc.}$$
$$-m_c-\ldots-m_{\eta-1}+\{k\}=0$$

auch die Gleichung

$$\text{etc.}-(n-m)-(n-l)+r(n-k)-(n-i)-(n-h)-(n-g)$$
$$+m_c+\ldots\ldots+m_{\eta-1}+\{n-k\}=0$$

statt. Wenn man also die erste Hälfte dieser Gleichungen erhalten hat, so kann man die zweite Hälfte hiernach sogleich hinschreiben.

4) Die Anzahl der m, welche in diesen Gleichungen vorkommen, nimmt gegen die Mitte des Systems stufenweis ab, und unter Umständen kommen in der Mitte eine oder mehrere Gleichungen vor, in denen gar keine m enthalten sind.

45.

In Folge der Symmetrie in den Endgleichungen, auf welche im vor. Art. aufmerksam gemacht wurde, kann man auch hier die im «ersten Verfahren» eingeführten Summen und Unterschiede der Theilungsfehler mit Vortheil anwenden. Seien daher wieder

$$(s,0) = (0) + (n) \qquad (d,0) = (0) - (n)$$
$$(s,1) = (1) + (n-1) \qquad (d,1) = (1) - (n-1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

welche Gleichungen, wie man oben in den Artt. 9 und 11 gesehen hat, ihren natürlichen Abschluss bei

$$(s,p) = 2(p), \qquad (d,p-1) = (p-1) - (p+1)$$

wenn n eine grade Zahl ist, und bei

$$(s,q) = (q) + (q+1), \qquad (d,q) = (q) - (q+1)$$

wenn n eine ungrade Zahl ist, finden. Wir wollen sie aber hier weiter fortsetzen, und ferner noch die Bezeichnungen

$$(s,p+1) = (p+1) + (p-1), \qquad (d,p) = 0$$
$$(s,p+2) = (p+2) + (p-2), \qquad (d,p+1) = (p+1) - (p-1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

und beziehungsweise

$$(s,q+1) = (q+1) + (q), \qquad (d,q+1) = (q+1) - (q)$$
$$(s,q+2) = (q+2) + (q-1), \qquad (d,q+2) = (q+2) - (q-1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

einführen, woraus sich die allgemein gültigen Gleichungen

$$(s,k) = (s,n-k), \quad (d,k) = -(d,n-k)$$

ergeben, wenn k irgend einen Index bezeichnet, der nicht grösser als n ist.

46.

Wir können nun sehr leicht aus den Endgleichungen des Art. 43 die entsprechenden für die Summen und Unterschiede ableiten, denn diese Gleichungen unterscheiden sich in den Gliedern, welche die Theilungsfehler enthalten, nur dadurch, dass die s und bez. die d an die Stelle jener treten; die übrigen Abänderungen sind sehr leicht zu finden. Setzt man wieder

$$S_0 = \{0\} + \{n\}$$
$$S_1 = \{1\} + \{n-1\}$$
$$\text{etc.}$$

wie im Art. 9, so sind die Endgleichungen für die Summen:

$$\eta(s,0)-(s,1)-(s,\varkappa)-(s,\lambda)-(s,\mu) - \text{etc.} + S_0 = 0$$

$$-(s,1)+(\eta+1)(s,1)-(s,2)-(s,\varkappa+1)-(s,\lambda+1)$$
$$-(s,\mu+1) - \text{etc.} + S_1 = 0$$

$$-(s,1)+(\eta+1)(s,2)-(s,3)-(s,\varkappa+2)-(s,\lambda+2)$$
$$-(s,\mu+2) - \text{etc.} + S_2 = 0$$

etc.

$$-(s,0)-(s,\varkappa-1)+(\eta+2)(s,\varkappa)-(s,\varkappa+1)-(s,2\varkappa)-(s,\varkappa+\lambda)$$
$$-(s,\varkappa+\mu) - \text{etc.} + S_\varkappa = 0$$

$$-(s,1)-(s,\varkappa)+(\eta+2)(s,\varkappa+1)-(s,\varkappa+2)-(s,2\varkappa+1)$$
$$-(s,\varkappa+\lambda+1)-(s,\varkappa+\mu+1) - \text{etc.} + S_{\varkappa+1} = 0$$

etc.

$$-(s,0)-(s,\lambda-\varkappa)-(s,\lambda-1)+(\eta+3)(s,\lambda)-(s,\lambda+1)-(s,\lambda+\varkappa)$$
$$-(s,2\lambda)-(s,\lambda+\mu) - \text{etc.} + S_\lambda = 0$$

$$-(s,1)-(s,\lambda-\varkappa+1)-(s,\lambda)+(\eta+3)(s,\lambda+1)-(s,\lambda+2)$$
$$-(s,\lambda+\varkappa+1)-(s,2\lambda+1)-(s,\lambda+\mu+1) - \text{etc.} + S_{\lambda+1} = 0$$

etc.

$$-(s,0)-(s,\mu-\lambda)-(s,\mu-\varkappa)-(s,\mu-1)+(\eta+\varkappa)(s,\mu)-(s,\mu+1)$$
$$-(s,\mu+\varkappa)-(s,\mu+\lambda)-(s,2\mu) - \text{etc.} + S_\mu = 0$$

$$-(s,1)-(s,\mu-\lambda+1)-(s,\mu-\varkappa+1)-(s,\mu)+(\eta+4)(s,\mu+1)(s,\mu+2)$$
$$-(s,\mu+\varkappa+1)-(s,\mu+\lambda+1)-(s,2\mu+1) - \text{etc.} + S_{\mu+1} = 0$$

etc. etc.

Diese Gleichungen bestehen für sich, da alle m aus ihnen verschwunden sind; ihre Anzahl ist der der Unbekannten, die sie enthalten, gleich, und sie bilden jetzt das erste System von Endgleichungen. Sie brechen bei der Gleichung für (s,p) ab, wenn n grade ist, und bei der Gleichung für (s,q), wenn n ungrade ist. Sie sind wieder reciproke Gleichungen, und können auf bekannte Weise aufgelöst werden.

47.

Setzt man wieder

$$D_0 = \{0\}-\{n\}$$
$$D_1 = \{1\}-\{n-1\}$$

etc.

wie im Art. 11, so ergeben sich die folgenden Endgleichungen:

$$\eta(d,0)-(d,1)-(d,\varkappa)-(d,\lambda)-(d,\mu)-\text{etc.}$$
$$-2m_0-2m_1-\ldots-2m_{\eta-1}+D_0=0$$
$$-(d,0)+(\eta+1)(d,1)-(d,2)-(d,\varkappa+1)-(d,\lambda+1)-(d,\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-2m_1-2m_2-\ldots-2m_{\eta-1}+D_1=0$$
$$-(d,1)+(\eta+1)(d,2)-(d,3)-(d,\varkappa+2)-(d,\lambda+2)-(d,\mu+2)-\text{etc.}$$
$$-2m_1-m_2-\ldots-2m_{\eta-1}+D_2=0$$
etc.
$$-(d,0)-(d,\varkappa-1)+(\eta+2)(d,\varkappa)-(d,\varkappa+1)-(d,2\varkappa)-(d,\varkappa+\lambda)$$
$$-(d,\varkappa+\mu)-\text{etc.}$$
$$-2m_2-2m_3-\ldots-2m_{\eta-1}+D_\varkappa=0$$
$$-(d,1)-(d,\varkappa)+(\eta+2)(d,\varkappa+1)-(d,\varkappa+2)-(d,2\varkappa+1)-(d,\varkappa+\lambda+1)$$
$$-(d,\varkappa+\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-2m_2-2m_3-\ldots-2m_{\eta-1}+D_{\varkappa+1}=0$$
etc.
$$-(d,0)-(d,\lambda-\varkappa)-(d,\lambda-1)+(\eta+3)(d,\lambda)-(d,\lambda+1)$$
$$-(d,\lambda+\varkappa)-(d,2\lambda)-(d,\lambda+\mu)-\text{etc.}$$
$$-2m_3-2m_4-\ldots-2m_{\eta-1}+D_\lambda=0$$
$$-(d,1)-(d,\lambda-\varkappa+1)-(d,\lambda)+(\eta+3)(d,\lambda+1)-(d,\lambda+2)$$
$$-(d,\lambda+\varkappa+1)-(d,2\lambda+1)-(d,\lambda+\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-2m_3-2m_4-\ldots-2m_{\eta-1}+D_{\lambda+1}=0$$
etc.
$$-(d,0)-(d,\mu-\lambda)-(d,\mu-\varkappa)-(d,\mu-1)+(\eta+4)(d,\mu)-(d,\mu+1)$$
$$-(d,\mu+\varkappa)-(d,\mu+\lambda)-(d,2\mu)-\text{etc.}$$
$$-2m_4-\ldots-2m_{\eta-1}+D_\mu=0$$
$$-(d,1)-(d,\mu-\lambda+1)-(d,\mu-\varkappa+1)-(d,\mu)+(\eta+4)(d,\mu+1)$$
$$-(d,\mu+2)-(d,\mu+\varkappa+1)-(d,\mu+\lambda+1)-(d,2\mu+1)-\text{etc.}$$
$$-2m_4-\ldots-2m_{\eta-1}+D_{\mu+1}=0$$
etc. etc.

welche bei der Gleichung für $(d,p-1)$ und bez. (d,q) abbrechen. Zur Ergänzung dieser Gleichungen kommen noch die folgenden hinzu.

$$-2(d,0)+2nm_0+2\{0\}'=0$$
$$-2(d,0)-2(d,1)-\ldots-2(d,\varkappa-1)+2(n-\varkappa+1)m_1+2\{1\}'=0$$
$$-2(d,0)-2(d,1)-\ldots-2(d,\lambda-1)+2(n-\lambda+1)m_2+2\{2\}'=0$$
$$-2(d,0)-2(d,1)-\ldots-2(d,\mu-1)+2(n-\mu+1)m_3+2\{3\}'=0$$
etc. etc.

Die Gleichungen dieses Art. bestehen wieder für sich, und ihre Anzahl ist wieder der der Unbekannten gleich; sie bilden das zweite

System von Endgleichungen bei der gegenwärtigen Auflösung unserer Aufgabe. Auch sie sind reciproke Gleichungen, auf welche man die bekannte Auflösung solcher Gleichungen anwenden kann.

48.

Wenn man die Gleichungen des vorvor. und des vor. Art. für irgend einen bestimmten Werth von n ausgeschrieben hat, so ereignet sich, dass in einigen der $(s.k)$ und $(d.k)$ der Index k die Grenze der Gleichungen übersteigt, mit anderen Worten, dass k grösser wird als p, oder bez. $p-1$, oder bez. q; diese Glieder können und müssen durch Anwendung der im Art. 45 erhaltenen Gleichungen

$$(s,k) = (n-k), \quad (d,k) = -(d,n-k)$$

auf solche zurückgeführt werden, in denen k kleiner oder wenigstens nicht grösser ist, als die eben genannten Grenzwerthe. Hiebei können drei verschiedene Fälle eintreten, die wir besonders erörtern wollen.

1) Wenn nach der erklärten Zurückführung des Index k, dieser einen Werth annimmt, der in der betreffenden Gleichung sonst nicht vorkommt, so entsteht ein besonderes Glied, welches im ersten System, das ist in den Gleichungen für die (s,k) den Coefficienten -1, aber im zweiten System, oder in den Gleichungen für die (d,k) den Coefficienten $+1$ bekommt.

2) Wenn der zurückgeführte Index einen Werth bekommt, der ohnehin in der betreffenden Gleichung vorkommt, so vereinigen sich diese beiden Glieder mit einander. In den Gleichungen für die (s,k) bekommt das entstehende Glied den Coefficienten -2, aber in denen für die (d,k) heben sich die beiden vereinigten Glieder gegenseitig auf, und verschwinden daher.

3) Wenn der Index des zurückgeführten Gliedes dem des Hauptgliedes der Gleichung gleich wird, d. i. des Gliedes, welches einen positiven Coefficienten hat, so wird in den Gleichungen für die (s,k) dieser Coefficient um Eins verkleinert, und in denen für die (d,k) um Eins vergrössert.

49.

Addirt man alle Gleichungen des ersten Systems von Endgleichungen (Art. 46), so kommt man, infolge der Bedingungsgleichung (a) des Art. 8 auf eine Gleichung, die identisch Null ist, und es ist folglich wieder eine der Summen (s,k) willkührlich, für welche wieder am zweckmässigsten $(s,0)$ gewählt wird. Ausserdem findet man, dass in jeder Gleichung dieses Systemes wieder die Summe aller Coefficienten Null ist, welche Eigenschaft zur Prüfung der Richtigkeit der Aufstellung derselben dienen kann.

Multiplicirt man die Gleichungen der ersten Abtheilung des zweiten Systems von Endgleichungen (Art. 47) der Reihe nach mit

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \text{etc.}$$

und die der zweiten Abtheilung der Reihe nach mit

$$1,\ \varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \text{etc.}$$

und addirt alle diese Producte, so bekommt man infolge der Bedingungsgleichung (b) des Art. 8 wieder eine Gleichung, die identisch Null ist. Es ist folglich auch einer der Unterschiede (d,k) willkührlich, für welchen am zweckmässigsten $(d,0)$ gewählt wird. Nach Aufstellung dieser Endgleichungen bietet die Untersuchung, ob sie in der That der genannten Bedingungsgleichung genügen, einen Prüfstein für die Richtigkeit der Aufstellung dar.

50.

Die im Art. 17 erhaltenen allgemeinen Gleichungen

$$\delta(s,k) = (s,0)$$
$$\delta(d,k) = \frac{n-2k}{n}\,(d,0)$$

nebst der (k) und den zunächst daraus gezogenen Schlüssen, haben hier wieder volle Geltung, aber die Gleichungen (m) des Art. 18 nehmen eine etwas andere Form an. Man findet ohne Mühe, dass hier

$$\delta m_0 = \frac{1}{n}\,(d,0)$$
$$\delta m_1 = \frac{\varkappa}{n}\,(d,0)$$
$$\delta m_2 = \frac{\lambda}{n}\,(d,0)$$
$$\delta m_3 = \frac{\mu}{n}\,(d,0)$$
$$\text{etc.}$$

werden.

Substituirt man die vorstehenden Gleichungen für $\delta(s,k)$ in die Endgleichungen des Art. 46, so erkennt man sogleich, dass in jeder derselben $(s,0)$ verschwindet, und übrigens dieselbe Form bewahrt bleibt. Die Substitution der obigen Gleichung für $\delta(d,k)$, so wie der Gleichungen für δm_0, δm_1, etc. in die Endgleichungen des Art. 47 giebt ein ähnliches Resultat. Da in diesem letzteren Falle die Reduction weniger einfach ist, so wollen wir sie für die zwei ersten Gleichungen hier ansetzen; für die übrigen Gleichungen verfährt man ebenso.

Nehmen wir blos auf die mit $(d,0)$ multiplicirten Glieder Rücksicht, so giebt die erste Gleichung des Art. 47 nach der genannten Substitution die Glieder

$$\begin{array}{rr} \eta(d,0) - \frac{n-2}{n}(d,0) & -\frac{2}{n}(d,0) \\ -\frac{n-2x}{n}(d,0) & -\frac{2x}{n}(d,0) \\ -\frac{n-2\lambda}{n}(d,0) & -\frac{2\lambda}{n}(d,0) \\ -\frac{n-2\mu}{n}(d,0) & -\frac{2\mu}{n}(d,0) \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Da aber die Anzahl der Glieder in jeder der beiden Columnen $= \eta$ ist, so wird der ganze Ausdruck sogleich

$$\eta(d,0) - \eta(d,0) = 0$$

w. z. b. w. Die zweite Endgleichung des Art. 47 giebt unmittelbar nach der Substitution die Glieder

$$\begin{array}{rrr} -(d,0) + (\eta+1)\frac{n-2}{n}(d,0) & & \\ -\frac{n-4}{n}(d,0) & -\frac{n-2x-2}{n}(d,0) & -\frac{2x}{n}(d,0) \\ & -\frac{n-2\lambda-2}{n}(d,0) & -\frac{2\lambda}{n}(d,0) \\ & -\frac{n-2\mu-2}{n}(d,0) & -\frac{2\mu}{n}(d,0) \\ & -\text{etc.} & -\text{etc.} \end{array}$$

wo die Anzahl der Glieder einer jeden der beiden Columnen $= \eta - 1$ ist. Die Summe der Glieder beider Columnen wird also

$$= -(\eta-1)\frac{n-2}{n}(d,0)$$

und der ganze vorstehende Ausdruck wird

$$-(d,0) + (\eta+1)\frac{n-2}{n}(d,0) - \frac{n-4}{n}(d,0) - (\eta-1)\frac{n-2}{n}(d,0) = 0$$

w. z. b. w.

Wir ziehen aus diesen Untersuchungen den Schluss, dass man in jedem Falle die Endgleichungen der Artt. 46 und 47 in der Annahme

$$(s,0) = 0, \quad (d,0) = 0$$

auflösen darf. Wenn in speciellen Fällen solche Nebenbedingungen vorhanden sind, wodurch den beiden Grössen $(s,0)$ und $(d,0)$, oder einer derselben, Werthe beigelegt werden müssen, die von der Null verschieden sind, so kann man diese auf die nemliche Weise berücksichtigen, wie bei dem »ersten Verfahren« erklärt wurde.

Ich lasse nicht unerwähnt, dass man aus den Endgleichungen des Art. 47 alle m durch ein allgemeines Verfahren eliminiren kann; da aber hieraus keine besonderen Vortheile entspringen, so unterlasse ich die Ausführung, die auf ein System von Gleichungen für die (d,k) führt, in welchen die Coefficienten zusammengesetzte Ausdrücke bekommen, und kein Coefficient Null ist.

51.

Um die Summe der Fehlerquadrate zu erhalten, kann man sich beim gegenwärtigen Verfahren der Gleichung (Ω) des Art. 20, nemlich der Gleichung

$$\Omega = (ll) + \Sigma\{k\}(k) + \Sigma\{k\}' m_k$$

bedienen, deren Anwendung geringe Arbeit verursacht, aber verlangt, dass alle Unbekannten der Aufgabe schon berechnet worden sind. Diese Gleichung ist indess einer Umformung fähig, welche mit derjenigen, die in den einfacheren Fällen angewandt zu werden pflegt, dieselbe Quelle hat, und hier kurz angedeutet werden soll.

Durch die Anwendung der ersten der im Art. 21 angegebenen Gleichungen geht die obige in

$$\Omega = (ll) + \tfrac{1}{2}\, \Sigma S_k (s,k) + \tfrac{1}{2}\, (\Sigma D_k (d,k) + 2\Sigma\{k\}' m_k)$$

über. Setzt man nun vor Allem $(s,0) = 0$, $(d,0) = 0$, und lässt demzufolge die erste Gleichung eines jeden der zwei Systeme von Endgleichungen unbeachtet, bezeichnet die Coefficienten der übrigen Endgleichungen auf die gewöhnliche Art, und zwar die des ersten Systemes mit

$$\begin{array}{l} (aa),\ (ab), \ldots\ldots (al) \\ (ab),\ (bb), \ldots\ldots (bl) \\ \text{etc.} \end{array}$$

und zur Unterscheidung die des zweiten Systems mit

$$(\alpha\alpha),\ (\alpha\beta),\ \ldots\ldots\ (\alpha\lambda)$$
$$(\alpha\beta),\ (\beta\beta),\ \ldots\ldots\ (\beta\lambda)$$
etc.

wendet auch bei der Auflösung der Endgleichungen die bekannten Hülfsgrössen an,

$$(bb,1),\ (bc,1),\ \ldots\ (bl,1)$$
$$(cc,2),\ (cd,2),\ \ldots\ (cl,2)$$
etc.

so wie im zweiten System die ähnlichen, mit griechischen Buchstaben zu bezeichnenden, so findet man auf bekannte Art:

$$\Omega = (ll) - \frac{1}{2}\left\{\frac{(al)^2}{(aa)} + \frac{(bl,1)^2}{(bb,1)} + \frac{(cl,2)^2}{(cc,2)} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha\lambda)^2}{(\alpha\alpha)} + \frac{(\beta\lambda,1)^2}{(\beta\beta,1)} + \frac{(\gamma\lambda,2)^2}{(\gamma\gamma,2)} + \ldots\right\}$$

wo die Reihen fortgesetzt werden müssen, bis alle Unbekannten erschöpft sind. Die Arbeit, welche die Anwendung dieses Ausdrucks verursacht, kann übrigens derjenigen des obigen Ausdrucks gleichgesetzt werden, da jeder dieser beiden Ausdrücke aus derselben Anzahl von Gliedern besteht.

52.

Zur Berechnung der Gewichte, welche das gegenwärtige Verfahren den Unbekannten beilegt, ist Folgendes zu bemerken. Die Anwendung eines der bekannten Verfahren zur unbestimmten Auflösung eines Systems von linearischen Gleichungen, bei gegebenem Werthe von n, führt in Bezug auf das erste System von Endgleichungen zur Kenntniss des Coefficienten von S_k in der Gleichung für (s,k), welchen Coefficienten wir $[s,k]$ nennen wollen. Durch Anwendung desselben Verfahrens auf das zweite System von Endgleichungen gelangt man nicht nur zur Kenntniss des Coefficienten von D_k in der Gleichung für (d,k), sondern auch zur Kenntniss des Coefficienten von $\{i\}'$ in der Gleichung für m_i, welche beiden Coefficienten hier mit $[d,k]$ und $[i]'$ bezeichnet werden sollen.

Wenn wir nun, wie oben, die Gewichte durch ein der betreffenden Grösse vorgesetztes P bezeichnen, so ist ohne Weiteres allgemein

$$P(m_i) = \frac{1}{[i]'}$$

und den Entwickelungen des Art. 25 gemäss

$$P(k) = P(n-k) = \frac{2}{[s,k] + [d,k]}$$

wozu noch bemerkt werden kann, dass immer

$$P(m_0) = n$$

und wegen $(d,p) = 0$,

$$P(p) = \frac{2}{[s,p]}$$

werden.

Schliesslich ist zu diesem Verfahren noch zu bemerken, dass man gleichwie im ersten Verfahren durch Addition oder Subtraction constanter Zahlen die durch die Messungen gegebenen Zahlenwerthe verkleinern, und wenn man will bewirken kann, dass die durch $\{k\}'$ bezeichneten Grössen Null oder wenigstens sehr klein werden.

53.

Ich halte es zur leichteren Orientirung für dienlich, die Gleichungen, auf welche dieses »zweite Verfahren« führt, für zwei specielle Werthe von n auszuschreiben, und setze zuerst

$$n = 20.$$

Die Combinationen, welche ich aufnehmen werde, sollen

$$\varkappa = 2,\ \lambda = 4,\ \mu = 7,\ \nu = 10$$

sein, womit

$$\eta = 5,\ p = 5$$

wird. Die vorstehenden Werthe von $\varkappa$, λ, μ, ν bedeuten, dass man ausser den einzelnen Intervallen des zu prüfenden Maassstabes, auch die Intervalle zwischen den Theilstrichen 0 und 2, 1 und 3, u. s. w., ferner zwischen 0 und 4, 1 und 5, u. s. w., ferner zwischen 0 und 7, 1 und 8, u. s. w., endlich zwischen 0 und 10, 1 und 11, u. s. w. mit angemessenen Prüfungsintervallen vergleichen, und die Unterschiede von diesen messen wolle. Wir bekommen nun zunächst

$$\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots + [19]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots + [18]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots + [16]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + \ldots + [13]_3 \\
\{4\}' &= [0]_4 + [1]_4 + [2]_4 + \ldots + [10]_4
\end{aligned}$$

aus welcher Zusammenstellung zugleich ersichtlich ist, welche numerische Grössen im gegenwärtigen Falle durch die Messungen erlangt

werden müssen. Aus diesen letzteren ergeben sich auch die Werthe der $\{0\}$, $\{1\}$, etc., deren Zusammensetzung ich so geordnet, dass das Gesetz des Fortganges sogleich ersichtlich ist, auf der Rückseite der angehängten Tafel angegeben habe. Die Vorderseite dieser Tafel giebt die beiden Systeme von Endgleichungen für den vorliegenden Fall, welche nach den allgemeinen Gleichungen der Artt. 46 und 47 aufgestellt worden, und in denen

$$S_0 = \{0\}+\{20\},\quad D_0 = \{0\}-\{20\}$$
$$S_1 = \{1\}+\{19\},\quad D_1 = \{1\}-\{19\}$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$
$$S_{10} = 2\{10\},\qquad D_9 = \{9\}-\{11\}$$

sind. Die Richtigkeit der Aufstellung der Endgleichungen prüft man dadurch:

1) dass jedes System für sich reciprok sein muss;

2) dass in der Summe aller Gleichungen des ersten Systems alle Unbekannten verschwinden, so wie dass ausserdem in jeder Gleichung die Summe aller Coefficienten gleich Null sein muss:

3) dass im zweiten System alle Unbekannten verschwinden sollen, nachdem man die Gleichungen desselben der Reihe nach mit

$$10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$
$$\tfrac{1}{2},\ 1,\ 2,\ \tfrac{7}{2}\ 5$$

multiplicirt, und diese Producte addirt hat.

Der richtigen numerischen Berechnung der Grössen S_0, S_1, etc. D_0, D_1, etc. $\{0\}'$, $\{1\}'$, etc. versichert man sich durch die obigen beiden letzten Bedingungen, das ist durch die Anwendung der Gleichungen

$$S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} S_{10} = 0$$
$$10D_0 + 9D_1 + 8D_2 + \ldots + D_9$$
$$+ \tfrac{1}{2}\{0\}' + \{1\}' + 2\{2\}' + \tfrac{7}{2}\{3\}' + 5\{4\}' = 0$$

welche aus den Gleichungen (a) und (b) des Art. 8 hervorgehen.

54.

Zum zweiten Beispiel sollen die numerischen Werthe

$$n = 11$$
$$\varkappa = 2,\ \lambda = 3,\ \mu = 5$$
$$\eta = 4,\ q = 5$$

benutzt werden, mit welchen man zuerst erhält:

$$
\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots\ldots + [10]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots\ldots + [9]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots\ldots + [8]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + \ldots\ldots + [6]_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= \qquad\;\; - [0]_0 \qquad\qquad\;\; - [0]_1 \qquad\qquad\;\; - [0]_2 \qquad\qquad\;\; - [0]_3 \\
\{1\} &= [0]_0 - [1]_0 \qquad\qquad\;\; - [1]_1 \qquad\qquad\;\; - [1]_2 \qquad\qquad\;\; - [1]_3 \\
\{2\} &= [1]_0 - [2]_0 + [0]_1 - [2]_1 \qquad\qquad\;\; - [2]_2 \qquad\qquad\;\; - [2]_3 \\
\{3\} &= [2]_0 - [3]_0 + [1]_1 - [3]_1 + [0]_2 - [3]_2 \qquad\qquad\;\; - [3]_3 \\
\{4\} &= [3]_0 - [4]_0 + [2]_1 - [4]_1 + [1]_2 - [4]_2 \qquad\qquad\;\; - [4]_3 \\
\{5\} &= [4]_0 - [5]_0 + [3]_1 - [5]_1 + [2]_2 - [5]_2 + [0]_3 - [5]_3 \\
\{6\} &= [5]_0 - [6]_0 + [4]_1 - [6]_1 + [3]_2 - [6]_2 + [1]_3 - [6]_3 \\
\{7\} &= [6]_0 - [7]_0 + [5]_1 - [7]_1 + [4]_2 - [7]_2 + [2]_3 \\
\{8\} &= [7]_0 - [8]_0 + [6]_1 - [8]_1 + [5]_2 - [8]_2 + [3]_3 \\
\{9\} &= [8]_0 - [9]_0 + [7]_1 - [9]_1 + [6]_2 \qquad\qquad\;\; + [4]_3 \\
\{10\} &= [9]_0 - [10]_0 + [8]_1 \qquad\qquad\;\; + [7]_2 \qquad\qquad\;\; + [5]_3 \\
\{11\} &= [10]_0 \qquad\qquad\;\; + [9]_1 \qquad\qquad\;\; + [8]_2 \qquad\qquad\;\; + [6]_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \{0\} + \{11\}, & D_0 &= \{0\} - \{11\} \\
S_1 &= \{1\} + \{10\}, & D_1 &= \{1\} - \{10\} \\
S_2 &= \{2\} + \{9\}, & D_2 &= \{2\} - \{9\} \\
S_3 &= \{3\} + \{8\}, & D_3 &= \{3\} - \{8\} \\
S_4 &= \{4\} + \{7\}, & D_4 &= \{4\} - \{7\} \\
S_5 &= \{5\} + \{6\}, & D_5 &= \{5\} - \{6\}
\end{aligned}
$$

Erstes System von Endgleichungen.

$$
\begin{aligned}
-\;(s,1) - (s,2) - (s,3) \qquad\qquad\;\; - (s,5) + S_0 &= 0 \\
+5(s,1) - (s,2) - (s,3) - (s,4) - (s,5) + S_1 &= 0 \\
-\;(s,1) + 6(s,2) - (s,3) - 2(s,4) - (s,5) + S_2 &= 0 \\
-\;(s,1) - (s,2) + 6(s,3) - (s,4) - 2(s,5) + S_3 &= 0 \\
-\;(s,1) - 2(s,2) - (s,3) + 6(s,4) - 2(s,5) + S_4 &= 0 \\
-\;(s,1) - (s,2) - 2(s,3) - 2(s,4) + 7(s,5) + S_5 &= 0
\end{aligned}
$$

Zweites System von Endgleichungen.

$$-(d,1)-(d,2)-(d,3)-(d,5)-2m_0-2m_1-2m_2-2m_3+D_0=0$$
$$+5(d,1)-(d,2)-(d,3)-(d,4)+(d,5)-2m_1-2m_2-2m_3+D_1=0$$
$$-(d,1)+6(d,2)-(d,3)-(d,5)-2m_2-2m_3+D_2=0$$
$$-(d,1)-(d,2)+8(d,3)-(d,4)-2m_3+D_3=0$$
$$-(d,1)-(d,3)+8(d,4)-2m_3+D_4=0$$
$$+(d,1)-(d,2)+9(d,5)+D_5=0$$
$$+22m_0+2\{0\}'=0$$
$$-2(d,1)+20m_1+2\{1\}'=0$$
$$-2(d,1)-2(d,2)+18m_2+2\{2\}'=0$$
$$-2(d,1)-2(d,2)-2(d,3)-2(d,4)+14m_3+2\{3\}'=0$$

Die Factoren, durch deren Anwendung man die richtige Aufstellung des zweiten Systems von Endgleichungen prüfen kann, sind hier

11, 9, 7, 5, 3, 1

1, 2, 3, 5

so wie alle beim vorigen Beispiel in dieser Beziehung aufgestellten Bemerkungen auch hier Anwendung finden.

55.

Die beiden Systeme von Endgleichungen, auf welche das gegenwärtige Verfahren führt, muss man in jedem speciellen Falle durch das bekannte Verfahren auflösen, um die Werthe der Unbekannten und ihre Gewichte zu erhalten, und es scheint nicht, dass sich im Allgemeinen hier Abkürzungen angeben lassen. Zwar könnte man aus dem zweiten System die m eliminiren, aber ich kann keinen Vortheil darin erblicken, da die durch diese Elimination hervorgehenden Gleichungen für die (d,k) keine Lücken in den Coefficienten mehr darbieten, und sehr unregelmässige Coefficienten bekommen, wodurch ihre Behandlung wieder erschwert wird.

Vereinfachungen in den Endgleichungen lassen sich nur in besonderen speciellen Fällen angeben, und das letzte Beispiel gehört dahin.

Zieht man im ersten System die erste Gleichung von der zweiten, dritten, vierten und sechsten ab, lässt dagegen die fünfte Gleichung unverändert, so bekommt man die folgenden:

$$n = 11$$

Erstes System von Endgleichungen

$$\begin{array}{rrrrrrl}
+6(s,1) & & & -(s,4) & & +M_1 & = 0 \\
 & +7(s,2) & & -2(s,4) & & +M_2 & = 0 \\
 & & +7(s,3) & -(s,4) & -(s,5) & +M_3 & = 0 \\
-(s,1) & -2(s,2) & -(s,3) & +6(s,4) & -2(s,5) & +M_4 & = 0 \\
 & & -(s,3) & -2(s,4) & +8(s,5) & +M_5 & = 0
\end{array}$$

in welchen

$$\begin{aligned}
M_1 &= S_1 - S_0 \\
M_2 &= S_2 - S_0 \\
M_3 &= S_3 - S_0 \\
M_4 &= S_4 \\
M_5 &= S_5 - S_0
\end{aligned}$$

sind. Dieses System von Gleichungen ist wieder reciprok, und weit leichter aufzulösen, als das ursprüngliche, weil es weit mehr Lücken oder fehlende Coefficienten darbietet.

Eliminirt man im zweiten System von Endgleichungen aus der ersten derselben m_0 durch die siebente, so ergiebt sich die folgende:

$$\begin{array}{l}
-(d,1) - (d,2) - (d,3) \qquad\qquad - (d,5) \\
\qquad\qquad -2m_1 \quad -2m_2 \quad -2m_3 + D_0 + \frac{2}{11}\{0\}' = 0
\end{array}$$

und zieht man diese von der zweiten, dritten, vierten, sechsten, so wie das Zweifache derselben von jeder der drei letzten ab, so ergiebt sich:

$$n = 11$$

Zweites System von Endgleichungen

$$\begin{array}{rrrrrrrrrl}
+6(d,1) & & & -(d,4) & +2(d,5) & & & & +N_1 & = 0 \\
 & +7(d,2) & & & & +2m_1 & & & +N_2 & = 0 \\
 & & +9(d,3) & -(d,4) & +(d,5) & +2m_1 & +2m_2 & & +N_3 & = 0 \\
-(d,1) & & -(d,3) & +8(d,4) & & & & -2m_3 & +N_4 & = 0 \\
+2(d,1) & & +(d,3) & & +10(d,5) & +2m_1 & +2m_2 & +2m_3 & +N_5 & = 0 \\
 & +2(d,2) & +2(d,3) & & +2(d,5) & +24m_1 & +4m_2 & +4m_3 & +N_6 & = 0 \\
 & & +2(d,3) & & +2(d,5) & +4m_1 & +22m_2 & +4m_3 & +N_7 & = 0 \\
 & & & -2(d,4) & +2(d,5) & +4m_1 & +4m_2 & +18m_3 & +N_8 & = 0
\end{array}$$

in welchen

$$N_1 = D_1 - \left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_2 = D_2 - \left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_3 = D_3 - \left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_4 = D_4$$
$$N_5 = D_5 - \left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_6 = 2\{1\}' - 2\left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_7 = 2\{2\}' - 2\left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$
$$N_8 = 2\{3\}' - 2\left(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}'\right)$$

sind. Diese Gleichungen bilden wieder ein reciprokes System, und sind leichter aufzulösen, als die ursprünglichen, weil sie mehr Lücken in ihren Coefficienten darbieten. Dass in den letzten Gleichungen hier alle m vorkommen, ist von keinem Belang, da während der Auflösung des ursprünglichen zweiten Systems von Gleichungen ähnliche Glieder ohnehin von selbst entstehen werden.

56.

Zur Vergleichung mit den betreffenden Resultaten des ersten Verfahrens wollen wir hier noch für das zunächst vorhergehende Beispiel die Gewichte berechnen, welche das gegenwärtige Verfahren den Unbekannten zutheilt. Zu diesem Zwecke müssen zunächst die numerischen Werthe der im Art. 52 mit $[s,k]$, $[d,k]$, $[i]'$ bezeichneten Grössen berechnet werden, und diese erhält man aus der unbestimmten Auflösung der Endgleichungen. Seien durch diese Auflösung erhalten worden

$$(s,1) + \{1,1\}M_1 + \{1,2\}M_2 + \ldots + \{1,5\}M_5 = 0$$
$$(s,2) + \{1,2\}M_1 + \{2,2\}M_2 + \ldots + \{2,5\}M_5 = 0$$
etc. bis
$$(s,5) + \{1,5\}M_1 + \{2,5\}M_2 + \ldots + \{5,5\}M_5 = 0$$

so wie

$$(d,1) + \{1,1\}'N_1 + \{1,2\}'N_2 + \ldots + \{1,8\}'N_8 = 0$$
$$(d,2) + \{1,2\}'N_1 + \{2,2\}'N_2 + \ldots + \{2,8\}'N_8 = 0$$
etc. bis

$$(d,5) + \{1,5\}'N_1 + \{2,5\}'N_2 + \ldots + \{5,8\}'N_8 = 0$$
$$m_1 + \{1,6\}'N_1 + \{2,6\}'N_2 + \ldots + \{6,8\}'N_8 = 0$$
$$m_2 + \{1,7\}'N_1 + \{2,7\}'N_2 + \ldots + \{7,8\}'N_8 = 0$$
$$m_3 + \{1,8\}'N_1 + \{2,8\}'N_2 + \ldots + \{8,8\}'N_8 = 0$$

die wegen der Lücken in den Endgleichungen mit geringer Mühe sich ergeben. Es ist nun zu erwägen, dass weder die M noch die N von einander unabhängig sind, sondern dass zwischen jeder dieser beiden Gruppen eine Bedingungsgleichung statt findet. Die zwischen den M vorhandene Gleichung ist, zufolge der (a) des Art. 8,

$$-S_0 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5$$

und die zwischen den N vorhandene, zufolge der (b) des Art. 8,

$$-(D_0 + \tfrac{2}{11}\{0\}') = \tfrac{9}{11} D_1 + \tfrac{7}{11} D_2 + \tfrac{5}{11} D_3 + \tfrac{3}{11} D_4 + \tfrac{1}{11} D_5$$
$$+ \tfrac{4}{11}\{1\}' + \tfrac{6}{11}\{2\}' + \tfrac{10}{11}\{3\}'$$

Eliminirt man durch diese Gleichungen S_0 aus den Ausdrücken für die M, sowie $D_0 + \frac{2}{11}\{0\}'$ aus denen für die N des vor. Art., und schreibt allgemein $\{k\}$ für S_k und D_k, so ergeben sich

$$[s,1] = \{1,1\} + \big(\{1,1\}+\{1,2\}+\{1,3\}+\{1,5\}\big)$$
$$[s,2] = \{2,2\} + \big(\{1,2\}+\{2,2\}+\{2,3\}+\{2,5\}\big)$$
$$[s,3] = \{3,3\} + \big(\{1,3\}+\{2,3\}+\{3,3\}+\{3,5\}\big)$$
$$[s,4] = \{4,4\} + \big(\{1,4\}+\{2,4\}+\{3,4\}+\{4,5\}\big)$$
$$[s,5] = \{5,5\} + \big(\{1,5\}+\{2,5\}+\{3,5\}+\{5,5\}\big)$$

$$[d,1] = \{1,1\}'+\tfrac{9}{11}\big(\{1,1\}'+\{1,2\}'+\{1,3\}'+\{1,5\}'\big)+\tfrac{18}{11}\big(\{1,6\}'+\{1,7\}'+\{1,8\}'\big)$$
$$[d,2] = \{2,2\}'+\tfrac{7}{11}\big(\{1,2\}'+\{2,2\}'+\{2,3\}'+\{2,5\}'\big)+\tfrac{14}{11}\big(\{2,6\}'+\{2,7\}'+\{2,8\}'\big)$$
$$[d,3] = \{3,3\}'+\tfrac{5}{11}\big(\{1,3\}'+\{2,3\}'+\{3,3\}'+\{3,5\}'\big)+\tfrac{10}{11}\big(\{3,6\}'+\{3,7\}'+\{3,8\}'\big)$$
$$[d,4] = \{4,4\}'+\tfrac{3}{11}\big(\{1,4\}'+\{2,4\}'+\{3,4\}'+\{4,5\}'\big)+\tfrac{6}{11}\big(\{4,6\}'+\{4,7\}'+\{4,8\}'\big)$$
$$[d,5] = \{5,5\}'+\tfrac{1}{11}\big(\{1,5\}'+\{2,5\}'+\{3,5\}'+\{5,5\}'\big)+\tfrac{2}{11}\big(\{5,6\}'+\{5,7\}'+\{5,8\}'\big)$$

$$[1]' = 2\{6,6\}'+\tfrac{4}{11}\big(\{1,6\}'+\{2,6\}'+\{3,6\}'+\{5,6\}'\big)+\tfrac{8}{11}\big(\{6,6\}'+\{6,7\}'+\{6,8\}'\big)$$
$$[2]' = 2\{7,7\}'+\tfrac{6}{11}\big(\{1,7\}'+\{2,7\}'+\{3,7\}'+\{6,7\}'\big)+\tfrac{12}{11}\big(\{6,7\}'+\{7,7\}'+\{7,8\}'\big)$$
$$[3]' = 2\{8,8\}'+\tfrac{10}{11}\big(\{1,8\}'+\{2,8\}'+\{3,8\}'+\{5,8\}'\big)+\tfrac{20}{11}\big(\{6,8\}'+\{7,8\}'+\{8,8\}'\big)$$

Die Berechnung der $\{1,1\}$, $\{1,2\}$, etc. $\{1,1\}'$, etc. kann nach längst bekannten Formeln ausgeführt werden, weshalb wir nicht dabei verweilen, sondern die für unser Beispiel erhaltenen Werthe sogleich ansetzen wollen.

$\{1,1\}=0.173$,	$\{1,2\}=0.011$,	$\{1,3\}=0.007$,	$\{1,4\}=0.037$,	$\{1,5\}=0.010$
	$\{2,2\}=0.161$,	$\{2,3\}=0.012$,	$\{2,4\}=0.063$,	$\{2,5\}=0{,}017$
		$\{3,3\}=0.153$,	$\{3,4\}=0.040$,	$\{3,5\}=0.029$
			$\{4,4\}=0.221$,	$\{4,5\}=0.060$
				$\{5,5\}=0.144$
$\{1,1\}'=0.184$,	$\{1,2\}'=0.000$,	$\{1,3\}'=0.007$,	$\{1,4\}'=0.026$,	$\{1,5\}'=-0.039$
		$\{1,6\}'=0.0014$,	$\{1,7\}'=0.0019$,	$\{1,8\}'=0.0066$
	$\{2,2\}'=0.147$,	$\{2,3\}'=0.003$,	$\{2,4\}'=0.001$,	$\{2,5\}'=0.002$
		$\{2,6\}'=-0.0134$,	$\{2,7\}'=0.0015$,	$\{2,8\}'=0.0031$
		$\{3,3\}'=0.119$,	$\{3,4\}'=0.017$,	$\{3,5\}'=-0.013$
		$\{3,6\}'=-0.0090$,	$\{3,7\}'=-0.0095$,	$\{3,8\}'=0.0072$
			$\{4,4\}'=0.135$,	$\{4,5\}'=-0{,}008$
		$\{4,6\}'=-0.0031$,	$\{4,7\}'=-0.0034$,	$\{4,8\}'=-0.0179$
				$\{5,5\}'=0.113$
		$\{5,6\}'=-0.0041$,	$\{5,7\}'=-0.0063$,	$\{5,8\}'=-0.0110$
		$\{6,6\}'=0.0465$,	$\{6,7\}'=-0.0055$,	$\{6,8\}'=-0.0088$
			$\{7,7\}'=0.0497$,	$\{7,8\}'=-0.0095$
				$\{8,8\}'=0.0629$

Hieraus folgen

$$[s,1] = 0.374\ ,\quad [d,1] = 0.330$$
$$[s,2] = 0.362\ ,\quad [d,2] = 0.232$$
$$[s,3] = 0.354\ ,\quad [d,3] = 0.161$$
$$[s,4] = 0.421\ ,\quad [d,4] = 0.131$$
$$[s,5] = 0.344\ ,\quad [d,5] = 0.115$$
$$[1]' = 0.1073$$
$$[2]' = 0.1305$$
$$[3]' = 0.2123$$

und nach Art. 36 die Gewichte

$$P(1) = P(10) = 2.84$$
$$P(2) = P(9) = 3.37$$
$$P(3) = P(8) = 3.90$$
$$P(4) = P(7) = 3.62$$
$$P(5) = P(6) = 4.36$$
$$P(m_0) = 11$$
$$P(m_1) = 9.32$$
$$P(m_2) = 7.67$$
$$P(m_3) = 4.71$$

Vergleicht man diese Gewichte mit denen, welche das erste Verfahren für $n = 11$ im Art. 34 gegeben hat, so findet man, dass alle, mit Ausnahme von $P(m_0)$, kleiner sind, was schon oben als stets stattfindend angeführt wurde. Das Gewicht $P(m_0)$ muss bei allen Verfahrungsarten dasselbe werden. Es soll nicht unerwähnt gelassen werden, dass durch die in Art. 55 eingeführte Transformation zwar die Berechnung der Unbekannten erleichtert, die Berechnung der Gewichte aber etwas weitläufiger gemacht wird.

Drittes Verfahren.

57.

Der eben abgehandelten zweiten Auflösung unserer Aufgabe schliesst sich eine besondere Auflösung an, welche sich vorzüglich zur Anwendung eignet, weil sie selbst bei einer grossen Anzahl von Unbekannten auf eine weit einfachere und kürzere Rechnung führt, als die im vorhergehenden Verfahren entwickelte Auflösung derselben Aufgabe, und weil sie ausserdem die Eigenschaft besitzt, von der Kenntniss der Grösse der Prüfungsintervalle m_0, m_1, etc. unabhängig zu sein.

Bei diesem Verfahren darf freilich die Anzahl n der Intervalle des zu berichtigenden Maassstabes keine beliebige sein, sondern muss aus einer grösseren oder kleineren Anzahl von Factoren bestehen; aber diese Bedingung beschränkt die Anwendung nur unbedeutend, da in der Regel die Maassstäbe eine solche Anzahl von Intervallen besitzen, wie hier verlangt wird. Auch könnte man sogar diese Bedingung dadurch umgehen, dass man ein oder mehrere Intervalle am Ende des Maassstabes überginge, und abgesondert von den übrigen untersuchte. Es ist ferner bei dem jetzt zu entwickelnden Verfahren von wesentlichem Belange, dass n, ausser seinen übrigen Theilern, wenigstens einmal den Theiler 2 besitze, folglich eine grade Zahl sei, obgleich stattdessen auch die Bedingung genügen könnte, dass wenigstens der Theiler 3 vorhanden wäre.

58.

Wir brauchen hier nur den einfachsten und vortheilhaftesten Fall zu betrachten, da die eben erwähnten Ausnahmen davon sich leicht aus diesem herleiten lassen. Sei daher von jetzt an n eine Zahl, wel-

che ausser anderen Primfactoren, auch irgend eine Potenz der Primzahl 2 zum Theiler besitzt, und nehmen wir an, dass die Unterschiede zwischen den Intervallen des Maassstabes, welche jedem Theiler von n entsprechen, von geeigneten Prüfungsintervallen direkt gemessen worden seien. Es sollen aber jetzt nicht alle Combinationen gemessen werden, die sich aus diesen Theilern bilden lassen, sondern nur diejenigen, welche sich an einander schliessen. Also ausser den Intervallen 0 und 1, 1 und 2, 2 und 3, u. s. w. nur 0 und 2, 2 und 4, 4 und 6, u. s. w.; ferner, wenn $\varkappa$ irgend ein Theiler ist, 0 und $\varkappa$, $\varkappa$ und $2\varkappa$, u. s. w., welche Combinationen sämmtlich, der vorausgesetzten Theilbarkeit wegen, mit den resp. Intervallen $n-1$ und n, $n-2$ und n, $n-\varkappa$ und n, u. s. w. endigen werden.

Die ursprünglichen Gleichungen, auf welche wir jetzt hingeführt werden, sind daher die folgenden:

$$-(0) + (1) + m_0 + [0]_0 = 0$$
$$-(1) + (2) + m_0 + [1]_0 = 0$$
etc. bis
$$-(n-2) + (n-1) + m_0 + [n-2]_0 = 0$$
$$-(n-1) + (n) + m_0 + [n-1]_0 = 0$$

$$-(0) + (2) + m_1 + [0]_1 = 0$$
$$-(2) + (4) + m_1 + [2]_1 = 0$$
etc. bis
$$-(n-4) + (n-2) + m_1 + [n-4]_1 = 0$$
$$-(n-2) + (n) + m_1 + [n-2]_1 = 0$$

$$-(0) + (\varkappa) + m_2 + [0]_2 = 0$$
$$-(\varkappa) + (2\varkappa) + m_2 + [\varkappa]_2 = 0$$
etc. bis
$$-(n-2\varkappa) + (n-\varkappa) + m_2 + [n-2\varkappa]_2 = 0$$
$$-(n-\varkappa) + (n) + m_2 + [n-\varkappa]_2 = 0$$

---

etc. für die übrigen Theiler bis

$$-(0) + (p) + m_{\eta-1} + [0]_{\eta-1} = 0$$
$$-(p) + (n) + m_{\eta-1} + [p]_{\eta-1} = 0$$

---

wenn wie oben $2p = n$ ist, und η die Anzahl aller vorhandenen Theiler bezeichnet.

59.

Da unter den oben eingeführten Bedingungen die Combinationen 1, 2, und p stets vorhanden sind, so kann man die, vermittelst der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate daraus folgenden Endgleichungen sogleich ansetzen, und hiebei sofort die Gleichungen für die oben benutzten Summen und Unterschiede der Theilungsfehler angeben. Seien zur Abkürzung

$$(h,0)_0 = [0]_0-[1]_0\,, \qquad (h,0)_1 = [0]_1-[2]_1$$
$$(h,1)_0 = [1]_0-[2]_0\,, \qquad (h,1)_1 = [2]_1-[4]_1$$
$$\text{etc. bis} \qquad \text{etc. bis}$$
$$(h,n-3)_0 = [n-3]_0-[n-2]_0\,, \quad (h,n-6)_1 = [n-6]_1-[n-4]_1$$
$$(h,n-2)_0 = [n-2]_0-[n-1]_0\,, \quad (h,n-4)_1 = [n-4]_1-[n-2]_1$$
$$(h,0)_{\eta-1} = [0]_{\eta-1}-[p]_{\eta-1}$$

so werden diese Endgleichungen

$$3(s,0)-(s,1)-(s,2)-(s,p) \quad -[0]_0-[0]_1-[0]_{\eta-1} + [n-1]_0+[n-2]_1+[p]_{\eta-1} = 0$$
$$-(s,0)+2(s,1)-(s,2) \quad +(h,0)_0 + (h,n-2)_0 = 0$$
$$-(s,0)-(s,1)+4(s,2)-(s,3)-(s,4) \quad +(h,1)_0+(h,0)_1 + (h,n-3)_0+(h,n-4)_1 = 0$$
$$-(s,2)+2(s,3)-(s,4) \quad +(h,2)_0 + (h,n-4)_0 = 0$$
$$-(s,2)-(s.3)+4(s,4)-(s,5)-(s,6) \quad +(h,3)_0+(h,2)_1 + (h,n-5)_0+(h,n-6)_1 = 0$$
$$\text{etc. bis}$$
$$-(s,p-4)+2(s,p-3)-(s,p-2) \quad +(h,p-4)_0 + (h,p+2)_0 = 0$$
$$-(s,p-4)-(s,p-3)+4(s,p-2)-(s,p-1)-(s,p) \quad +(h,p-3)_0+(h,p-4)_1 + (h,p+1)_0+(h,p)_1 = 0$$
$$-(s,p-2)+2(s,p-1)-(s,p) \quad +(h,p-2)_0 + (h,p)_0 = 0$$
$$-(s,0)-(s,p-2)-(s,p-1)+3(s,p) \quad +(h,p-1)_0+(h,p-2)_1+(h,0)_{\eta-1} = 0$$

wenn p eine grade Zahl ist, und bis

$$-(s,p-5)-(s,p-4)+4(s,p-3) \quad +(h,p-4)_0+(h,p-5)_1$$
$$-(s,p-2)-(s,p-1) \quad +(h,p+2)_0+(h,p+1)_1 \quad = 0$$
$$-(s,p-3)+2(s,p-2)-(s,p-1) \quad +(h,p-3)_0$$
$$+(h,p+1)_0 \quad = 0$$
$$-(s,p-3)-(s,p-2)+3(s,p-1)-(s,p) \quad +(h,p-2)_0+(h,p-3)_1$$
$$+(h,p)_0+(h,p-1)_1 \quad = 0$$
$$-(s,0) \quad -(s,p-1)+2(s,p) \quad +(h,p-1)_0+(h,0)_{\eta-1} \quad = 0$$

wenn p eine ungrade Zahl ist.

Die bezüglichen Endgleichungen für die Unterschiede sind bis auf geringe Abweichungen dieselben wie die vorstehenden, und könnten mit Angabe der Abweichungen erklärt werden; zu mehrerer Deutlichkeit sollen sie aber ebenso vollständig wie jene angeführt werden. Sie sind

$$3(d,0)-(d,1)-(d,2)-(d,p)$$
$$-2m_0-2m_1-2m_{\eta-1}-[0]_0-[0]_1-[0]_{\eta-1}$$
$$-[n-1]_0-[n-2]_1-[p]_{\eta-1} \quad = 0$$
$$-(d,0)+2(d,1)-(d,2) \quad +(h,0)_0$$
$$-(h,n-2)_0 \quad = 0$$
$$-(d,0)-(d,1)+4(d,2)-(d,3)-(d,4) \quad +(h,1)_0+(h,0)_1$$
$$-(h,n-3)_0-(h,n-4)_1 \quad = 0$$
$$-(d,2)+2(d,3)-(d,4) \quad +(h,2)_0$$
$$-(h,n-4)_0 \quad = 0$$
$$-(d,2)-(d,3)+4(d,4)-(d,5)-(d,6)+(h,3)_0+(h,2)_1$$
$$-(h,n-5)_0-(h,n-6)_1 \quad = 0$$

etc. bis

$$-(d,p-4)+2(d,p-3)-(d,p-2) \quad +(h,p-4)_0$$
$$-(h,p+2)_0 \quad = 0$$
$$-(d,p-4)-(d,p-3)+4(d,p-2)-(d,p-1)+(h,p-3)_0+(h,p-4)_1$$
$$-(h,p+1)_0-(h,p)_1 \quad = 0$$
$$-(d,p-2)+2(d,p-1) \quad +(h,p-2)_0$$
$$-(h,p)_0 \quad = 0$$

wenn p eine grade Zahl ist, und bis

$$-(d,p-5)-(d,p-4)+4(d,p-3) \quad +(h,p-4)_0+(h,p-5)_1$$
$$-(d,p-2)-(d,p-1) \quad -(h,p+2)_0-(h,p+1)_1 \quad = 0$$
$$-(d,p-3)+2(d,p-2)-(d,p-1) \quad +(h,p-3)_0$$
$$-(h,p+1)_0 \quad = 0$$
$$-(d,p-3)-(d,p-2)+5(d,p-1) \quad +(h,p-2)_0+(h,p-3)_1$$
$$-(h,p)_0-(h,p-1)_1 \quad = 0$$

wenn p eine ungrade Zahl ist.

60.

In Bezug auf den Theil der vollständigen Endgleichungen, welcher von den übrigen Theilern von n herrührt, brauchen wir nur einen derselben zu berücksichtigen, da alle diese Theiler auf analoge Gleichungen hinführen. Bezeichnen wir daher irgend einen der im vor. Art. nicht berücksichtigten Theiler von n mit λ, und führen zuerst die folgenden, den vorher eingeführten Hülfsgrössen analogen, ein

$$(h,0)_c = [0]_c - [\lambda]_c$$
$$(h,\lambda)_c = [\lambda]_c - [2\lambda]_c$$
$$(h,2\lambda)_c = [2\lambda]_c - [3\lambda]_c$$

etc. bis

$$(h,n-3\lambda)_c = [n-3\lambda]_c - [n-2\lambda]_c$$
$$(h,n-2\lambda)_c = [n-2\lambda]_c - [n-\lambda]_c$$

wo der Index c für die verschiedenen Theiler nach und nach die Werthe $2, 3 \ldots \eta-2$ annimmt, so bekommt man ohne Mühe:

$$(s,0)-(s,\lambda) \qquad -[0]_c + [n-\lambda]_c = 0$$
$$-(s,0)+2(s,\lambda)-(s,2\lambda) \qquad +(h,0)_c + (h,n-2\lambda)_c = 0$$
$$-(s,\lambda)+2(s,2\lambda)-(s,3\lambda) \qquad +(h,1)_c + (h,n-3\lambda)_c = 0$$
$$-(s,2\lambda)+2(s,3\lambda)-(s,4\lambda) + (h,2)_c + (h,n-4\lambda)_c = 0$$

etc.

und

$$(d,0)-(d,\lambda) \qquad -2m_c - [0]_c - [n-\lambda]_c = 0$$
$$-(d,0)+2(d,\lambda)-(d,2\lambda) \qquad +(h,0)_c - (h,n-2\lambda)_c = 0$$
$$-(d,\lambda)+2(d,2\lambda)-(d,3\lambda) \qquad +(h,1)_c - (h,n-3\lambda)_c = 0$$
$$-(d,2\lambda)+2(d,3\lambda)-(d,4\lambda) + (h,2)_c - (h,n-4\lambda)_c = 0$$

etc.

welche Gleichungen man fortsetzen kann, bis alle Unbekannten erschöpft sind. Da aber die letzten Gleichungen beider Systeme eine Verschiedenheit darbieten, je nachdem der Quotient $n:\lambda$ eine grade, oder ungrade Zahl ist, so sollen diese letzten Gleichungen besonders angeführt werden.

1) Wenn $n:\lambda$ eine grade Zahl ist:

$$-(s,p-3\lambda)+2(s,p-2\lambda)-(s,p-\lambda)+(h,p-3\lambda)_c + (h,p+\lambda)_c = 0$$
$$-(s,p-2\lambda)+2(s,p-\lambda)-(s,p)+(h,p-2\lambda)_c + (h,p)_c = 0$$
$$-(s,p-\lambda)+(s,p)+(h,p-\lambda) = 0$$

$$-(d,p-3\lambda)+2(d,p-2\lambda)-(d,p-\lambda)+(h,p-3\lambda)_c$$
$$-(h,p+\lambda)_c = 0$$
$$-(d,p-2\lambda)+2(d,p-\lambda)+(h,p-2\lambda)_c$$
$$-(h,p)_c = 0$$

2) wenn $n:\lambda$ eine ungrade Zahl ist:

$$-(s,p-\tfrac{5}{2}\lambda)+2(s,p-\tfrac{3}{2}\lambda)-(s,p-\tfrac{1}{2}\lambda)+(h,p-\tfrac{5}{2}\lambda)_c$$
$$+(h,p+\tfrac{1}{2}\lambda)_c = 0$$
$$-(s,p-\tfrac{3}{2}\lambda)+(s,p-\tfrac{1}{2}\lambda)+(h,p-\tfrac{3}{2}\lambda)_c$$
$$+(h,p-\tfrac{1}{2}\lambda)_c = 0$$

$$-(d,p-\tfrac{5}{2}\lambda)+2(d,p-\tfrac{3}{2}\lambda)-(d,p-\tfrac{1}{2}\lambda)+(h,p-\tfrac{5}{2}\lambda)_c$$
$$-(h,p+\tfrac{1}{2}\lambda)_c = 0$$
$$-(d,p-\tfrac{3}{2}\lambda)+3(d,p-\tfrac{1}{2}\lambda)+(h,p-\tfrac{3}{2}\lambda)_c$$
$$-(h,p-\tfrac{1}{2}\lambda)_c = 0$$

womit alle verschiedenartigen Gleichungen, welche vorkommen können, erschöpft sind.

61.

Um die vollständigen Endgleichungen zu erhalten, müssen alle mit einander correspondirenden Gleichungen des vor. und vorvor. Art. addirt werden, nemlich diejenigen Gleichungen, in welchen der positive Coefficient mit derselben Unbekannten multiplicirt ist. Man könnte diese Additionen sogleich in allgemeinen Ausdrücken vornehmen, allein es ist einfacher sie in den speciellen Fällen, die zur Ausführung kommen, auszuführen. Nur die drei ersten Gleichungen eines jeden der beiden Systeme, welche immer dieselbe Form annehmen, so wie die Gleichungen für die Prüfungsintervalle, sollen hier vollständig angegeben werden. Bezeichnet man mit λ, μ, ν, etc. alle ausser 1, 2 und p vorhandenen Theiler von n, so werden diese drei ersten Gleichungen

$$\eta(s,0)-(s,1)-(s,2)-(s,\lambda)-(s,\mu)-(s,\nu)-\text{ etc.}$$
$$-[0]_0-[0]_1-[0]_2-[0]_3-[0]_4-\text{ etc.}$$
$$+[n-1]_0+[n-2]_1+[n-\lambda]_2+[n-\mu]_3+[n-\nu]_4+\text{ etc.} = 0$$
$$-(s,0)+2(s,1)-(s,2) \qquad +(h,0)_0+(h,n-2)_0 = 0$$
$$-(s,0)-(s,1)+4(s,2)-(s,3)-(s,4)$$
$$+(h,1)_0+(h,0)_1+(h,n-3)_0+(h,n-4)_1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\eta(d,0) -(d,1) -(d,2) -(d,\lambda) -(d,\mu) -(d,\nu) - \text{etc.}\\
&\quad -2m_0 -2m_1 -2m_2 -2m_3 -2m_4 - \text{etc.}\\
&\quad -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 -[0]_3 -[0]_4 - \text{etc.}\\
&\quad -[n-1]_0 -[n-2]_1 -[n-\lambda]_2 -[n-\mu]_3 -[n-\nu]_4 - \text{etc.} = 0\\
&-(d,0) +2(d,1) -(d,2) \qquad +(h,0)_0 -(h,n-2)_0 = 0\\
&-(d,0) -(d,1) +4(d,2) -(d,3) -(d,4)\\
&\qquad +(h,1)_0 +(h,0)_1 -(h,n-3)_0 -(h,n-4)_1 = 0
\end{aligned}
$$

wo wieder η die Anzahl aller vorhandenen Theiler von n bezeichnet. Die Gleichungen für die Prüfungsintervalle sind immer

$$
\begin{aligned}
m_0 &= -\tfrac{1}{n}\left\{\{0\}'-(d,0)\right\}\\
m_1 &= -\tfrac{2}{n}\left\{\{1\}'-(d,0)\right\}\\
m_2 &= -\tfrac{\lambda}{n}\left\{\{2\}'-(d,0)\right\}\\
m_3 &= -\tfrac{\mu}{n}\left\{\{3\}'-(d,0)\right\}\\
&\text{etc. bis}\\
m_{\eta-1} &= -\tfrac{1}{2}\left\{\{\eta-1\}'-(d,0)\right\}
\end{aligned}
$$

wo $\{0\}'$, $\{1\}'$, etc. die bisherige Bedeutung haben.

62.

Ueberblickt man die im Vorhergehenden erhaltenen Endgleichungen, so wird man finden, dass die Unterschiede zwischen denen für die (s,k) und denen für die (d,k) unerheblich sind und nur in Folgendem bestehen. Die Gleichungen für die (s,k) erstrecken sich von der für $(s,0)$ bis zu der für (s,p), ihre Anzahl ist also im Ganzen $= p+1$; die Gleichungen für die (d,k) hingegen erstrecken sich nur von der für $(d,0)$ bis zu der für $(d,p-1)$, und ihre Anzahl ist also im Ganzen $= p$; ferner fallen in diesen letzteren alle Glieder, welche mit (d,p) multiplicirt sein würden, aus dem Grunde weg, weil $(d,p) = 0$ ist; ausserdem kann man bemerken, dass die Summen der völlig bekannten Glieder, welche bei den (s,k) vorkommen, sich bei den (d,k) in die Unterschiede verwandeln. Alle Gleichungen, mit Ausnahme der Gleichung für $(d,0)$, sind von den Prüfungsintervallen m_0, m_1, m_2, etc. unabhängig, während in der für $(d,0)$ die Function

$$-2m_0 -2m_1 -2m_2 - \ldots -2m_{\eta-2}$$

enthalten ist. Da aber hier, gleichwie in den vorhergehenden Verfahrungsarten, bei der Auflösung der Gleichungen von der für $(d,0)$ nicht minder als von der für $(s,0)$ ganz abgesehen werden kann, so erhält man die Theilungsfehler unabhängig von den Werthen der m_0, m_1, etc., wie oben angekündigt wurde, und kann die Berechnung dieser letztern ganz unterlassen, wenn man sie nicht aus anderen Gründen kennen lernen will.

63.

Bei der Aufstellung der Endgleichungen tritt jedoch noch ein anderer Umstand ein, welcher eine Verschiedenheit in einigen der Gleichungen für die (s,k) und die (d,k) erzeugt. Gleichwie im vorhergehenden Verfahren wird sich auch hier ereignen, dass in den nach den obigen Regeln aufgestellten Endgleichungen einige Glieder vorkommen, in denen die Unbekannten (s,k) und (d,k) ihre natürlichen Grenzen (s,p) und $(d,p-1)$ überschreiten, und daher durch die im Art. 45 erklärten Gleichungen

$$(s,k) = (s,n-k), \quad (d,k) = -(d,n-k)$$

auf solche hingeführt werden müssen, welche innerhalb der natürlichen Grenzen liegen.

Die bezeichneten Glieder gehören beim gegenwärtigen Verfahren immer dem Hauptgliede der betreffenden Gleichung, oder dem Gliede an, welches einen positiven Coefficienten hat, und bewirken, dass in der Bezug habenden Gleichung für (s,k) dieser Coefficient um Eins verkleinert, so wie in der correspondirenden Gleichung für (d,k) um Eins vergrössert wird. Diese Hinführung kommt jedesmal vor, wenn der betreffende Theiler λ so beschaffen ist, dass $\frac{n}{\lambda}$ eine ungrade Zahl ist, und für jeden solchen Theiler nur einmal. Wenn hingegen $\frac{n}{\lambda}$ eine grade Zahl ist, so kann diese Hinführung nicht eintreten.

Unter den drei verschiedenen Arten solcher Hinführung, die zufolge des Art. 48 bei der Anwendung des vorhergehenden Verfahrens stattfinden können, ist die vorstehend erklärte die einzige, welche beim gegenwärtigen Verfahren vorkommen kann.

64.

Die beiden Bedingungsgleichungen (a) und (b) des Art. 8 finden auch hier statt. Vermöge der ersten derselben wird die Summe aller Gleichungen für die (s,k) identisch Null, und es wird folglich auch wieder die Summe aller Coefficienten einer jeden dieser Gleichungen gleich Null. Multiplicirt man infolge der zweiten Bedingungsgleichung die Gleichungen für die (d,k) der Reihe nach mit den Factoren

$$p, p-1, p-2, \ldots\ldots 2, 1$$

sowie jede der Gleichungen für die m, in der Form, in welcher sie im Art. 61 aufgestellt worden sind, mit n, und addirt alle diese Produkte, so kommt man wieder auf eine identische Gleichung. Man kann also hier, gleichwie in den vorhergehenden Auflösungen unserer Aufgabe, zwei Theilungsfehler des zu berichtigenden Maassstabes willkührlich annehmen, wozu sich im Allgemeinen wieder die der beiden Endpunkte, oder $(s,0)$ und $(d,0)$ am meisten eignen.

Aber man beweist hier ebenso wie oben, dass durch die Substitutionen des Art. 49 die Grössen $(s,0)$ und $(d,0)$ aus allen Gleichungen von selbst verschwinden; man darf daher wieder in allen Fällen, welche vorkommen können, vor der Auflösung der Endgleichungen

$$(s,0) = 0, \; (d,0) = 0$$

setzen, und wenn Nebenumstände andere Bestimmungen dieser beiden Grössen verlangen, diess so wie bei dem ersten Verfahren erklärt wurde, nach der Auflösung der Endgleichungen berücksichtigen.

Wenn man die vollständigen Endgleichungen für einen bestimmten Fall aufgestellt hat, so dient die Anwendung der oben genannten Bedingungsgleichungen auf sie dazu, um überzeugt zu werden, dass bei der Aufstellung derselben keine Fehler begangen worden sind.

65.

Zur Berechnung der Summe der Fehlerquadrate kann man sich wieder des im Art. 20 erhaltenen Ausdrucks (Ω) bedienen, bei dessen Anwendung man wiederum, zufolge des eben bewiesenen Satzes,

$$(0) = 0 \text{ und } (n) = 0$$

setzen kann. Man kann aber auch stattdessen die im Art. 51 gegebene Transformation für Ω anwenden.

Auch darf man hier wieder einer jeden der oben bezeichneten Gruppen der durch die Messungen erhaltenen Grössen eine beliebige

Zahl hinzufügen, oder eine solche davon abziehen; es hat jedoch beim gegenwärtigen Verfahren die Vornahme dieser Abänderung der Messungen, auf den Verlauf der Berechnung keine solche Wirkung wie beim ersten und zweiten Verfahren, da die mit $(h,k)_c$ bezeichneten Grössen, welche hier eintreten, davon unberührt bleiben.

Zur Bestimmung der Gewichte der Unbekannten rechne man für jedes der beiden Systeme von Endgleichungen die Coefficienten $\{1,1\}$, $\{2,2\}$, $\{3,3\}$, etc. der unbestimmten Auflösung derselben; nennt man die zum ersten System gehörigen allgemein $\{k,k\}$, und die zum zweiten System gehörigen $\{k,k\}'$, so wird in den Bezeichnungen des Art. 52

$$[s,k] = \{k,k\},\ [d,k] = \{k,k\}'$$

und man kann durch die Ausdrücke des angezogenen Art. die Gewichte berechnen.

66.

Es sollen jetzt die allgemeinen Gleichungen, zur näheren Erläuterung derselben, auf einige specielle Fälle angewandt, und zuerst

$$n = 30$$

gesetzt werden. Es folgt hieraus $p = 15$ und ist also eine ungrade Zahl. Die für sich zu berücksichtigenden Theiler, so wie die Anzahl aller Theiler sind hier

$$\lambda = 3, = 5, = 6, = 10, \quad \eta = 7$$

und die durch die Messungen zu erlangenden numerischen Grössen

$$\begin{array}{l}
[0]_0,\ [1]_0,\ [2]_0,\ \ldots\ldots\ldots\ [29]_0 \\
[0]_1,\ [2]_1,\ [4]_1,\ \ldots\ldots\ldots\ [28]_1 \\
[0]_2,\ [3]_2,\ [6]_2,\ \ldots\ldots\ldots\ [27]_2 \\
[0]_3,\ [5]_3,\ [10]_3,\ \ldots\ldots\ldots\ [25]_3 \\
[0]_4,\ [6]_4,\ [12]_4,\ [18]_4,\ [24]_4 \\
[0]_5,\ [10]_5,\ [20]_5 \\
[0]_6,\ [15]_6
\end{array}$$

im Ganzen 71 Grössen.

Hieraus folgen zunächst

$$\begin{array}{ll}
(h,0)_0 = [0]_0-[1]_0\,, & (h,0)_1 = [0]_1-[2]_1 \\
(h,1)_0 = [1]_0-[2]_0\,, & (h,2)_1 = [2]_1-[4]_1 \\
(h,2)_0 = [2]_0-[3]_0\,, & (h,4)_1 = [4]_1-[6]_1 \\
\text{etc. bis} & \text{etc. bis}
\end{array}$$

$$(h,27)_0 = [27]_0-[28]_0\,,\quad (h,24)_1 = [24]_1-[26]_1$$
$$(h,28)_0 = [28]_0-[29]_0\,,\quad (h,26)_1 = [26]_1-[28]_1$$

$$(h,0)_2 = [0]_2-[3]_2\,,\quad (h,0)_3 = [0]_3-[5]_3$$
$$(h,3)_2 = [3]_2-[6]_2\,,\quad (h,5)_3 = [5]_3-[10]_3$$
$$\text{etc. bis}\quad (h,10)_3 = [10]_3-[15]_3$$
$$(h,21)_2 = [21]_2-[24]_2\,,\quad (h,15)_3 = [15]_3-[20]_3$$
$$(h,24)_2 = [24]_2-[27]_2\,,\quad (h,20)_3 = [20]_3-[25]_3$$

$$(h,0)_4 = [0]_4-[6]_4\,,\quad (h,0)_5 = [0]_5-[10]_5$$
$$(h,6)_4 = [6]_4-[12]_4\,,\quad (h,10)_5 = [10]_5-[20]_5$$
$$(h,12)_4 = [12]_4-[18]_4\,,$$
$$(h,18)_4 = [18]_4-[24]_4\,,\quad (h,0)_6 = [0]_6-[15]_6$$

Es müssen jetzt, wenn es nicht schon vorher geschehen ist, die in den Artt. 43 u. 44 erklärten einzelnen Gleichungen aufgestellt, und daraus durch Addition die vollständigen Endgleichungen zusammengesetzt werden. Bei der Aufstellung jener Gleichungen kann man sich begnügen, nur diejenigen der (s,k) hinzuschreiben, da die der (d,k) auf einfache Weise daraus folgen, auch kann man die drei ersten Gleichungen weglassen, die im Art. 61 vollständig gegeben sind; nicht minder können die völlig bekannten Glieder derselben weggelassen werden, die sich sehr leicht ergänzen lassen.

Der leichteren Uebersicht wegen sind alle diese Gleichungen der angehefteten Tafel einverleibt worden. In den vollständigen Endgleichungen ist gesetzt

$$M = m_0+m_1+m_2+m_3+m_4+m_5+m_6$$

und

$$\{0\} = -[0]_0-[0]_1-[0]_2-[0]_3-[0]_4-[0]_5-[0]_6$$
$$\{30\} = [29]_0+[28]_1+[27]_2+[25]_3+[24]_4+[20]_5+[15]_6$$
$$\{1\} = (h,0)_0$$
$$\{29\} = (h,28)_0$$
$$\{2\} = (h,1)_0+(h,0)_1$$
$$\{28\} = (h,27)_0+(h,26)_1$$
$$\{3\} = (h,2)_0 \qquad +(h,0)_2$$
$$\{27\} = (h,26)_0 \qquad +(h,24)_2$$
$$\{4\} = (h,3)_0+(h,2)_1$$
$$\{26\} = (h,25)_0+(h,24)_1$$

$$
\begin{array}{rclllllll}
\{5\} & = & (h,4)_0 & & & +(h,0)_3 & & & \\
\{25\} & = & (h,24)_0 & & & +(h,20)_3 & & & \\
\{6\} & = & (h,5)_0 & +(h,4)_1 & +(h,3)_2 & & +(h,0)_4 & & \\
\{24\} & = & (h,23)_0 & +(h,22)_1 & +(h,21)_2 & & +(h,18)_4 & & \\
\{7\} & = & (h,6)_0 & & & & & & \\
\{23\} & = & (h,22)_0 & & & & & & \\
\{8\} & = & (h,7)_0 & +(h,6)_1 & & & & & \\
\{22\} & = & (h,21)_0 & +(h,20)_1 & & & & & \\
\{9\} & = & (h,8)_0 & & +(h,6)_2 & & & & \\
\{21\} & = & (h,20)_0 & & +(h,18)_2 & & & & \\
\{10\} & = & (h,9)_0 & +(h,8)_1 & & +(h,5)_3 & & +(h,0)_5 & \\
\{20\} & = & (h,19)_0 & +(h,18)_1 & & +(h,15)_3 & & +(h,10)_5 & \\
\{11\} & = & (h,10)_0 & & & & & & \\
\{19\} & = & (h,18)_0 & & & & & & \\
\{12\} & = & (h,11)_0 & +(h,10)_1 & +(h,9)_2 & & +(h,6)_4 & & \\
\{18\} & = & (h,17)_0 & +(h,16)_1 & +(h,15)_2 & & +(h,12)_4 & & \\
\{13\} & = & (h,12)_0 & & & & & & \\
\{17\} & = & (h,16)_0 & & & & & & \\
\{14\} & = & (h,13)_0 & +(h,12)_1 & & & & & \\
\{16\} & = & (h,15)_0 & +(h,14)_1 & & & & & \\
\{15\} & = & (h,14)_0 & & +(h,12)_2 & +(h,10)_3 & & & +(h,0)_6
\end{array}
$$

so wie

$$
\begin{array}{ll}
S_0 = \{0\}+\{30\}\,, & D_0 = \{0\}-\{30\} \\
S_1 = \{1\}+\{29\}\,, & D_1 = \{1\}-\{29\} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Man kann bemerken, dass in diesen Endgleichungen drei Paare von Gleichungen vorkommen, in welchen die Coefficienten der Hauptglieder von einander verschieden sind, nemlich die Gleichungen für $(s,10)$ und $(d,10)$, für $(s,12)$ und $(d,12)$, und für $(s,14)$ und $(d,14)$. Diess rührt davon her, dass die Quotienten $30:10$, $30:6$, und $30:2$ ungrade Zahlen sind. (Vergl. Art. 63.) Da sowohl die vorstehenden Gleichungen wie die Endgleichungen so einfachen Regeln folgen, so kann man sie alle, auch ohne die oben erklärten Vorbereitungen vorzunehmen, ohne Weiteres für jeden speciellen Fall aufstellen, zumal wenn man einige Beispiele vor sich hat, die allen anderen als Leitfaden dienen können.

Die Gleichungen für die Prüfungsintervalle sind im gegenwärtigen Falle

$$m_0 = -\tfrac{1}{30}\{0\}'$$
$$m_1 = -\tfrac{1}{15}\{1\}'$$
$$m_2 = -\tfrac{1}{10}\{2\}'$$
$$m_3 = -\tfrac{1}{6}\{3\}'$$
$$m_4 = -\tfrac{1}{5}\{4\}'$$
$$m_5 = -\tfrac{1}{3}\{5\}'$$
$$m_6 = -\tfrac{1}{2}\{6\}'$$

wo wie oben $\{0\}'$ die Summe aller $[k]_0$, $\{1\}'$ die Summe aller $[k]_1$ u. s. w. bedeuten.

67.

Sei ferner

$$n = 24$$

also $p = 12$, eine grade Zahl. Es werden hier

$$\lambda = 3, = 4, = 6, = 8, \eta = 7$$

und es sind daher zu messen

$$\begin{array}{l} [0]_0,\ [1]_0,\ \ldots\ldots\ [23]_0 \\ [0]_1,\ [2]_1,\ \ldots\ldots\ [22]_1 \\ [0]_2,\ [3]_2,\ \ldots\ldots\ [21]_2 \\ [0]_3,\ [4]_3,\ \ldots\ldots\ [20]_3 \\ [0]_4,\ [6]_4,\ [12]_4,\ [18]_4 \\ [0]_5,\ [8]_5,\ [16]_5, \\ [0]_6,\ [12]_6 \end{array}$$

im Ganzen 59 Grössen. Ferner bekommt man

$$\begin{array}{ll} (h,0)_0 = [0]_0 - [1]_0\,, & (h,0)_1 = [0]_1 - [2]_1 \\ (h,1)_0 = [1]_0 - [2]_0\,, & (h,2)_1 = [2]_1 - [4]_1 \\ \text{etc. bis} & \text{etc. bis} \\ (h,21)_0 = [21]_0 - [22]_0\,, & (h,18)_1 = [18]_1 - [20]_1 \\ (h,22)_0 = [22]_0 - [23]_0\,, & (h,22)_1 = [20]_1 - [22]_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (h,0)_2 = [0]_2 - [3]_2\,, & (h,0)_3 = [0]_3 - [4]_3 \\ (h,3)_2 = [3]_2 - [6]_2\,, & (h,4)_3 = [4]_3 - [8]_3 \\ \text{etc. bis} & (h,8)_3 = [8]_3 - [12]_3 \\ (h,15)_2 = [15]_2 - [18]_2\,, & (h,12)_3 = [12]_3 - [16]_3 \\ (h,18)_2 = [18]_2 - [21]_2\,, & (h,16)_3 = [16]_3 - [20]_3 \end{array}$$

$$(h,0)_4 = [0]_4 - [6]_4, \qquad (h,0)_5 = [0]_5 - [8]_5$$
$$(h,6)_4 = [6]_4 - [12]_4, \qquad (h,8)_5 = [8]_5 - [16]_5$$
$$(h,12)_4 = [12]_4 - [18]_4,$$
$$(h,0)_6 = [0]_6 - [12]_6$$

ferner

$$\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 \\
\{24\} &= [23]_0 + [22]_1 + [21]_2 + [20]_3 + [18]_4 + [16]_5 + [12]_6 \\
\{1\} &= (h,0)_0 \\
\{23\} &= (h,22)_0 \\
\{2\} &= (h,1)_0 + (h,0)_1 \\
\{22\} &= (h,21)_0 + (h,20)_1 \\
\{3\} &= (h,2)_0 + (h,0)_2 \\
\{21\} &= (h,20)_0 + (h,18)_2 \\
\{4\} &= (h,3)_0 + (h,2)_1 + (h,0)_3 \\
\{20\} &= (h,19)_0 + (h,18)_1 + (h,16)_3 \\
\{4\} &= (h,4)_0 \\
\{19\} &= (h,18)_0 \\
\{6\} &= (h,5)_0 + (h,4)_1 + (h,3)_2 + (h,0)_4 \\
\{18\} &= (h,17)_0 + (h,16)_1 + (h,15)_2 + (h,12)_4 \\
\{7\} &= (h,6)_0 \\
\{17\} &= (h,16)_0 \\
\{8\} &= (h,7)_0 + (h,6)_1 + (h,4)_3 + (h,0)_5 \\
\{16\} &= (h,15)_0 + (h,14)_1 + (h,12)_3 + (h,8)_5 \\
\{9\} &= (h,8)_0 + (h,6)_2 \\
\{15\} &= (h,14)_0 + (h,12)_2 \\
\{10\} &= (h,9)_0 + (h,8)_1 \\
\{14\} &= (h,13)_0 + (h,12)_1 \\
\{11\} &= (h,10)_0 \\
\{13\} &= (h,12)_0 \\
\{12\} &= (h,11)_0 + (h,10)_1 + (h,9)_2 + (h,8)_3 + (h,6)_4 + (h,0)_6
\end{aligned}$$

und hieraus

$$S_0 = \{0\} + \{24\}, \quad D_0 = \{0\} - \{24\}$$
$$S_1 = \{1\} + \{23\}, \quad D_1 = \{1\} - \{23\}$$

etc. etc.

Hier kommt nur ein einziges Paar von Endgleichungen vor, in welchem der Coefficient des Hauptgliedes verschieden ist, nemlich die

Gleichungen für $(s,8)$ und $(d,8)$, da hier unter den Quotienten $n:\lambda$ der einzige $24:8$ eine ungrade Zahl ist.

Die Endgleichungen sind wieder der angehefteten Tafel einverleibt worden. Die Prüfungsintervalle bekommen jetzt die folgenden Ausdrücke

$$m_0 = -\tfrac{1}{24}\{0\}'$$
$$m_1 = -\tfrac{1}{12}\{1\}'$$
$$m_2 = -\tfrac{1}{8}\{2\}'$$
$$m_3 = -\tfrac{1}{6}\{3\}'$$
$$m_4 = -\tfrac{1}{4}\{4\}'$$
$$m_5 = -\tfrac{1}{3}\{5\}'$$
$$m_6 = -\tfrac{1}{2}\{6\}'$$

wo wieder $\{0\}'$, $\{1\}'$, etc. die mehrmals genannten Summen sind.

68.

Sei endlich noch

$$n = 12$$

woraus

$$p = 6,\ \lambda = 3, = 4,\ \eta = 5$$

folgen. Zu messen sind jetzt

$$[0]_0,\ [1]_0,\ \ldots\ [11]_0$$
$$[0]_1,\ [2]_1,\ \ldots\ [10]_1$$
$$[0]_2,\ [3]_2,\ [6]_2,\ [9]_2$$
$$[0]_3,\ [4]_3,\ [8]_3$$
$$[0]_4,\ [6]_4$$

im Ganzen 27 Grössen. Des Weiteren folgen hieraus die Ausdrücke:

$$(h,0)_0 = [0]_0 - [1]_0,\quad (h,0)_1 = [0]_1 - [2]_1$$
$$(h,1)_0 = [1]_0 - [2]_0,\quad (h,2)_1 = [2]_1 - [4]_1$$
$$\text{etc. bis}\quad (h,4)_1 = [4]_1 - [6]_1$$
$$(h,9)_0 = [9]_0 - [10]_0,\quad (h,6)_1 = [6]_1 - [8]_1$$
$$(h,10)_0 = [10]_0 - [11]_0,\quad (h,8)_1 = [8]_1 - [10]_1$$

$$
\begin{array}{ll}
(h,0)_2 = [0]_2 - [3]_2\,, & (h,0)_3 = [0]_3 - [4]_3 \\
(h,3)_2 = [3]_2 - [6]_2\,, & (h,4)_3 = [4]_3 - [8]_3 \\
(h,6)_2 = [6]_2 - [9]_2\,, & \\
 & (h,0)_4 = [0]_4 - [6]_4
\end{array}
$$

im Ganzen 27 Grössen. Ferner

$$
\begin{array}{rcllll}
\{0\} &=& -[0]_0 & -[0]_1 & -[0]_2 & -[0]_3 \; -[0]_4 \\
\{12\} &=& [11]_0 & +[10]_1 & +[9]_2 & +[8]_3 \; +[6]_4 \\
\{1\} &=& (h,0)_0 & & & \\
\{11\} &=& (h,10)_0 & & & \\
\{2\} &=& (h,1)_0 & +(h,0)_1 & & \\
\{10\} &=& (h,9)_0 & +(h,8)_1 & & \\
\{3\} &=& (h,2)_0 & & +(h,0)_2 & \\
\{4\} &=& (h,8)_0 & & +(h,6)_2 & \\
\{4\} &=& (h,3)_0 & +(h,2)_1 & & +(h,0)_3 \\
\{8\} &=& (h,7)_0 & +(h,6)_1 & & +(h,4)_3 \\
\{5\} &=& (h,4)_0 & & & \\
\{7\} &=& (h,6)_0 & & & \\
\{6\} &=& (h,5)_0 & +(h,4)_1 & +(h,3)_2 & \qquad +(h,0)_4
\end{array}
$$

$$
S_0 = \{0\} + \{12\}\,, \quad S_1 = \{1\} + \{11\}, \text{ etc.}
$$

$$
D_0 = \{0\} - \{12\}\,, \quad D_1 = \{1\} - \{11\}, \text{ etc.}
$$

und die Endgleichungen:

Erstes System.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-(s,1) & -(s,2) & -(s,3) & -(s,4) & & -(s,6) & +S_0 & = 0 \\
+2(s,1) & -(s,2) & & & & & +S_1 & = 0 \\
-(s,1) & +4(s,2) & -(s,3) & -(s,4) & & & +S_2 & = 0 \\
 & -(s,2) & +4(s,3) & -(s,4) & & -(s,6) & +S_3 & = 0 \\
 & -(s,2) & -(s,3) & +5(s,4) & -(s,5) & -(s,6) & +S_4 & = 0 \\
 & & & -(s,4) & +2(s,5) & -(s,6) & +S_5 & = 0 \\
 & & -(s,3) & -(s,4) & -(s,5) & +4(s,6) & +\{6\} & = 0
\end{array}
$$

Zweites System.

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
-(d,1) & -(d,2) & -(d,3) & -(d,4) & & -2M \; +D_0 & = 0 \\
+2(d,1) & -(d,2) & & & & +D_1 & = 0 \\
-(d,1) & +4(d,2) & -(d,3) & -(d,4) & & +D_2 & = 0 \\
 & -(d,2) & +4(d,3) & -(d,4) & & +D_3 & = 0 \\
 & -(d,2) & +(d,3) & +7(d,4) & -(d,5) & +D_4 & = 0 \\
 & & & -(d,4) & +2(d,5) & +D_5 & = 0
\end{array}
$$

in welchen

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4$$

ist. Da der Quotient 12:4 eine ungrade Zahl ist, so ist hier in den Gleichungen für $(s,4)$ und $(d,4)$ eine Verschiedenheit der Coefficienten der Hauptglieder entstanden. Für die Prüfungsintervalle ergiebt sich

$$m_0 = -\tfrac{1}{12}\{0\}'$$
$$m_1 = -\tfrac{1}{6}\{1\}'$$
$$m_2 = -\tfrac{1}{4}\{2\}'$$
$$m_3 = -\tfrac{1}{3}\{3\}'$$
$$m_4 = -\tfrac{1}{2}\{4\}'$$

wo wieder $\{0\}'$, $\{1\}'$, etc. die bekannten Summen sind.

69.

Rechnet man für dieses Beispiel auch die Gewichte der Unbekannten, so findet man, den Erklärungen des Art. 65 gemäss, auf bekannte Weise

$$[s,1] = 0.594,\ [s,2] = 0.374,\ [s,3] = 0.383$$
$$[s,4] = 0.368,\ [s,5] = 0.803,\ [s,6] = \tfrac{1}{2.33}$$
$$[d,1] = 0.584,\ [d,2] = 0.333,\ [d,3] = 0.289$$
$$[d,4] = 0.173,\ [d,5] = 0.543$$

Hieraus folgen durch die Ausdrücke des Art. 52, welche auch hier Geltung haben,

$$P(1) = P(11) = 1.70$$
$$P(2) = P(10) = 2.83$$
$$P(3) = P(9) = 2.98$$
$$P(4) = P(8) = 3.70$$
$$P(5) = P(7) = 1.50$$
$$P(6) = 4.66$$

und selbstverständlich

$$P(m_0) = 12$$
$$P(m_1) = 6$$
$$P(m_2) = 4$$
$$P(m_3) = 3$$
$$P(m_4) = 2$$

Vergleicht man diese Gewichte der Theilungsfehler mit den im Art. 56 durch das zweite Verfahren erhaltenen, so findet man im Allgemeinen nur geringe Unterschiede, nur machen $P(1)$ und $P(5)$ hievon eine Ausnahme, da sie hier wesentlich kleiner sind als dort. Diess wird bei dem gegenwärtigen Verfahren stets bei solchen Theilstrichen stattfinden, die von den Combinationen, welche die von der Eins verschiedenen Theiler von n gewähren, nicht betroffen werden; die erhaltenen Gewichte sind jedoch immer noch so gross, dass sie für annehmbar gehalten werden können.

Nachträgliche Bemerkungen.

70.

Das im Vorhergehenden entwickelte erste Verfahren verdient in allen Fällen, wo es angewandt werden kann, unbedingt vor dem zweiten und dritten den Vorzug. Nicht nur dass es den Unbekannten der Aufgabe die grösstmöglichen Gewichte zutheilt, also diese so sicher wie möglich bestimmt, sondern es führt auch selbst bei grossen Werthen von n auf sehr kurze Rechnungen, und lässt sich folglich in dieser Beziehung am leichtesten anwenden. Aber wenn die Anzahl n der Intervalle des zu berichtigenden Maassstabes wächst, so vermehren sich die auszuführenden Messungen in so grossem Maasse, (sehr nahe im Verhältniss von n^2,) dass ihre Ausführung beschwerlich wird, wenn man nicht ein Weniges von der Strenge vergeben will; wie weiter unten erklärt werden wird.

Das zweite und dritte Verfahren können in Bezug auf die Genauigkeit, welche sie gewähren, mit einander in nahe gleiche Linie gestellt werden, es besitzt aber das dritte Verfahren vor dem zweiten den Vorzug, dass es auf kürzere Rechnungen führt. Ich habe das dritte Verfahren vor vielen Jahren zu verschiedenen Malen auf den Fall $n = 60$ angewandt, und weder die Ausführung der Messungen noch die der Rechnung beschwerlich gefunden.

71.

In manchen Fällen kann man die Theilungsfehler der beiden Endstriche des zu berichtigenden Maassstabes Null machen, aber nicht immer. Wenn es sich blos darum handelt, durch die Bestimmung der Theilungsfehler die ungleichen Intervalle des Maassstabes auf ein gleiches Maass hinzuführen, und nicht verlangt wird, dass derselbe irgend ein bestimmtes Maass darstelle, z. B. Millimeter, Centimeter, u. s. w. oder Linien, Zolle u. s. w., dann können immer $(0) = 0$ und $(n) = 0$ gesetzt, und diese Annahmen schliesslich beibehalten werden. Wenn aber der zu berichtigende Maassstab ein bestimmtes Maass darstellen soll, und man zu dem Ende ausser den hier erklärten Messungen und Berechnungen auch die ganze Länge desselben mit einem anderen Maassstabe, dessen Länge genau bekannt ist, durch Hülfe eines Comparators verglichen hat, dann kann der Fehler des einen Endstriches nicht mehr gleich Null gesetzt, sondern muss dem Resultate dieser Vergleichung entsprechend angenommen werden. Bei der Berechnung der Theilungsfehler aus den in dieser Abhandlung beschriebenen Messungen kann man zwar wieder, wie oben erklärt worden ist, $(0) = 0$ und $(n) = 0$ annehmen, aber die Berücksichtigung des Resultats der Vergleichung durch den Comparator muss hierauf durch Anwendung der Sätze der Artt. 17, 18, 19 vorgenommen werden.

Andere Fälle dieser Anwendung werden auch vorkommen können, wie sich aus dem Folgenden ergeben wird.

72.

Eine wesentliche Abkürzung der Arbeit, welche die rationelle Bestimmung der Theilungsfehler eines Maassstabes, zumal bei grossen Werthen von n, verursacht, besteht darin, dass man den zu berichtigenden Maassstab zuerst in zwei oder mehrere gleiche Abtheilungen theilt, die Theilungsfehler der Endstriche derselben bestimmt, und hierauf das nemliche Verfahren auf alle Theilstriche einer jeden Abtheilung anwendet. Wäre z. B. der Maassstab durch die auf demselben angebrachten Theilstriche in 60 Intervalle getheilt, so kann man ihn

zuerst in zehn gleiche Theile theilen, unter der Annahme $n = 10$ die Theilungsfehler der Endstriche dieser Abtheilungen bestimmen, und wenn diess geschehen ist, die Bestimmung der Fehler der einzelnen Theilstriche innerhalb einer jeden dieser Abtheilungen vornehmen, wobei $n = 6$ zu setzen ist.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens muss die Bestimmung der Fehler der einzelnen Theilstriche einer jeden Abtheilung so ausgeführt werden, dass die Fehler der Endstriche die schon vorher bestimmten Werthe derselben wiederbekommen, was, nachdem man erst dieselben gleich Null gesetzt hat, gleichfalls durch die Sätze der Artt. 17, 18, 19 geschieht. Auf diese Weise kann man immer das obige erste und vollkommenste Verfahren ohne Beschwerlichkeit anwenden.

Wenn auch die Anzahl der Intervalle der Abtheilungen, welche man wählt, kein Theiler der Gesammtzahl aller auf dem Maassstabe vorhandenen Intervalle ist, so bildet diess durchaus kein Hinderniss für die Anwendung des Verfahrens. Wenn etwa der ganze Maassstab 62 statt 60 Intervalle besässe, so würde diess keine andere Veränderung bewirken, als dass bei der Bestimmung der Fehler der einzelnen Theilstriche in Bezug auf die erste oder letzte Abtheilung $n = 2$ statt $= 6$ anzunehmen wäre. Dieses Verfahren lässt überhaupt bei seiner Anwendung grosse Mannigfaltigkeit zu.

Es darf nach der Darlegung dieses Verfahrens nicht unerwähnt gelassen werden, dass durch die Anwendung desselben die Summe der Quadrate aller übrig bleibenden Fehler zwar nicht in aller Strenge ein Minimum wird, aber immer nur äusserst wenig vom Minimum abweichen kann. Es giebt übrigens ein immer anwendbares Mittel um das Minimum so nahe, wie man will, herzustellen. Dieses Mittel besteht darin, dass man der Bestimmung der Fehler der Endstriche der Abtheilungen eine grössere Anzahl von Wiederholungen der einzelnen Messungen zu Grunde legt, als der Bestimmung der Fehler der einzelnen Theilstriche. Die Gewichte jener Bestimmungen werden dadurch vergrössert, und somit das genannte Minimum vollständiger oder richtiger zu Wege gebracht.

73.

Um die verschiedenen Verwandelungen, denen bei der Anwendung des im vor. Art. beschriebenen Verfahrens die zuerst erhaltenen Werthe der Theilungsfehler unterliegen, in ein helleres Licht zu stellen, möchte ein kleines, wenngleich fingirtes, Beispiel Dienste leisten können, und es soll daher ein Maassstab beispielsweise auf diese Art berichtigt werden. Wir nehmen an, dass derselbe wie folgt eingerichtet sei.

Er sei seiner ganzen Länge nach in zwölf Centimeter getheilt, und nicht nur das erste Centimeter in Millimeter, sondern die Millimetertheilung soll auch aus zwölf Intervallen bestehen, von denen also die zwei letzten in das zweite Centimeter zu liegen kommen.

Diese zuletzt genannte Einrichtung gewährt den Vortheil, dass wenn nachher mit dem berichtigten Maassstabe eine Linie zu messen ist, deren Länge sehr nahe eine volle Anzahl von Centimetern beträgt, man weniger gebunden ist.

Sehen wir zuerst von der Millimetertheilung ab, und nehmen die Centimetertheilung vor. Da $n = 12$ ist, so soll angenommen werden, dass man zuerst den Maassstab in drei Theile getheilt, also die Fehler der Theilstriche 0, 4, 8, 12 bestimmt habe, und dass man hierauf zur Bestimmung der einzelnen Theilstriche einer jeden dieser drei Abtheilungen übergegangen sei. Die Resultate dieser Messungen sollen die folgenden Zahlenwerthe sein, in denen das Zehntel-Millimeter zur Einheit angenommen worden ist, welche Einheit auch in der ganzen Rechnung beibehalten werden soll.

Die Drittheilung des ganzen Maassstabes.

$$[0]_0 = -2.20\,,\quad [0]_1 = -1.38$$
$$[1]_0 = -1.90\,,\quad [1]_1 = -1.50$$
$$[2]_0 = -2.29$$

Die Centimeterstriche der ersten Drittheilung.

$$[0]_0 = +0.73,\quad [0]_1 = -1.78,\quad [0]_2 = +0.04$$
$$[1]_0 = +0.81,\quad [1]_1 = -1.54,\quad [1]_2 = +0.05$$
$$[2]_0 = +0.88,\quad [2]_1 = -1.70$$
$$[3]_0 = +0.73$$

Die Centimeterstriche der zweiten Drittheilung.

$[0]_0 = +0.80,\ [0]_1 = -1.63,\ [0]_2 = +0.20$
$[1]_0 = +0.90,\ [1]_1 = -1.46,\ [1]_2 = +0.30$
$[2]_0 = +0.90,\ [2]_1 = -1.58$
$[3]_0 = +0.85$

Die Centimeterstriche der dritten Drittheilung.

$[0]_0 = +0.86,\ [0]_1 = -1.74,\ [0]_2 = -0.04$
$[1]_0 = +0.66,\ [1]_1 = -1.72,\ [1]_2 = -0.19$
$[2]_0 = +0.90,\ [2]_1 = -1.79$
$[3]_0 = +0.64$

Es wird hiebei zugleich angenommen, dass die Ergebnisse der Drittheilung des ganzen Maassstabes auf einer grösseren Anzahl von einzelnen Messungen beruhen, als die anderen vorstehenden Ergebnisse.

Durch Anwendung des obigen ersten Verfahrens, und unter der Annahme, dass die Fehler der Endstriche einer jeden Abtheilung Null seien, geben die vorstehenden Messungsergebnisse die folgenden Theilungsfehler, bei welchen die Bezeichnungen 0, 1, 2, bis 12 der auf einander folgenden Centimeterstriche des Maassstabes angewandt worden sind:

$(0) = 0$
$(4) = +0.0625$
$(8) = -0.1675$
$(12) = 0$

$(0) = 0$	$(7) = -0.0165$
$(1) = +0.0775$	$(8) = 0$
$(2) = +0.0390$	$(9) = -0.0850$
$(3) = -0.0715$	$(10) = -0.0040$
$(4) = 0$	$(11) = -0.1210$
$(5) = +0.0845$	$(12) = 0$
$(6) = +0.0270$	

Unter der Annahme, dass kein Grund zur Berichtigung der beiden Endstriche des ganzen Maassstabes vorliege, bleibt die vorstehende erste Abtheilung der Theilungsfehler unverändert, aber die zweite Abtheilung muss den Resultaten der ersten gemäss verwandelt werden, um die wahren Theilungsfehler der übrigen Theilstriche zu erhalten.

Diese Verwandelung geschieht durch die Gleichung (k) des Art. 17, in welcher für (0) und (n) nach einander

$$(0) = 0 \qquad (n) = +0.0625$$
$$(0) = +0.0625, \quad (n) = -0.1675$$
$$(0) = -0.1675, \quad (n) = 0$$

gesetzt werden müssen. Man bekommt hiemit

$\delta(0) =$	0	$\delta(7) =$	-0.1101
$\delta(1) =$	$+0.0156$	$\delta(8) =$	-0.1675
$\delta(2) =$	$+0.0313$	$\delta(9) =$	-0.1257
$\delta(3) =$	$+0,0469$	$\delta(10) =$	-0.0838
$\delta(4) =$	$+0.0625$	$\delta(11) =$	-0.0419
$\delta(5) =$	$+0.0050$	$\delta(12) =$	0
$\delta(6) =$	-0.0525		

Die Addition dieser Verbesserungen zu den vorstehenden Werthen der Theilungsfehler giebt

$(0) =$	0	$(7) =$	-0.1266
$(1) =$	$+0.0931$	$(8) =$	-0.1675
$(2) =$	$+0.0703$	$(9) =$	-0.2107
$(3) =$	-0.0246	$(10) =$	-0.0878
$(4) =$	$+0.0625$	$(11) =$	-0.1629
$(5) =$	$+0.0895$	$(12) =$	0
$(6) =$	-0.0255		

welches die definitiven Theilungsfehler der Centimetertheilung sind.

74.

Gehen wir zur Millimetertheilung über, so ist wieder $n = 12$, und wir könnten daher diese Theilung eben so behandeln wie jene; um aber eine Veränderung in das Beispiel einzuführen, soll diese Theilung etwas anders behandelt werden. Zuerst soll die ganze Millimetertheilung in zwei gleiche Hälften getheilt werden, jede dieser letzteren wieder in zwei Hälften zerlegt, und darauf sollen in diesen vier Abtheilungen von je drei Intervallen die einzelnen Theilstriche vorgenommen werden. Die Resultate dieser Messungen seien:

Erste Halbirung.

$$[0]_0 = -0.16$$
$$[1]_0 = -0.34$$

Halbirung des ersten Theils derselben.

$$[0]_0 = -0.25$$
$$[1]_0 = -0.21$$

Halbirung des zweiten Theils derselben.

$$[0]_0 = +0.14$$
$$[1]_0 = -0.78$$

Das erste Viertel.

$$[0]_0 = -0.27,\quad [0]_1 = -0.34$$
$$[1]_0 = -0.25,\quad [1]_1 = +0.23$$
$$[2]_0 = +0.28$$

Zweites Viertel.

$$[0]_0 = +0.27,\quad [0]_1 = +0.43$$
$$[1]_0 = +0.08,\quad [1]_1 = -0.26$$
$$[2]_0 = -0.47$$

Drittes Viertel.

$$[0]_0 = +0.14,\quad [0]_1 = +0.53$$
$$[1]_0 = +0.18,\quad [1]_1 = +0.18$$
$$[2]_0 = -0.20$$

Viertes Viertel.

$$[0]_0 = -0.40,\quad [0]_1 = -0.06$$
$$[1]_0 = +0.18,\quad [1]_1 = -0.14$$
$$[2]_0 = -0.50$$

Es sollen hiefür die nemlichen Voraussetzungen gelten wie oben.

Die Anwendung des ersten Verfahrens auf diese Messungsergebnisse liefert, wenn auch die Millimeterstriche der Reihe nach mit 0, 1, 2, bis 12 bezeichnet, und Anfangs- und Endstrich jeder Abtheilung als fehlerfrei betrachtet werden, die Werthe

$$(0) = 0$$
$$(6) = -0.09$$
$$(12) = 0$$

$$(0) = 0\ ,\quad (6) = 0$$
$$(3) = +0.02\ ,\quad (9) = -0.46$$
$$(6) = 0\ ,\quad (12) = 0$$

(0) = 0		(7) = —0.1025	
(1) = +0.1950		(8) = —0.2425	
(2) = +0.3650		(9) = 0	
(3) = 0		(10) = +0.1650	
(4) = —0.2975		(11) = —0.2550	
(5) = —0.4175		(12) = 0	
(6) = 0			

welche mehreren Verwandlungen unterworfen werden müssen. Die erste Abtheilung bleibt wieder ungeändert, aber die zweite und dritte werden durch die Gleichung (k) des Art. 17, indem man darin $n = 2$, und einestheils

$$(0) = 0,\ (n) = -0.09$$

anderntheils

$$(0) = -0.09,\ (n) = 0$$

setzt, verwandelt. Man bekommt somit

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0 \\ \delta(3) &= -0.045 \\ \delta(6) &= -0.09 \\ \delta(9) &= -0.045 \\ \delta(12) &= 0 \end{aligned}$$

womit die zweite und dritte vorstehende Abtheilung der Theilungsfehler sich vereinigen, und in

$$\begin{aligned} (0) &= 0 \\ (3) &= -0.0250 \\ (6) &= -0.0900 \\ (9) &= -0.5050 \\ (12) &= 0 \end{aligned}$$

übergehen. Wendet man hierauf die Gleichung (k) an, indem man $n = 3$ setzt, so gehen die folgenden Correctionen hervor

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 0 & \delta(7) &= -0.2283 \\ \delta(1) &= -0.0083 & \delta(8) &= -0.3667 \\ \delta(2) &= -0.0167 & \delta(9) &= -0.5050 \\ \delta(3) &= -0.0250 & \delta(10) &= -0.3367 \\ \delta(4) &= -0.0467 & \delta(11) &= -0.1683 \\ \delta(5) &= -0.0683 & \delta(12) &= 0 \\ \delta(6) &= -0.0900 \end{aligned}$$

welche, zu den obigen Werthen der Theilungsfehler addirt, weiter ergeben:

$$\begin{array}{llll} (0) = & 0 & (7) = & -0.3308 \\ (1) = & +0.1867 & (8) = & -0.6092 \\ (2) = & +0.3483 & (9) = & -0.5050 \\ (3) = & -0.0250 & (10) = & -0.1717 \\ (4) = & -0.3442 & (11) = & -0.4233 \\ (5) = & -0.4858 & (12) = & 0 \\ (6) = & -0.0900 & & \end{array}$$

Mit diesen Werthen muss, aus dem Grunde, dass zwei Theilstriche beider Theilungen mit einander identisch sind, und folglich in jeder Theilung dieselben Fehler bekommen müssen, noch eine Verwandelung vorgenommen werden. Der erste mit 0 bezeichnete Theilstrich ist in beiden Theilungen der nemliche, und hat schon im Vorhergehenden denselben Fehler (= 0) erhalten. Der Theilstrich ferner, welcher in der Centimetertheilung mit 1 bezeichnet wurde, ist der nemliche, der in der Millimetertheilung die Bezeichnung 10 bekommen hat, und der Fehler desselben ist, wie nicht anders sein konnte, durch die vorhergehende Rechnung für die beiden Theilungen verschieden ausgefallen. Der für die Millimetertheilung erhaltene Werth dieses Fehlers muss auf denjenigen, welcher sich für die Centimetertheilung ergeben hat, zurückgeführt werden, und dazu dienen die Gleichungen des Art. 19. Für unser Beispiel muss zu dem Ende in diesen Gleichungen

$$n = 12, \quad \begin{array}{lll} c = 0, & (c) = 0, & (\gamma) = 0 \\ e = 10, & (e) = +0.0931, & (\varepsilon) = -0.1717 \end{array}$$

gesetzt werden, woraus sich zunächst

$$C = 0, \; E = +0.02648$$

ergeben. Aus der Gleichung (k') des angezogenen Art. folgen nun

$$\begin{array}{llll} \delta'(0) = & 0 & \delta'(7) = & +0.1854 \\ \delta'(1) = & +0.0265 & \delta'(8) = & +0.2119 \\ \delta'(2) = & +0.0530 & \delta'(9) = & +0.2384 \\ \delta'(3) = & +0.0795 & \delta'(10) = & +0.2648 \\ \delta'(4) = & +0.1059 & \delta'(11) = & +0.2913 \\ \delta'(5) = & +0.1324 & \delta'(12) = & +0.3178 \\ \delta'(6) = & +0.1589 & & \end{array}$$

durch deren Anbringung an die zuletzt erhaltenen Theilungsfehler man

(0) =	0	(7) =	−0.1454
(1) =	+0.2132	(8) =	−0.3973
(2) =	+0.4013	(9) =	−0.2666
(3) =	+0.0545	(10) =	+0.0931
(4) =	−0.2383	(11) =	−0.1320
(5) =	−0.3534	(12) =	+0.3178
(6) =	+0.0689		

erhält, welches die definitiven Theilungsfehler der Millimetertheilung sind.

Wenn man auch die Werthe der m_0, m_1, etc. kennen lernen will, so sind die Verwandlungen der zuerst erhaltenen Werthe derselben auf ähnliche Weise auszuführen.

75.

Es ist schon oben darauf aufmerksam gemacht worden, dass die in diesem Abschnitte erklärten Verfahrungsarten in sofern nicht vollkommen strenge sind, als sie die Summe aller übrigbleibenden Fehlerquadrate nicht streng zum Minimum machen; es ist jedoch ein Mittel angegeben worden, durch dessen Anwendung man die genannte Summe ihrem Minimum so nahe bringen kann, wie man will. Man kann aber auch anders verfahren, denn Nichts hindert, die hier erklärten Verfahrungsarten einer strengen Auflösung zu unterwerfen, durch welche die genannte Summe sofort ein Minimum wird. Je nachdem man den Maassstab in zwei oder mehrere gleiche Haupttheile theilt, wird das strenge Verfahren etwas anders ausfallen, und es werden unter diesen Umständen sich verschiedene Verfahrungsarten bilden, welche alle eine Aehnlichkeit mit einander sowohl wie mit dem ersten Verfahren haben, und die man daher Varianten des ersten Verfahrens nennen kann.

Es ist nicht meine Absicht alle diese Verfahren hier ausführlich zu entwickeln, sondern es soll nur eines derselben ausführlich dargestellt werden, und zwar dasjenige, welches sich auf den Fall bezieht, dass man den Maassstab in zwei gleiche Hauptabtheilungen zerlegt habe; es ist hierauf mit keinen Schwierigkeiten verknüpft, auch andere Varianten des ersten Verfahrens zu entwickeln.

Variante zum ersten Verfahren.

76.

Es soll angenommen werden, dass man den zu berichtigenden Maassstab zunächst in zwei gleiche Theile getheilt, und von den Intervallen beider Abtheilungen abgesondert alle Combinationen zu je zweien gemessen, oder mit anderen Worten mit einem passenden Prüfungsintervall verglichen habe: die Prüfungsintervalle, welche man in jeder Abtheilung benutzt hat, sollen dieselben sein. Es setzt diess voraus, dass die Anzahl aller Intervalle des Maassstabes eine grade Zahl sei, was gemeiniglich der Fall ist; sollte indess diese Anzahl eine ungrade Zahl sein, so kann man vorläufig das eine Endintervall weglassen, und nach ausgeführter Berichtigung der übrigen Intervalle, nach dem hier zu entwickelnden Verfahren, dasselbe durch besondere Messungen bestimmen. Bezeichnen wir die Anzahl aller Intervalle des zu berichtigenden Maassstabes mit $2n$, so bekommen wir für die erste Abtheilung die nemlichen ursprünglichen Gleichungen, welche im Art. 7 angegeben worden sind; wobei aber zu bemerken ist, dass die letzte dieser Gleichungen nicht weggelassen werden darf, da sie im gegenwärtigen Falle auf keine Unbestimmtheit hinführt. Die ursprünglichen Gleichungen, welche die zweite Abtheilung liefert, haben genau dieselbe Form, wie die eben genannten, nur müssen in ihnen alle eingeklammerten Indices um die Zahl n vergrössert werden.

Aus diesen Erklärungen entnimmt man leicht, dass im gegenwärtigen Falle die erste Reihe der ursprünglichen Gleichungen die folgenden enthält:

$$-(0)+(1)+m_0+[0]_0=0$$
$$-(1)+(2)+m_0+[1]_0=0$$
etc. bis
$$-(2n-2)+(2n-1)+m_0+[2n-2]_0=0$$
$$-(2n-1)+(2n)+m_0+[2n-1]_0=0$$

Die zweite Reihe besteht aus

$$-(0)+(2)+m_1+[0]_1=0$$
$$-(1)+(3)+m_1+[1]_1=0$$
$$-(2)+(4)+m_1+[2]_1=0$$
etc.

$$
\begin{array}{llllll}
-(n-3) & +(n-1) & +m_1 & +[n-3]_1 & = 0 \\
-(n-2) & +\ (n) & +m_1 & +[n-2]_1 & = 0 \\
-\ (n) & +(n+2) & +m_1 & +\ [n]_1 & = 0 \\
-(n+1) & +(n+3) & +m_1 & +[n-1]_1 & = 0
\end{array}
$$

etc. bis

$$
\begin{array}{llllll}
-(2n-4) & +(2n-2) & +m_1 & +[2n-4]_1 & = 0 \\
-(2n-3) & +(2n-1) & +m_1 & +[2n-3]_1 & = 0 \\
-(2n-2) & +\ (2n) & +m_1 & +[2n-2]_1 & = 0
\end{array}
$$

wozu bemerkt werden mag, dass eine Lücke vorhanden ist, indem die Combination $(n-1),(n+1)$ und dem entsprechend die Messungsgrösse $[n-1]_1$ nicht vorkommt. In der dritten Reihe werden zwei Combinationen, nemlich $(n-2),(n+1)$ und $(n-1),(n+2)$ nebst den Messungsgrössen $[n-2]_2$ und $[n-1]_2$ fehlen, u. s. w. Die beiden letzten Reihen sind

$$
\begin{array}{llllll}
-\ (0) & +(n-1) & +m_{n-2} & +\ [0]_{n-2} & = 0 \\
-\ (1) & +\ (n) & +m_{n-2} & +\ [1]_{n-2} & = 0 \\
-\ (n) & +(2n-1) & +m_{n-2} & +\ [n]_{n-2} & = 0 \\
-(n+1) & +\ (2n) & +m_{n-2} & +[n+1]_{n-2} & = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
-\ (0) & +\ (n) & +m_{n-1} & +\ [0]_{n-1} & = 0 \\
-\ (n) & +\ (2n) & +m_{n-1} & +\ [n]_{n-1} & = 0
\end{array}
$$

Nach den vorstehenden Andeutungen kann man die ursprünglichen Gleichungen für irgend einen bestimmten Werth von n leicht vollständig hinschreiben. Es lässt sich übrigens die Aufeinanderfolge dieser Gleichungen graphisch anschaulich machen.

Repräsentirt man sie durch die in denselben enthaltenen völlig bekannten, durch die angestellten Messungen erhaltenen Glieder, so kann man sie für jeden bestimmten Werth von n durch zwei Dreiecke, in Form der Trigonalzahlen, darstellen. Z. B. für $n = 4$ kann man sie wie folgt stellen:

$$
\begin{array}{cccccccc}
[0]_0, & [1]_0, & [2]_0, & [3]_0, & [4]_0, & [5]_0, & [6]_0, & [7]_0 \\
[0]_1, & [1]_1, & [2]_1, & & [4]_1, & [5]_1, & [6]_1 & \\
[0]_2, & [1]_2 & & & [4]_2, & [5]_2 & & \\
[0]_3 & & & & [4]_3 & & &
\end{array}
$$

für jeden anderen Werth von n wird man dieselbe Figur, in grösseren oder kleineren Dimensionen, wiedererhalten.

77.

Die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate führt, indem man wieder alle Gewichte aus den früher angegebenen Gründen $= 1$ setzt, auf die folgenden Endgleichungen:

$$n(0) -(1) -(2)- \dots -(n-1) -(n)$$
$$-m_0 -m_1 -m_2 - \dots -m_{n-2}-m_{n-1} \quad +\{0\} = 0$$
$$-(0) +n(1) -(2)- \dots -(n-1) -(n)$$
$$-m_1 -m_2 - \dots -m_{n-2} \quad +\{1\} = 0$$

etc.

$$-(0) -(1) -(2)- \dots +n(n-1)-(n)$$
$$+m_1 +m_2 + \dots +m_{n-2} \quad +\{n-1\} = 0$$
$$-(0) -(1) -(2)- \dots -(n-1)+2n(n)$$
$$-(n+1)-(n+2)- \dots -(2n-1)-(2n)+\{n\} = 0$$
$$-(n)+n(n+1)-(n+2) \dots -(2n-1)-(2n)$$
$$-m_1 -m_2 - \dots -m_{n-2} \quad +\{n+1\} = 0$$

etc. bis

$$-(n)-(n+1) -(n+2)- \dots +n(2n-1)-(2n)$$
$$+m_1 +m_2+ \dots +m_{n-2} \quad +\{2n-1\} = 0$$
$$-(n)-(n+1) -(n+2)- \dots -(2n-1)+n(2n)$$
$$+m_0 +m_1 +m_2+ \dots +m_{n-2}+m_{n-1} \quad +\{2n\} = 0$$

$$-\{(0)-(2n)\} \quad +2nm_0+\{0\}' = 0$$
$$-\{(0)-(2n)\}-\{(1)-(2n-1)\}+\{(n-1)-(n+1)\}+2(n-1)m_1+\{1\}' = 0$$
$$-\{(0)-(2n)\}-\{(1)-(2n-1)\}-\{(2)-(2n-2)\}$$
$$+\{(n-2)-(n+2)\}+\{(n-1)-(n+1)\}+2(n-2)m_2+\{2\}' = 0$$

etc. bis

$$-\{(0)-(2n)\}-\{(1)-(2n-1)\}-\{(2)-(2n-2)\}$$
$$+\{(n-2)-(n+2)\}+\{(n-1)-(n+1)\}+ 6m_{n-3}+\{n-3\}' = 0$$
$$-\{(0)-(2n)\}-\{(1)-(2n-1)\}+\{(n-1)-(n+1)\}+ 4m_{n-2}+\{n-2\}' = 0$$
$$-\{(0)-(2n)\} \quad + 2m_{n-1}+\{n-1\}' = 0$$

78.

Die Form der ersten Abtheilung dieser Gleichungen ist eine eigenthümliche, welche man durch graphische Darstellungen, die sich auf bestimmte Werthe von n beziehen, anschaulich machen kann.

Der Theil derselben, welcher die Theilungsfehler enthält, bildet immer eine aus zwei Quadraten bestehende Figur, die in dem einen ihrer Winkel aneinanderstossen, und miteinander zu einem Ganzen verbunden sind. Der Theil hingegen, der die Prüfungsintervalle enthält, bildet vier gleichschenkelige Dreiecke, welche einander theils ihre Grundlinien, theils die gegenüberliegenden Winkel zukehren; zwei dieser Dreiecke sind einander gleich, während die beiden anderen, zwar auch einander gleich, aber eine Stufe kleiner sind als jene. Da diese Dreiecke sich anders gestalten, je nachdem n eine grade oder eine ungrade Zahl ist, so wollen wir sie, um an der Deutlichkeit Nichts vermissen zu lassen, für beide Fälle aufstellen.

Für $n = 6$ sind die von den Theilungsfehlern abhängigen Glieder unserer Gleichungen:

$$6(0) -(1) -(2) -(3) -(4) -(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$
$$-(0) +6(1) -(2) -(3) -(4) -(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$
$$-(0) -(1) +6(2) -(3) -(4) -(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$
$$-(0) -(1) -(2) +6(3) -(4) -(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 4)$$
$$-(0) -(1) -(2) -(3) +6(4) -(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 5)$$
$$-(0) -(1) -(2) -(3) -(4) +6(5) -(6) \ldots\ldots\ldots \quad 6)$$
$$-(0) -(1) -(2) -(3) -(4) -(5) +12(6) -(7) -(8) -(9) -(10) -(11) -(12)$$
$$8) \ldots\ldots\ldots -(6) +6(7) -(8) -(9) -(10) -(11) -(12)$$
$$9) \ldots\ldots\ldots -(6) -(7) +6(8) -(9) -(10) -(11) -(12)$$
$$10) \ldots\ldots\ldots -(6) -(7) -(8) +6(9) -(10) -(11) -(12)$$
$$11) \ldots\ldots\ldots -(6) -(7) -(8) -(9) +6(10) -(11) -(12)$$
$$12) \ldots\ldots\ldots -(6) -(7) -(8) -(9) -(10) +6(11) -(12)$$
$$13) \ldots\ldots\ldots -(6) -(7) -(8) -(9) -(10) -(11) +6(12)$$

zu deren Vervollständigung noch die folgenden Glieder hinzukommen, welche bis auf die völlig bekannten Glieder von den Prüfungsintervallen abhängen:

$$1)\quad -m_0 -m_1 -m_2 -m_3 -m_4 -m_5 + \{0\} = 0$$
$$2)\quad -m_1 -m_2 -m_3 -m_4 + \{1\} = 0$$
$$3)\quad -m_2 -m_3 + \{2\} = 0$$
$$4)\quad \text{keine } m + \{3\} = 0$$
$$5)\quad +m_2 +m_3 + \{4\} = 0$$
$$6)\quad +m_1 +m_2 +m_3 +m_4 + \{5\} = 0$$
$$7)\quad \text{keine } m + \{6\} = 0$$
$$8)\quad -m_1 -m_2 -m_3 -m_4 + \{7\} = 0$$
$$9)\quad -m_2 -m_3 + \{8\} = 0$$
$$10)\quad \text{keine } m + \{9\} = 0$$
$$11)\quad +m_2 +m_3 + \{10\} = 0$$
$$12)\quad +m_1 +m_2 +m_3 +m_4 + \{11\} = 0$$
$$13)\quad +m_0 +m_1 +m_2 +m_3 +m_4 +m_5 + \{12\} = 0$$

Für $n = 5$ stehen die entsprechenden Gleichungen wie folgt:

$$5(0) - (1) - (2) - (3) - (4) - (5) \ldots\ldots\ldots (1$$
$$-(0) + 5(1) - (2) - (3) - (4) - (5) \ldots\ldots\ldots (2$$
$$-(0) - (1) + 5(2) - (3) - (4) - (5) \ldots\ldots\ldots (3$$
$$-(0) - (1) - (2) + 5(3) - (4) - (5) \ldots\ldots\ldots (4$$
$$-(0) - (1) - (2) - (3) + 5(4) - (5) \ldots\ldots\ldots (5$$
$$-(0) - (1) - (2) - (3) - (4) + 10(5) - (6) - (7) - (8) - (9) - (10)$$
$$7) \ldots\ldots\ldots - (5) + 5(6) - (7) - (8) - (9) - (10)$$
$$8) \ldots\ldots\ldots - (5) - (6) + 5(7) - (8) - (9) - (10)$$
$$9) \ldots\ldots\ldots - (5) - (6) - (7) + 5(8) - (9) - (10)$$
$$10) \ldots\ldots\ldots - (5) - (6) - (7) - (8) + 5(9) - (10)$$
$$11) \ldots\ldots\ldots - (5) - (6) - (7) - (8) - (9) + 5(10)$$

$$1)\quad -m_0 - m_1 - m_2 - m_3 - m_4 + \{0\} = 0$$
$$2)\quad -m_1 - m_2 - m_3 + \{1\} = 0$$
$$3)\quad -m_2 + \{2\} = 0$$
$$4)\quad +m_2 + \{3\} = 0$$
$$5)\quad +m_1 + m_2 + m_3 + \{4\} = 0$$
$$6)\quad \text{keine } m \quad + \{5\} = 0$$
$$7)\quad -m_1 - m_2 - m_3 + \{6\} = 0$$
$$8)\quad -m_2 + \{7\} = 0$$
$$9)\quad +m_2 + \{8\} = 0$$
$$10)\quad +m_1 + m_2 + m_3 + \{9\} = 0$$
$$11)\quad +m_0 + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \{10\} = 0$$

Auch diese Formen wiederholen sich für andere entsprechende Werthe von n, bez. in grösseren oder kleineren Dimensionen.

Die völlig bekannten Glieder der Endgleichungen sind im Allgemeinen durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

$$\{0\} = -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - \ldots - [0]_{n-1}$$
$$\{1\} = [0]_0 - [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - \ldots - [1]_{n-2}$$
$$\{2\} = [1]_0 + [0]_1 - [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - \ldots - [2]_{n-3}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\{2n-2\} = [2n-3]_0 + [2n-4]_1 + \ldots + [n]_{n-3} - [2n-2]_0 - [2n-2]_1$$
$$\{2n-1\} = [2n-2]_0 + [2n-3]_1 + \ldots + [n]_{n-2} - [2n-1]_0$$
$$\{2n\} = [2n-1]_0 + [2n-2]_1 + \ldots + [n]_{n-1}$$

$$\{0\}' = [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + \ldots + [2n-1]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + \ldots + [n-2]_1 + [n]_1 + \ldots + [2n-2]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + \ldots + [n-3]_2 + [n]_2 + \ldots + [2n-3]_2$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$
$$\{n-2\}' = [0]_{n-2} + [1]_{n-2} + [n]_{n-2} + [n+1]_{n-2}$$
$$\{n-1\}' = [0]_{n-1} + [n]_{n-1}$$

Die einfache und regelmässige Fortschreitung in der Zusammensetzung der ersten Abtheilung dieser Grössen erkennt man am leichtesten, wenn man die Ausdrücke für einige specielle Werthe von n vor sich hat, weshalb solche unten angegeben werden sollen. Die Grössen $\{0\}'$, $\{1\}'$ $\{2\}'$, etc. können wieder durch das im Art. 24 erklärte Verfahren jede für sich gleich Null gemacht werden.

Zwischen den vorstehend aufgeführten, völlig bekannten Grössen finden hier die beiden folgenden Bedingungsgleichungen statt,

$$(a)\ 0 = \{0\}+\{1\}+\{2\}+\ldots+\{2n\}$$

$$(b)\ 0 = n\big\{\{0\}-\{2n\}\big\}+(n-1)\big\{\{1\}-\{2n-1\}\big\}+(n-2)\big\{\{2\}-\{2n-2\}\big\}+\ldots$$
$$+\{0\}'+2\{1\}'+3\{2\}'+\ldots+(n-2)\{n-3\}'+(n-1)\{n-2\}'+n\{n-1\}'$$

welche denen des Art. 8 analog sind.

79.

Es sollen hier sogleich die Ausdrücke der völlig bekannten Glieder der Endgleichungen des vor. Art. für einige specielle Werthe von $2n$ oder n ausgeschrieben werden.

$$n = 8.$$

$$\{0\}' = [0]_0+[1]_0+[2]_0+[3]_0+[4]_0+[5]_0+[6]_0+[7]_0$$
$$+[8]_0+[9]_0+[10]_0+[11]_0+[12]_0+[13]_0+[14]_0+[15]_0$$
$$\{1\}' = [0]_1+[1]_1+[2]_1+[3]_1+[4]_1+[5]_1+[6]_1$$
$$+[8]_1+[9]_1+[10]_1+[11]_1+[12]_1+[13]_1+[14]_1$$
$$\{2\}' = [0]_2+[1]_2+[2]_2+[3]_2+[4]_2+[5]_2$$
$$+[8]_2+[9]_2+[10]_2+[11]_2+[12]_2+[13]_2$$
$$\{3\}' = [0]_3+[1]_3+[2]_3+[3]_3+[4]_3$$
$$+[8]_3+[9]_3+[10]_3+[11]_3+[12]_3$$
$$\{4\}' = [0]_4+[1]_4+[2]_4+[3]_4+[8]_4+[9]_4+[10]_4+[11]_4$$
$$\{5\}' = [0]_5+[1]_5+[2]_5+[8]_5+[9]_5+[10]_5$$
$$\{6\}' = [0]_6+[1]_6+[8]_6+[9]_6$$
$$\{7\}' = [0]_7+[8]_7$$

$$\{0\} = -[0]_0-[0]_1-[0]_2-[0]_3-[0]_4-[0]_5-[0]_6-[0]_7$$
$$\{1\} = [0]_0$$
$$-[1]_0-[1]_1-[1]_2-[1]_3-[1]_4-[1]_5-[1]_6$$
$$\{2\} = [1]_0+[0]_1$$
$$-[2]_0-[2]_1-[2]_2-[2]_3-[2]_4-[2]_5$$
$$\{3\} = [2]_0+[1]_1+[0]_2$$
$$-[3]_0-[3]_1-[3]_2-[3]_3-[3]_4$$
$$\{4\} = [3]_0+[2]_1+[1]_2+[0]_3$$
$$-[4]_0-[4]_1-[4]_2-[4]_3$$

$$\begin{aligned}
\{5\} &= [4]_0 + [3]_1 + [2]_2 + [1]_3 + [0]_4 \\
&\quad - [5]_0 - [5]_1 - [5]_2 \\
\{6\} &= [5]_0 + [4]_1 + [3]_2 + [2]_3 + [1]_4 + [0]_5 \\
&\quad - [6]_0 - [6]_1 \\
\{7\} &= [6]_0 + [5]_1 + [4]_2 + [3]_3 + [2]_4 + [1]_5 + [0]_6 \\
&\quad - [7]_0 \\
\{8\} &= [7]_0 + [6]_1 + [5]_2 + [4]_3 + [3]_4 + [2]_5 + [1]_6 + [0]_7 \\
&\quad - [8]_0 - [8]_1 - [8]_2 - [8]_3 - [8]_4 - [8]_5 - [8]_6 - [8]_7 \\
\{9\} &= [8]_0 \\
&\quad - [9]_0 - [9]_1 - [9]_2 - [9]_3 - [9]_4 - [9]_5 - [9]_6 \\
\{10\} &= [9]_0 + [8]_1 \\
&\quad - [10]_0 - [10]_1 - [10]_2 - [10]_3 - [10]_4 - [10]_5 \\
\{11\} &= [10]_0 + [9]_1 + [8]_2 \\
&\quad - [11]_0 - [11]_1 - [11]_2 - [11]_3 - [11]_4 \\
\{12\} &= [11]_0 + [10]_1 + [9]_2 + [8]_3 \\
&\quad - [12]_0 - [12]_1 - [12]_2 - [12]_3 \\
\{13\} &= [12]_0 + [11]_1 + [10]_2 + [9]_3 + [8]_4 \\
&\quad - [13]_0 - [13]_1 - [13]_2 \\
\{14\} &= [13]_0 + [12]_1 + [11]_2 + [10]_3 + [9]_4 + [8]_5 \\
&\quad - [14]_0 - [14]_1 \\
\{15\} &= [14]_0 + [13]_1 + [12]_2 + [11]_3 + [10]_4 + [9]_5 + [8]_6 \\
&\quad - [15]_0 \\
\{16\} &= [15]_0 + [14]_1 + [13]_2 + [12]_3 + [11]_4 + [10]_5 + [9]_6 + [8]_7
\end{aligned}$$

$$n = 7.$$

$$\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 + [1]_0 + [2]_0 + [3]_0 + [4]_0 + [5]_0 + [6]_0 \\
&\quad + [7]_0 + [8]_0 + [9]_0 + [10]_0 + [11]_0 + [12]_0 + [13]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 + [1]_1 + [2]_1 + [3]_1 + [4]_1 + [5]_1 \\
&\quad + [7]_1 + [8]_1 + [9]_1 + [10]_1 + [11]_1 + [12]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 + [1]_2 + [2]_2 + [3]_2 + [4]_2 \\
&\quad + [7]_2 + [8]_2 + [9]_2 + [10]_2 + [11]_2 \\
\{3\}' &= [0]_3 + [1]_3 + [2]_3 + [3]_3 \\
&\quad + [7]_3 + [8]_3 + [9]_3 + [10]_3 \\
\{4\}' &= [0]_4 + [1]_4 + [2]_4 + [7]_4 + [8]_4 + [9]_4 \\
\{5\}' &= [0]_5 + [1]_5 + [7]_5 + [8]_5 \\
\{6\}' &= [0]_6 + [7]_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 - [0]_1 - [0]_2 - [0]_3 - [0]_4 - [0]_5 - [0]_6 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
&\quad - [1]_0 - [1]_1 - [1]_2 - [1]_3 - [1]_4 - [1]_5 \\
\{2\} &= [1]_0 + [0]_1 \\
&\quad - [2]_0 - [2]_1 - [2]_2 - [2]_3 - [2]_4 \\
\{3\} &= [2]_0 + [1]_1 + [0]_2 \\
&\quad - [3]_0 - [3]_1 - [3]_2 - [3]_3 \\
\{4\} &= [3]_0 + [2]_1 + [1]_2 + [0]_3 \\
&\quad - [4]_0 - [4]_1 - [4]_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 -[0]_3 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
&\quad -[1]_0 -[1]_1 -[1]_2 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 \\
&\quad -[2]_0 -[2]_1 \\
\{3\} &= [2]_0 +[1]_1 +[0]_2 \\
&\quad -[3]_0 \\
\{4\} &= [3]_0 +[2]_1 +[1]_2 +[0]_3 \\
&\quad -[4]_0 -[4]_1 -[4]_2 -[4]_3 \\
\{5\} &= [4]_0 \\
&\quad -[5]_0 -[5]_1 -[5]_2 \\
\{6\} &= [5]_0 +[4]_1 \\
&\quad -[6]_0 -[6]_1 \\
\{7\} &= [6]_0 +[5]_1 +[4]_2 \\
&\quad -[7]_0 \\
\{8\} &= [7]_0 +[6]_1 +[5]_2 +[4]_3
\end{aligned}
$$

$n = 3.$

$$
\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 +[1]_0 +[2]_0 +[3]_0 +[4]_0 +[5]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 +[1]_1 +[3]_1 +[4]_1 \\
\{2\}' &= [0]_2 +[3]_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 -[0]_2 \\
\{1\} &= [0]_0 \\
&\quad -[1]_0 -[1]_1 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 \\
&\quad -[2]_0 \\
\{3\} &= [2]_0 +[1]_1 +[0]_2 \\
&\quad -[3]_0 -[3]_1 -[3]_2 \\
\{4\} &= [3]_0 \\
&\quad -[4]_0 -[4]_1 \\
\{5\} &= [4]_0 +[3]_1 \\
&\quad -[5]_0 \\
\{6\} &= [5]_0 +[4]_1 +[3]_2
\end{aligned}
$$

$n = 2.$

$$
\begin{aligned}
\{0\}' &= [0]_0 +[1]_0 +[2]_0 +[3]_0 \\
\{1\}' &= [0]_1 +[2]_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{0\} &= -[0]_0 -[0]_1 \\
\{1\} &= [0]_0 -[1]_0 \\
\{2\} &= [1]_0 +[0]_1 -[2]_0 -[2]_1 \\
\{3\} &= [2]_0 -[3]_0 \\
\{4\} &= [3]_0 +[2]_1
\end{aligned}
$$

80.

Zur Auflösung der im Art. 77 erhaltenen Endgleichungen führen wir zunächst die Hülfsgrössen

$$
\begin{array}{ll}
S_0 = \{0\} + \{2n\} \quad , & (s,0) = (0) + (2n) \\
S_1 = \{1\} + \{2n-1\} \, , & (s,1) = (1) + (2n-1) \\
S_2 = \{2\} + \{2n-1\} \, , & (s,2) = (2) + (2n-2) \\
\text{etc. bis} & \text{etc. bis} \\
S_{n-1} = \{n-1\}+\{n+1\} \, , & (s,n-1) = (n-1)+(n+1) \\
S_n = 2\{n\} \, , & (s,n) = 2(n)
\end{array}
$$

ein, durch welche die erste Abtheilung der Endgleichungen sich in die folgenden Gleichungen verwandeln lässt:

$$
\begin{array}{l}
n(s,0)-(s,1) \ -(s,2) - \ldots \qquad -(s,n) + S_0 \ = 0 \\
-(s,0)+n(s,1) \ -(s,2) - \ldots \qquad -(s,n) + S_1 \ = 0 \\
-(s,0)-(s,1) \ +n(s,2) - \ldots \qquad -(s,n) + S_2 \ = 0 \\
\text{etc. bis} \\
-(s,0) \ -(s,1) \ -(s,2) - \ldots \ +n(s,n-1) \ -(s,n) + S_{n-1} = 0 \\
-(s,0) \ -(s,1) \ -(s,2) - \ldots \ -(s,n-1) \ +n(s,n) + \tfrac{1}{2}S_n = 0
\end{array}
$$

welche für sich bestehen. Man findet aber leicht durch Zuziehung der Bedingungsgleichung (a) des Art. 78, dass jede derselben in den übrigen enthalten ist, und dass folglich zur vollständigen Bestimmung aller Unbekannten eine derselben im Voraus als gegeben angesehen werden muss. Es soll für diese wieder $(s,0)$ angenommen werden. Zieht man nun die erste der vorstehenden Gleichungen nach und nach von allen übrigen ab, so bekommt man sogleich

$$
\begin{array}{l}
(s,1) = (s,0) + \frac{S_0-S_1}{n+1} \\
(s,2) = (s,0) + \frac{S_0-S_2}{n+1} \\
(s,3) = (s,0) + \frac{S_0-S_3}{n+1} \\
\text{etc. bis} \\
(s,n-1) = (s,0) + \frac{S_0-S_{n-1}}{n+1} \\
(s,n) = (s,0) + \frac{S_0-\frac{1}{2}S_n}{n+1}
\end{array}
$$

womit unsere Gleichungen aufgelöst sind.

81.

Führen wir ferner die folgenden Hülfsgrössen ein:

$$\begin{array}{ll}
D_0 = \{0\}-\{2n\} \;, & (d,0) = (0)-(2n) \\
D_1 = \{1\}-\{2n-1\} \;, & (d,1) = (1)-(2n-1) \\
D_2 = \{2\}-\{2n-2\} \;, & (d,2) = (2)-(2n-2) \\
\text{etc. bis} & \text{etc. bis} \\
D_{n-2} = \{n-2\}-\{n+2\} \;, & (d,n-2) = (n-2)-(n+2) \\
D_{n-1} = \{n-1\}-\{n+1\} \;, & (d,n-1) = (n-1)-(n+1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
l_0 = m_0 + m_{n-1} \;, & K_0 = \{0\}' + n\{n-1\}' \\
l_1 = m_1 + m_{n-2} \;, & K_1 = 2\{1\}' + (n-1)\{n-2\}' \\
l_2 = m_2 + m_{n-3} \;, & K_2 = 3\{2\}' + (n-2)\{n-3\}' \\
\text{etc. bis} & \text{etc. bis} \\
l_{p-2} = m_{p-2} + m_{p+1} \;, & K_{p-2} = (p-1)\{p-2\}' + (p+2)\{p+1\}' \\
l_{p-1} = m_{p-1} + m_p \;, & K_{p-1} = p\{p-1\}' + (p+1)\{p\}' \\
\text{und bez. bis} & \text{und bez. bis} \\
l_{q-1} = m_{q-1} + m_{q+1} \;, & K_{q-1} = q\{q-1\}' + (q+2)\{q+1\}' \\
l_q = 2m_q \;, & K_q = 2(q+1)\{q\}'
\end{array}$$

dann lassen sich die Endgleichungen des Art. 77 auf die nachstehende Form bringen:

n eine grade Zahl

$$n(d,0) - (d,1) - (d,2) - \ldots\ldots - (d,n-1) \\ -2l_0 - 2l_1 - 2l_2 - \ldots\ldots - 2l_{p-1} + D_0 = 0$$

$$-(d,0) + n(d,1) - (d,2) - \ldots\ldots - (d,n-1) \\ -2l_1 - 2l_2 - \ldots\ldots - 2l_{p-1} + D_1 = 0$$

$$-(d,0) - (d,1) + n(d,2) - \ldots\ldots - (d,n-1) \\ -2l_2 - \ldots\ldots - 2l_{p-1} + D_2 = 0$$

etc. bis

$$-(d,0) - (d,1) - \ldots\ldots + n(d,n-2) - (d,n-1) \\ +2l_2 + \ldots\ldots + 2l_{p-1} + D_{n-2} = 0$$

$$-(d,0) - (d,1) - \ldots\ldots - (d,n-2) + n(d,n-1) \\ +2l_1 + 2l_2 + \ldots\ldots + 2l_{p-1} + D_{n-1} = 0$$

$$-(n+1)(d,0) \qquad + 2nl_0 + K_0 = 0$$

$$-(n+1)\{(d,0) + (d,1) - (d,n-1)\} \qquad + 4(n-1)l_1 + K_1 = 0$$

$$-(n+1)\{(d,0) + (d,1) + (d,2) - (d,n-2) - (d,n-1)\} + 6(n-2)l_2 + K_2 = 0$$

$$-(n+1)\{(d,0) + (d,1) + \ldots + (d,p-1) - (d,p+1) - \ldots - (d,n-1)\} \\ + 2p(p+1)l_{p-1} + K_{p-1} = 0$$

n eine ungrade Zahl

$$n(d,0)-(d,1)-(d,2)-\ldots\ldots-(d,n-1)$$
$$-2l_0-2l_1-2l_2-\ldots\ldots-l_q+D_0=0$$
$$-(d,0)+n(d,1)-(d,2)-\ldots\ldots-(d,n-1)$$
$$-2l_1-2l_2-\ldots\ldots-l_q+D_1=0$$
$$-(d,0)-(d,1)+n(d,2)-\ldots\ldots-(d,n-1)$$
$$-2l_2-\ldots\ldots-l_q+D_2=0$$

etc. bis

$$-(d,0)-(d,1)-\ldots\ldots+n(d,n-2)-(d,n-1)$$
$$+2l_2+\ldots\ldots+l_q+D_{n-2}=0$$
$$-(d,0)-(d,1)-\ldots\ldots-(d,n-2)+n(d,n-1)$$
$$+2l_1+2l_2+\ldots\ldots+l_q+D_{n-1}=0$$

$$-(n+1)(d,0)\qquad+2nl_0+K_0=0$$
$$-(n+1)\{(d,0)+(d,1)-(d,n-1)\}\qquad+4(n-1)l_1+K_1=0$$
$$-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+(d,2)-(d,n-2)-(d,n-1)\}+6(n-2)l_2+K_2=0$$

etc. bis

$$-(n+1)\{(d,0)+(d,1)+\ldots+(d,q)-(d,q+1)-\ldots-(d,n-1)\}$$
$$+2(q+1)^2l_q+K_q=0$$

In beiden Fällen bilden diese Gleichungen wieder ein für sich bestehendes System.

Mit Rücksicht auf die Bedingungsgleichung (b) des Art. 78 findet man, dass auch hier jede Gleichung in den übrigen enthalten ist, so dass wieder eine der Unbekannten als gegeben betrachtet werden muss; es soll wie oben auch hier $(d,0)$ dazu ausersehen werden.

82.

Um die Gleichungen des vor. Art. aufzulösen, ziehe man zunächst jede der Gleichungen der ersten Abtheilung von der zunächst folgenden ab. Hierdurch ergeben sich sogleich, wenn n eine grade Zahl ist, die Gleichungen:

$$(d,1) = \frac{D'_0 - D_1 - 2l_0}{n+1}$$
$$(d,2) = (d,1) + \frac{D_1 - D_2 - 2l_1}{n+1}$$
$$(d,3) = (d,2) + \frac{D_2 - D_3 - 2l_2}{n+1}$$
etc.
$$(d,p) = (d,p-1) + \frac{D_{p-1} - D_p - 2l_{p-1}}{n+1}$$
$$(d,p+1) = (d,p) + \frac{D_p - D_{p+1} - 2l_{p-1}}{n+1}$$
etc. bis
$$(d,n-1) = (d,n-2) + \frac{D_{n-2} - D_{n-1} - 2l_1}{n+1}$$

und wenn n eine ungrade Zahl ist:

$$(d,1) = \frac{D'_0 - D_1 - 2l_0}{n+1}$$
$$(d,2) = (d,1) + \frac{D_1 - D_2 - 2l_1}{n+1}$$
$$(d,3) = (d,2) + \frac{D_2 - D_3 - 2l_2}{n+1}$$
etc.
$$(d,q+1) = (d,q) + \frac{D_q - D_{q+1} - 2l_q}{n+1}$$
etc. bis
$$(d,n-1) = (d,n-2) + \frac{D_{n-2} - D_{n-1} - 2l_1}{n+1}$$

worin

$$D'_0 = D_0 + (n+1)(d,0)$$

gesetzt ist. Werden nun noch die l_0, l_1, etc. durch bekannte Grössen ausgedrückt, so sind alle (d,k) durch die vorstehenden Ausdrücke gegeben.

83.

Aus der ersten Abtheilung der Gleichungen des vorvor. Art. bekommt man leicht, wenn n eine grade Zahl ist,

$$(n+1)\{(d,1)-(d,n-1)\} - 4l_1 - 4l_2 - 4l_3 - \ldots - 4l_{p-1} + \Delta_1 = 0$$
$$(n+1)\{(d,2)-(d,n-2)\} \qquad - 4l_2 - 4l_3 - \ldots - 4l_{p-1} + \Delta_2 = 0$$
$$(n+1)\{(d,3)-(d,n-3)\} \qquad - 4l_3 - \ldots - 4l_{p-1} + \Delta_3 = 0$$
etc. etc.

wo

$$\Delta_1 = D_1 - D_{n-1}$$
$$\Delta_2 = D_2 - D_{n-2}$$
$$\Delta_3 = D_3 - D_{n-3}$$
etc.

bedeuten. Diese Gleichungen erleiden, wenn n eine ungrade Zahl ist, keine andere Veränderung, als dass $2l_q$ statt $4l_{p-1}$ darin geschrieben werden muss. Setzt man ferner

$$K'_0 = K_0 - (n+1)(d,0)$$
$$K'_1 = K_1 - (n+1)(d,0)$$
$$K'_2 = K_2 - (n+1)(d,0)$$
etc.
$$A_1 = K'_1 + \Delta_1$$
$$A_2 = K'_2 + \Delta_1 + \Delta_2$$
$$A_3 = K'_3 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$$
etc.

und addirt die obigen Gleichungen zu denen der zweiten Abtheilung des vorvor. Art., so ergeben sich, wenn n grade ist:

$$2nl_0 + K'_0 = 0$$
$$\{4(n-1)-4\}l_1 - 4l_2 - 4l_3 - \ldots - 4l_{p-1} + A_1 = 0$$
$$-4l_1 + \{6(n-2)-8\}l_2 - 8l_3 - \ldots - 8l_{p-1} + A_2 = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 + \{8(n-3)-12\}l_3 - \ldots - 12l_{p-1} + A_3 = 0$$
etc. bis
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$+\{2(p-2)(p+3)-4(p-3)\}l_{p-3} - 4(p-3)l_{p-2} - 4(p-3)l_{p-1} + A_{p-3} = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$-4(p-3)l_{p-3} + \{2(p-1)(p+2)-4(p-2)\}l_{p-2} - 4(p-2)l_{p-1} + A_{p-2} = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$-4(p-3)l_{p-3} - 4(p-2)l_{p-2} + \{2p(p+1)-4(p-1)\}l_{p-1} + A_{p-1} = 0$$

und wenn n ungrade ist:

$$2nl_0 + K'_0 = 0$$
$$\{4(n-1)-4\}l_1 - 4l_2 - 4l_3 - \ldots - 2l_q + A_1 = 0$$
$$-4l_1 + \{6(n-2)-8\}l_2 - 8l_3 - \ldots - 4l_q + A_2 = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 + \{8(n-3)-12\}l_3 - \ldots - 6l_q + A_3 = 0$$
etc. bis
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$+\{2(q-1)(q+3)-4(q-2)\}l_{q-2} - 4(q-2)l_{q-1} - 2(q-2)l_q + A_{q-2} = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$-4(q-2)l_{q-2} + \{2q(q+2)-4(q-1)\}l_{q-1} - 2(q-1)l_q + A_{q-1} = 0$$
$$-4l_1 - 8l_2 - 12l_3 - \ldots$$
$$-4(q-2)l_{q-2} - 4(q-1)l_{q-1} + \{2(q+1)^2 - 2q\}l_q + A_q = 0$$

Aus diesen Gleichungen sind die verschiedenen l zu ermitteln. Wie man sieht, bekommt man in allen Fällen

$$l_0 = -\frac{1}{2n} K_0$$

während die übrigen l in einem System von Gleichungen mit einander verbunden sind, deren jede alle Unbekannten enthält; dieses System ist aber einer besonderen Eigenschaft wegen, welche es besitzt, leicht aufzulösen.

84.

Betrachtet man die Coefficienten des im vor. Art. erhaltenen Gleichungensystems genauer, so findet man, dass in jeder Gleichung die Summe derselben $= 2n$ ist. Das System lässt sich daher, wenn n eine grade Zahl ist, auf die folgende Form bringen:

$$(A)\begin{cases} 2nl_1 - 4(l_2-l_1) - 4(l_3-l_1) - \ldots\ldots - 4(l_{p-1}-l_1) + A_1 = 0 \\ 4(l_2-l_1) + 2nl_2 - 8(l_3-l_2) - \ldots\ldots - 8(l_{p-1}-l_2) + A_2 = 0 \\ 4(l_3-l_1) + 8(l_3-l_2) + 2nl_3 - \ldots\ldots - 12(l_{p-1}-l_3) + A_3 = 0 \\ \text{etc. bis} \\ 4(l_{p-1}-l_1) + 8(l_{p-1}-l_2) + 12(l_{p-1}-l_3) + \ldots + 2nl_{p-1} + A_{p-1} = 0 \end{cases}$$

und wenn n eine ungrade Zahl ist:

$$(A)\begin{cases} 2nl_1 - 4(l_2-l_1) - 4(l_3-l_1) - \ldots\ldots - 2(l_q-l_1) + A_1 = 0 \\ 4(l_2-l_1) + 2nl_2 - 8(l_3-l_2) - \ldots\ldots - 4(l_q-l_2) + A_2 = 0 \\ \text{etc. bis} \\ 4(l_q-l_1) + 8(l_q-l_2) + 12(l_q-l_3) + \ldots\ldots + 2nl_q + A_q = 0 \end{cases}$$

Diesen Gleichungen kann man noch andere Formen geben; sie werden uns weiter unten, zu einem anderen Zwecke, in der vorstehenden Form nützlich werden. Das hier zu verfolgende Ziel können wir indessen auf einfachere Weise erreichen. Setzen wir

$$\begin{aligned} L_2 &= l_2 - l_1 \\ L_3 &= l_3 - l_2 \\ L_4 &= l_4 - l_3 \\ &\text{etc. bis} \\ L_{p-1} &= l_{p-1} - l_{p-2} \\ &\text{und bez. bis} \\ L_q &= l_q - l_{q-1} \end{aligned}$$

und ziehen hierauf von den für die l entwickelten Gleichungen des vor. Art. die vorletzte von der letzten ab, so erkennt man bald, dass

alle Unbekannten bis auf L_{p-1}, und bez. L_q verschwinden; zieht man die drittletzte von der vorletzten ab, so verschwinden alle Unbekannten bis auf L_{p-2} und L_{p-1}, und bez. L_{q-1} und L_q, u. s. w. Wir erhalten durch dieses Verfahren, wenn n eine grade Zahl ist, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
2(p-1)(p+2)L_{p-1}+B_{p-1} &= 0\\
2(p-2)(p+3)L_{p-2}-4L_{p-1}+B_{p-2} &= 0\\
2(p-3)(p+4)L_{p-3}-8L_{p-2}-4L_{p-1}+B_{p-3} &= 0\\
&\text{etc. bis}\\
6(n-2)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-4L_{p-1}+B_3 &= 0\\
4(n-1)L_2-2(n-6)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-4L_{p-1}+B_2 &= 0\\
2nl_1-2(n-4)L_2-2(n-6)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-4L_{p-1}+B_1 &= 0
\end{aligned}$$

und wenn n eine ungrade Zahl ist:

$$\begin{aligned}
2q(q+2)L_q+B_q &= 0\\
2(q-1)(q+3)L_{q-1}-2L_q+B_{q-1} &= 0\\
2(q-2)(q+4)L_{q-2}-6L_{q-1}-2L_q+B_{q-2} &= 0\\
&\text{etc. bis}\\
6(n-2)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-2L_q+B_3 &= 0\\
4(n-1)L_2-2(n-6)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-2L_q+B_2 &= 0\\
2nl_1-2(n-4)L_2-2(n-6)L_3-2(n-8)L_4-\ldots-2L_q+B_1 &= 0
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
B_1 &= K_1+\Delta_1\\
B_2 &= K_2-K_1+\Delta_2\\
B_3 &= K_3-K_2+\Delta_3\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

gesetzt worden sind. Durch die vorstehenden Formeln werden die im vor. Art. gegebenen Gleichungen vollständig aufgelöst. Denn die Unbekannten, welche sie enthalten, nemlich l_1, L_2, L_3, etc. können daraus, von der letzten derselben anfangend, eine nach der anderen berechnet werden, und wenn diess geschehen ist, bekommt man

$$\begin{aligned}
l_2 &= L_2+l_1\\
l_3 &= L_3+l_2\\
l_4 &= L_4+l_3\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Da somit alle l gefunden sind, so ist auch in den Gleichungen des Art. 82 für die (d,k) Alles bekannt, und man kann die (d,k) aus diesen Gleichungen berechnen.

85.

Wie früher lassen sich alle vorhandenen m durch die l ausdrücken. Es ist nicht nur allgemein

$$m_k + m_{m-k-1} = l_k$$

sondern vermöge der Endgleichungen des Art. 77 auch

$$2(n-k)m_k - 2(k+1)m_{n-k-1} = -\{k\}' + \{n-k-1\}'$$

woraus man durch Elimination

$$(m)\ \ldots \begin{cases} m_k = \dfrac{2(k+1)l_k - \{k\}' + \{n-k-1\}'}{2(n+1)} \\ m_{n-k-1} = \dfrac{2(n-k)l_k + \{k\}' - \{n-k-1\}'}{2(n+1)} \end{cases}$$

erhält.

Man kann auch hier wieder die m auf die (d,k) zurückführen, denn dieselben eben angezogenen Gleichungen geben die Ausdrücke

$$m_0 = -\frac{1}{2n}\Big\{\{0\}' - (d,0)\Big\}$$

$$m_1 = -\frac{1}{2(n-1)}\Big\{\{1\}' - (d,0) - (d,1) + (d,n-1)\Big\}$$

$$m_2 = -\frac{1}{2(n-2)}\Big\{\{2\}' - (d,0) - (d,1) - (d,2) + (d,n-2) + (d,n-1)\Big\}$$

etc. etc.

deren Fortsetzung keine Schwierigkeit bietet.

86.

Die Sätze der Artt. 17, 18, 19 finden auch hier statt, wie sich leicht beweisen lässt. Bezeichnen wir, wie oben, durch ein vorgesetztes δ den Zuwachs, welchen die verschiedenen Grössen dadurch bekommen, dass für $(s,0)$ und $(d,0)$ ein anderer Werth als die Null angenommen wird, so geben die Gleichungen des Art. 80 ohne Weiteres wieder

$$\delta(s,k) = (s,0)$$

wie im Art. 17. Aus den betreffenden Gleichungen der Artt. 82 u. 83 erhält man sogleich

$$\delta D_0 = (n+1)(d,0)$$
$$\delta K_0 = -(n+1)(d,0)$$
$$\delta K_1 = -(n+1)(d,0)$$
$$\delta K_2 = -(n+1)(d,0)$$

etc.

und hieraus durch die Gleichungen für die verschiedenen A

$$\delta A_1 = \delta A_2 = \delta A_3 = \text{etc.} = -(n+1)(d,0)$$

Durch Hülfe dieser Werthe geben die Gleichungen (A) des Art. 84, nebst der denselben vorangehenden Gleichung für l_0,

$$\delta l_0 = \delta l_1 = \delta l_2 = \delta l_3 = \text{etc.} = \tfrac{n+1}{2n}(d,0)$$

und schliesslich hiemit die des Art. 82

$$\delta(d,1) = \tfrac{n-1}{n}(d,0)$$
$$\delta(d,2) = \tfrac{n-2}{n}(d,0)$$
$$\delta(d,3) = \tfrac{n-3}{n}(d,0)$$
etc.

oder allgemein

$$\delta(d,k) = \tfrac{n-k}{n}(d,0)$$

mit der betreffenden Gleichung des Art. 17 übereinstimmend, da hier $2n$ dieselbe Bedeutung hat, wie dort n. Geht man zu den Theilungsfehlern selbst über, so ergiebt die vorstehende Gleichung in Verbindung mit $\delta(s,k) = (s,0)$ allgemein

$$\delta(k) = \tfrac{2n-k}{2n}(0) + \tfrac{k}{2n}(2n)$$

Die Anwendung der obigen Gleichung für $\delta(d,k)$ auf die letzten Ausdrücke des vor. Art. für die m giebt ohne Mühe

$$\delta m_0 = \tfrac{1}{2n}(d,0)$$
$$\delta m^1 = \tfrac{2}{2n}(d,0)$$
$$\delta m_2 = \tfrac{3}{2n}(d,0)$$
etc. bis
$$\delta m_{n-3} = \tfrac{n-2}{2n}(d,0)$$
$$\delta m_{n-2} = \tfrac{n-1}{2n}(d,0)$$
$$\delta m_{n-1} = \tfrac{1}{2}(d,0)$$

mit dem Art. 18 übereinstimmend.

Aus der obigen Gleichung für $\delta(k)$ bekommt man ferner

$$\delta(k+1) - \delta(k) = -\tfrac{1}{2n}(d,0)$$
$$\delta(k+2) - \delta(k) = -\tfrac{2}{2n}(d,0)$$
$$\delta(k+3) - \delta(k) = -\tfrac{3}{2n}(d,0)$$
etc.

wodurch die Gleichungen

$$-\delta(k) + \delta(k+1) + \delta m_0 = 0$$
$$-\delta(k) + \delta(k+2) + \delta m_1 = 0$$
$$-\delta(k) + \delta(k+3) + \delta m_2 = 0$$
etc.

ebenfalls in Uebereinstimmung mit den betreffenden Formeln des Art. 18, hervorgehen. Aus diesen Gleichungen kann man wieder den Schluss ziehen, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler von den Werthen, welche man den Theilungsfehlern der beiden Endstriche (0) und ($2n$) des zu berichtigenden Maassstabes beilegt, unabhängig ist.

Der Satz des Art. 19 braucht nicht wieder vorgenommen zu werden, da aus den vorhergehenden Resultaten schon erhellt, dass derselbe auch hier wieder stattfindet.

87.

Zur Berechnung der Summe der Fehlerquadrate kann man sich immerhin des Ausdrucks (Ω) des Art. 20 bedienen, welcher, wenn man alle $\{0\}'$ $\{1\}'$ $\{2\}'$ etc. gleich Null gemacht hat, was man stets thun sollte, sich auf

$$\Omega = \Sigma\{k\}(k)$$

reducirt, wo die Summe von $k = 1$ bis zu $k = 2n-1$ auszudehnen ist.

88.

Zur Entwickelung der Ausdrücke der Gewichte der Theilungsfehler, auf welche das gegenwärtige Verfahren führt, ist vor Allem wieder zu bemerken, dass selbstverständlich die Gewichte je zweier derselben, welche Theilstrichen angehören, die gleichweit von den beiden Endpunkten des zu berichtigenden Maassstabes abstehen, einander gleich sein müssen. Man wird im Laufe der Entwickelungen ferner bemerken, dass diese Gleichheit sich auch auf diejenigen Theilstriche erstreckt, die gleichweit von dem einen der Endpunkte und der Mitte des Maassstabes liegen. Auch kann wieder in den vorzunehmenden Entwickelungen $(s,0) = (d,0) = 0$ gesetzt werden, da diese beiden Grössen zu den Gewichten Nichts beitragen können.

Die Fundamentalgleichung

$$P(k) = \frac{2(n+1)}{F_k + Q_k}$$

wo wir F_k als den Coefficienten von S_k in der Entwickelung von $(n+1)(s,k)$, und Q_k als den von D_k in der Entwickelung von $(n+1)(d,k)$ definiren können, wo aber F_n verdoppelt werden muss, findet auch hier statt, und die Aufgabe reducirt sich also darauf, die Ausdrücke von F_k und Q_k zu ermitteln.

89.

Zur Ermittelung der F_k ist zunächst zu bemerken, dass die Bedingungsgleichung (a) des Art. 78 sich auf die Form

$$0 = S_0 + S_1 + S_2 + \ldots + \tfrac{1}{2} S_n$$

bringen lässt; berücksichtigt man diese in den Gleichungen des Art. 80 für die (s,k), so bekommt man sofort

$$F_k = 2$$

ohne Ausnahme.

Da nun $Q_n = 0$ ist, so giebt die Fundamentalgleichung des vor. Art. sogleich

$$P(n) = n+1$$

90.

Um die Ausdrücke der Q_k zu ermitteln, seien zuvörderst

$$\begin{aligned}
(\sigma,1) &= (d,1) + (d,n-1), & \Sigma_1' &= D_1 + D_{n-1} \\
(\sigma,2) &= (d,2) + (d,n-2), & \Sigma_2' &= D_2 + D_{n-2} \\
(\sigma,3) &= (d,3) + (d,n-3), & \Sigma_3' &= D_3 + D_{n-3}
\end{aligned}$$

etc. bis

$$\begin{aligned}
(\sigma,p-1) &= (d,p-1)+(d,p+1), & \Sigma_{p-1}' &= D_{p-1} + D_{p+1} \\
(\sigma,p) &= 2(d,p), & \Sigma_p' &= 2D_p
\end{aligned}$$

und bez. bis

$$(\sigma,q) = (d,q) + (d,q+1), \qquad \Sigma_q = D_q + D_{q+1}$$

Die Addition der zweiten und letzten, der dritten und vorletzten u. s. w. der Gleichungen erster Abtheilung des Art. 81 giebt hierauf sofort, wenn man $(d,0) = 0$ setzt:

$$\begin{aligned}
(n-1)(\sigma,1) - 2(\sigma,2) - 2(\sigma,3) - \ldots - (\sigma,p) + \Sigma_1' &= 0 \\
-2(\sigma,1) + (n-1)(\sigma,2) - 2(\sigma,3) - \ldots - (\sigma,p) + \Sigma_2' &= 0 \\
-2(\sigma,1) - 2(\sigma,2) + (n-1)(\sigma,3) - \ldots - (\sigma,p) + \Sigma_3' &= 0
\end{aligned}$$

etc. bis

$$-(\sigma,1) - (\sigma,2) - (\sigma,3) - \ldots + p(\sigma,p) + \tfrac{1}{2}\Sigma_p' = 0$$

welche Gleichungen sehr leicht vollständig aufgelöst werden können. Multiplicirt man die erste mit 2, und addirt das Produkt zu allen übrigen, dann die zweite mit 2, und verfährt ebenso, hierauf die dritte mit 2, worauf wieder alle zu addiren sind, u. s. w., endlich die letzte mit 3, und addirt wieder alle Gleichungen, so erhält man in Erwägung, dass die Anzahl aller Gleichungen $= p$ ist, und mit Weglassung der Glieder, welche zu den Gewichten Nichts beitragen können:

$$(n+1)(\sigma,1) + 2\Sigma'_1 = 0$$
$$(n+1)(\sigma,2) + 2\Sigma'_2 = 0$$
$$(n+1)(\sigma,3) + 2\Sigma'_3 = 0$$
etc. bis
$$(n+1)(\sigma,p) + \tfrac{3}{2}\Sigma'_p = 0$$

womit die Auflösung ausgeführt ist. Die obigen Gleichungen beziehen sich zwar auf den Fall, dass n eine grade Zahl ist, allein behandelt man die Gleichungen des Art. 81 für ein ungrades n ebenso, so bekommt man die nemlichen Gleichungen, in denen alsdann (σ,p) wegfällt, und die Gleichung für (σ,q) den vorhergehenden völlig ähnlich ist. Die vorstehenden Gleichungen haben daher allgemeine Geltung.

91.

Seien ferner

$$(\delta,1) = (d,1)-(d,n-1)\,, \qquad \Delta_1 = D_1-D_{n-1}$$
$$(\delta,2) = (d,2)-(d,n-2)\,, \qquad \Delta_2 = D_2-D_{n-2}$$
$$(\delta,3) = (d,3)-(d,n-3)\,, \qquad \Delta_3 = D_3-D_{n-3}$$
etc. bis
$$(\delta,p-1) = (d,p-1)-(d,p+1)\,, \qquad \Delta_{p-1} = D_{p-1}-D_{p+1}$$
$$(\delta,p) = 0 \qquad \Delta_p = 0$$
und bez. bis
$$(\delta,q) = (d,q)-(d,q+1)\,, \qquad \Delta_q = D_q-D_{q+1}$$
$$(\delta,q+1) = -(\delta,q) \qquad \Delta_{q+1} = -\Delta_q$$

dann lässt sich die zweite Abtheilung der Gleichungen des Art. 81 leicht auf die folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
&-\tfrac{n+1}{n-1}(\delta,1) && +4l_1+\tfrac{1}{n-1}K_1=0\\
&-\tfrac{2(n+1)}{3(n-2)}\{(\delta,1)+(\delta,2)\} && +4l_2+\tfrac{2}{3(n-2)}K_2=0\\
&-\tfrac{2(n+1)}{4(n-3)}\{(\delta,1)+(\delta,2)+(\delta,3)\} && +4l_3+\tfrac{3}{4(n-3)}K_3=0\\
&\qquad\text{etc.} && \qquad\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ldots(l)$$

Aus der ersten Abtheilung der angezogenen Gleichungen ergiebt sich hingegen ohne Mühe

$$\begin{aligned}
&(n+1)(\delta,1)-4l_1-4l_2-4l_3-\ldots-4l_{p-1}+\Delta_1=0\\
&(n+1)(\delta,2)\qquad\;\;-4l_2-4l_3-\ldots-4l_{p-1}+\Delta_2=0\\
&(n+1)(\delta,3)\qquad\qquad\;\;-4l_3-\ldots-4l_{p-1}+\Delta_3=0\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

woraus man

$$\begin{aligned}
&(n+1)\{(\delta,1)-(\delta,2)\}-4l_1+\Delta_1-\Delta_2=0\\
&(n+1)\{(\delta,2)-(\delta,3)\}-4l_2+\Delta_2-\Delta_3=0\\
&(n+1)\{(\delta,3)-(\delta,4)\}-4l_3+\Delta_3-\Delta_4=0\\
&\qquad\text{etc.}\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

erhält. Die Elimination der l zwischen diesen und den obigen, auch von den l abhängigen Gleichungen führt schliesslich auf

$$\left.\begin{aligned}
&(n+1)\left\{\tfrac{2n-4}{2(n-1)}(\delta,1)-(\delta,2)\right\}+M_1=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{2}{3(n-2)}(\delta,1)+\tfrac{3n-8}{3(n-2)}(\delta,2)-(\delta,3)\right\}+M_2=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{2}{4(n-3)}(\delta,1)-\tfrac{2}{4(n-3)}(\delta,2)+\tfrac{4n-14}{4(n-3)}(\delta,3)-(\delta,4)\right\}+M_3=0\\
&\qquad\qquad\text{etc. bis}\\
&(n+1)\Big\{-\tfrac{2}{(p-1)(p+2)}(\delta,1)-\tfrac{2}{(p-1)(p+2)}(\delta,2)-\tfrac{2}{(p-1)(p+2)}(\delta,3)-\ldots\\
&\qquad+\tfrac{p^2+p-4}{(p-1)(p+2)}(\delta,p-2)-(\delta,p-1)\Big\}+M_{p-2}=0\\
&(n+1)\Big\{-\tfrac{2}{p(p+1)}(\delta,1)-\tfrac{2}{p(p+1)}(\delta,2)-\tfrac{2}{p(p+1)}(\delta,3)-\ldots\\
&\qquad-\tfrac{2}{p(p+1)}(\delta,p-2)+\tfrac{(p-1)(p+2)}{p(p+1)}(\delta,p-1)\Big\}+M_{p-1}=0\\
&\qquad\qquad\text{und bez. bis}\\
&(n+1)\Big\{-\tfrac{2}{q(q+2)}(\delta,1)-\tfrac{2}{q(q+2)}(\delta,2)-\tfrac{2}{q(q+2)}(\delta,3)-\ldots\\
&\qquad+\tfrac{q^2+2q-2}{q(q+2)}(\delta,q-1)-(\delta,q)\Big\}+M_{q-1}=0\\
&(n+1)\Big\{-\tfrac{1}{(q+1)^2}(\delta,1)-\tfrac{1}{(q+1)^2}(\delta,2)-\tfrac{1}{(q+1)^2}(\delta,3)-\ldots\\
&\qquad-\tfrac{1}{(q+1)^2}(\delta,q-1)+\tfrac{q(q+2)}{(q+1)^2}(\delta,q)\Big\}+\tfrac{1}{2}M_q=0
\end{aligned}\right\}(c)$$

wo zur Abkürzung

$$M_1 = \varDelta_1 - \varDelta_2 + \frac{1}{n-1} K_1$$
$$M_2 = \varDelta_2 - \varDelta_3 + \frac{2}{3(n-2)} K_2$$
$$M_3 = \varDelta_3 - \varDelta_4 + \frac{2}{4(n-3)} K_3$$
etc. bis
$$M_{p-1} = \varDelta_{p-1} + \frac{2}{p(p+1)} K_{p-1}$$
und bez. bis
$$M_q = 2.\varDelta_q + \frac{2}{(q+1)^2} K_q$$
gesetzt worden sind.

92.

Die allgemeine Auflösung der Gleichungen (c) bei unbestimmt gelassenem n scheint auf verwickelte Ausdrücke zu führen; sie lässt sich jedenfalls leicht bewirken, wenn der Werth von n im Voraus gegeben ist. Ich nehme an, dass man unter dieser Voraussetzung erhalten habe:

$$0 = (n+1)(\delta,1) + (1,1)M_1 + (1,2)M_2 + (1,3)M_3 + \ldots + (1,p-1)M_{p-1} \text{ und bez. bis } \tfrac{1}{2}(1,q)M_q$$
$$0 = (n+1)(\delta,2) + (2,1)M_1 + (2,2)M_2 + (2,3)M_3 + \ldots + (2,p-1)M_{p-1} \text{ und bez. bis } \tfrac{1}{2}(2,q)M_q$$
etc. bis
$$0 = (n+1)(\delta,p-1) + (p-1,1)M_1 + (p-1,2)M_2 + (p-1,3)M_3 + \ldots + (p-1,\, p-1)M_{p-1}$$
und bez. bis
$$0 = (n+1)(\delta,q) + (q,1)M_1 + (q,2)M_2 + (q,3)M_3 + \ldots + \tfrac{1}{2}(q,q)M_q$$
wo $(1,1)$, $(1,2)$, etc. $(2,1)$, $(2,2)$, etc. etc. gegebene numerische Coefficienten sind.

Wenden wir uns zuerst zur Bestimmung der Gewichte der Fehler der Theilstriche, und setzen

$$N_1 = (1,1)$$
$$N_2 = (2,2) - (2,1)$$
$$N_3 = (3,3) - (3,2)$$
etc. bis
$$N_{p-1} = (p-1,\, p-1) - (p-1,\, p-2)$$
und bez. bis
$$N_q = (q,q) - (q,q-1)$$
so bekommen wir mit blosser Zuziehung der zweckdienlichen Glieder
$$(n+1)(\delta,k) + N_k \varDelta_k = 0$$

und die Verbindung mit der oben erhaltenen Gleichung

$$(n+1)(\sigma,k) + 2\Sigma_k = 0$$

führt auf die Gleichungen

$$(n+1)(d,k) + (1+\tfrac{1}{2}N_k)\, D_k = 0$$
$$(n+1)(d,n-k) + (1+\tfrac{1}{2}N_k)\, D_k = 0$$

Diese Gleichungen enthalten den Beweis des schon oben ausgesprochenen Satzes, dass im gegenwärtigen Falle auch die Gewichte derjenigen Theilungsfehler, welche irgend zweien, gleichweit von der Mitte und dem einen der beiden Endpunkte des zu berichtigenden Maassstabes abstehenden Theilstrichen angehören, einander gleich sind.

Aus denselben Gleichungen folgt nun, dass

$$Q_k = Q_{n-k} = 1+\tfrac{1}{2}N_k$$

und hiemit erhalten wir vermittelst des oben gegebenen allgemeinen Ausdrucks für die Gewichte der Theilungsfehler:

$$P(k) = P(n-k) = P(n+k) = P(2n-k) = \frac{2(n+1)}{3+\frac{1}{2}N_k}$$

Der oben benutzte allgemeine Ausdruck für (σ,k) erleidet eine Ausnahme für $k = p$, indem er in diesem Falle in

$$(n+1)(\sigma,p) + \tfrac{3}{2}\Sigma_p = 0$$

übergeht, während zugleich $(\delta,p) = 0$ ist. Die Substitution der oben gegebenen Werthe für (σ,p) und Σ_p führt auf die Gleichung

$$(n+1)(d,p) + \tfrac{3}{2}D_p = 0$$

woraus

$$Q_p = Q_{n+p} = \tfrac{3}{2}$$

hervorgeht; folglich bekommen die bezüglichen Gewichte den Ausdruck

$$P(p) = P(n+p) = \frac{4(n+1)}{7}$$

womit die Gewichte aller Theilungsfehler bestimmt sind.

93.

Indem wir zur Ermittelung der Ausdrücke für die Gewichte der Prüfungsintervalle übergehen, zeigen vor Allem die Gleichungen zweiter Abtheilung des Art. 77, dass

$$P(m_0) = 2n$$
$$P(m_{n-1}) = 2$$

werden, während für die übrigen Gewichte besondere Entwickelungen erforderlich sind.

Zunächst ist zu bemerken, dass in den M_1, M_2, etc. die Δ_1, Δ_2, etc. wegzulassen sind, und dagegen die mit K_1, K_2, etc. multiplicirten Glieder angewandt werden müssen. Die im vor. Art. für die (δ,k) erhaltenen Gleichungen geben hierauf leicht

$$(n+1)(\delta,1) \qquad + \frac{(1,1)}{(n-1)} K_1 = 0$$

$$(n+1)\{(\delta,1)+(\delta,2)\} \qquad +2\frac{(1,2)+(2,2)}{3(n-2)} K_2 = 0$$

$$(n+1)\{(\delta,1)+(\delta,2)+(\delta,3)\} +2\frac{(1,3)+(2,3)+(3,3)}{4(n-3)} K_3 = 0$$

etc. etc.

worin die Ausdrücke des Art. 81 für die K_1, K_2, etc. zu substituiren sind. Nachdem diess geschehen, kommt man, wenn zur Abkürzung

$$W_k = 2\frac{(1,k)+(2,k)+\ldots\ldots+(k,k)}{(n-k)(k+1)}$$

gesetzt worden ist, auf den allgemeinen Ausdruck

$$(n+1)\{(\delta,1)+(\delta,2)+\ldots+(\delta,k)\}+(k+1)W_k\{k\}'+(n-k)W_k\{n-k-1\}'=0$$

Die Gleichungen (l) des Art. 91 können aber durch die folgende allgemeine Gleichung dargestellt werden:

$$2l_k-\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}\{(\delta,1)+(\delta,2)+\ldots+(\delta,k)\}+\frac{1}{n-k}\{k\}'+\frac{1}{k+1}\{n-k-1\}'=0$$

welche in Verbindung mit der vorhergehenden

$$2l_k+\frac{1+W_k}{n-k}\{k\}'+\frac{1+W_k}{k+1}\{n-k-1\}'=0$$

giebt. Eliminirt man hiemit l_k aus den (m) des Art. 85, so bekommt man sogleich für die gesuchten Gewichte die Ausdrücke

$$P(m_k) = \frac{2(n+1)}{1+\frac{k+1}{n-k}(1+W_k)}$$

$$P(m_{n-k-1}) = \frac{2(n+1)}{1+\frac{n-k}{k+1}(1+W_k)}$$

welche den Gleichungen (P) des Art. 31 entsprechen.

Da die vorstehenden Ausdrücke für alle Werthe von k von 1 bis $p-1$ und bez. bis q ohne Ausnahme gelten, so sind hiemit die Werthe aller Gewichte gegeben.

94.

Wir werden jetzt die numerischen Werthe der Gewichte, von $n=8$ an abwärts, angeben, und die Berechnung der beiden ersten derselben durch die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke, mit einigen Einzelheiten begleiten. Da

für $n=8$

die Gleichungen (c) des Art. 91 bei $(\delta,p-1)$, hier $=(\delta,3)$ abbre-

chen, so stellen sie sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left\{\tfrac{6}{7}(\delta,1)-(\delta,2)\right\} &&+M_1=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{1}{9}(\delta,1)+\tfrac{8}{9}(\delta,2)-(\delta,3)\right\} &&+M_2=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{1}{10}(\delta,1)-\tfrac{1}{10}(\delta,2)+\tfrac{9}{10}(\delta,3)\right\} &&+M_3=0
\end{aligned}$$

Durch Auflösung derselben bekommt man leicht die Coefficienten

$$\begin{aligned}
(1,1)&=\tfrac{7}{4}, & (1,2)&=\tfrac{9}{4}, & (1,3)&=\tfrac{5}{2}\\
(2,1)&=\tfrac{1}{2}, & (2,2)&=\tfrac{27}{14}, & (2,3)&=\tfrac{15}{7}\\
(3,1)&=\tfrac{1}{4}, & (3,2)&=\tfrac{13}{28}, & (3,3)&=\tfrac{205}{126}
\end{aligned}$$

und hieraus die Werthe

$$N_1=\tfrac{7}{4},\qquad N_2=\tfrac{10}{7},\qquad N_3=\tfrac{293}{252}$$

mit welchen die Formeln des vorvor. Art. unmittelbar die Gewichte der Theilungsfehler geben. Man berechnet ferner aus den obigen Coefficienten

$$W_1=\tfrac{1}{4},\qquad W_2=\tfrac{13}{28},\qquad W_3=\tfrac{79}{126}$$

womit die Formeln des vor. Art. unmittelbar die Gewichte der Prüfungsintervalle liefern.

Für $n=7$

brechen die (δ,k) bei (δ,q), also auch bei $(\delta,3)$ ab, und die angezogenen Gleichungen (c) werden daher jetzt:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\left\{\tfrac{5}{6}(\delta,1)-(\delta,2)\right\} &&+M_1=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{2}{15}(\delta,1)+\tfrac{13}{15}(\delta,2)-(\delta,3)\right\} &&+M_2=0\\
&(n+1)\left\{-\tfrac{1}{16}(\delta,1)-\tfrac{1}{16}(\delta,2)+\tfrac{15}{16}(\delta,3)\right\} &&+\tfrac{1}{2}M_3=0
\end{aligned}$$

durch deren Auflösung die Coefficienten

$$\begin{aligned}
(1,1)&=\tfrac{12}{7}, & (1,2)&=\tfrac{15}{7}, & (1,3)&=\tfrac{16}{7}\\
(2,1)&=\tfrac{3}{7}, & (2,2)&=\tfrac{25}{14}, & (2,3)&=\tfrac{40}{21}\\
(3,1)&=\tfrac{1}{7}, & (3,2)&=\tfrac{11}{42}, & (3,3)&=\tfrac{424}{315}
\end{aligned}$$

hervorgehen. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
N_1&=\tfrac{12}{7}, & N_2&=\tfrac{19}{14}, & N_3&=\tfrac{683}{630}\\
W_1&=\tfrac{2}{7}, & W_2&=\tfrac{11}{21}, & W_3&=\tfrac{218}{315}
\end{aligned}$$

woraus man wieder die Gewichte nach den obigen Formeln berechnen kann.

95.

Ich werde jetzt alle berechneten Gewichte folgen lassen.

$n = 8.$

$$P(1) = P(7) = P(9) = P(15) = \tfrac{144}{31} = 4.61$$
$$P(2) = P(6) = P(10) = P(14) = \tfrac{63}{13} = 4.82$$
$$P(3) = P(5) = P(11) = P(13) = \tfrac{9072}{1805} = 5.03$$
$$P(4) = P(12) = \tfrac{36}{7} = 5.14$$
$$P(8) = 9$$
$$P(m_0) = 16$$
$$P(m_1) = \tfrac{252}{19} = 13.26$$
$$P(m_2) = \tfrac{1008}{97} = 10.40$$
$$P(m_3) = \tfrac{1134}{145} = 7.82$$
$$P(m_4) = \tfrac{9072}{1529} = 5.94$$
$$P(m_5) = \tfrac{252}{55} = 4.57$$
$$P(m_6) = \tfrac{144}{43} = 2.35$$
$$P(m_7) = 2$$

$n = 7.$

$$P(1) = P(6) = P(8) = P(13) = \tfrac{112}{27} = 4.15$$
$$P(2) = P(5) = P(9) = P(12) = \tfrac{448}{103} = 4.35$$
$$P(3) = P(4) = P(10) = P(11) = \tfrac{20160}{4463} = 4.52$$
$$P(7) = 8$$
$$P(m_0) = 14$$
$$P(m_1) = \tfrac{56}{5} = 11.20$$
$$P(m_2) = \tfrac{560}{67} = 8.36$$
$$P(m_3) = \tfrac{315}{53} = 5.94$$
$$P(m_4) = \tfrac{1008}{223} = 4.52$$
$$P(m_5) = \tfrac{56}{17} = 3.30$$
$$P(m_6) = 2$$

$$n = 6.$$

$$P(1) = P(5) = P(7) = P(11) = \tfrac{84}{23} = 3.65$$

$$P(2) = P(4) = P(8) = P(10) = \tfrac{420}{109} = 3.85$$

$$P(3) = P(9) = 4$$

$$P(6) = 7$$

$$P(m_0) = 12$$

$$P(m_1) = \tfrac{210}{23} = 9.14$$

$$P(m_2) = \tfrac{70}{11} = 6.36$$

$$P(m_3) = \tfrac{210}{47} = 4.46$$

$$P(m_4) = \tfrac{42}{13} = 3.23$$

$$P(m_5) = 2$$

$$n = 5.$$

$$P(1) = P(4) = P(6) = P(9) = \tfrac{60}{19} = 3.16$$

$$P(2) = P(3) = P(7) = P(8) = \tfrac{480}{143} = 3.36$$

$$P(5) = 6$$

$$P(m_0) = 10$$

$$P(m_1) = \tfrac{120}{17} = 7.06$$

$$P(m_2) = \tfrac{40}{9} = 4.44$$

$$P(m_3) = \tfrac{60}{19} = 3.16$$

$$P(m_4) = 2$$

$$n = 4.$$

$$P(1) = P(3) = P(5) = P(7) = \tfrac{8}{3} = 2.67$$

$$P(2) = P(6) = \tfrac{20}{7} = 2.86$$

$$P(4) = 5$$

$$P(m_0) = 8$$

$$P(m_1) = 5$$

$$P(m_2) = \tfrac{40}{13} = 3.08$$

$$P(m_3) = 2$$

$n = 3.$

$$P(1) = P(2) = P(4) = P(5) = \tfrac{24}{11} = 2.18$$
$$P(3) = 4$$
$$P(m_0) = 6$$
$$P(m_1) = 3$$
$$P(m_2) = 2$$

$n = 2.$

$$P(1) = P(3) = \tfrac{12}{7} = 1.71$$
$$P(2) = 3$$
$$P(m_0) = 4$$
$$P(m_1) = 2$$

Die Annahme $n = 1$ würde die Auflösung durch das gegenwärtige Verfahren auf die der «Vorbereitenden Entwickelungen» hinführen, und braucht daher nicht angegeben zu werden.

Vergleicht man die eben erhaltenen Werthe der Gewichte der Theilungsfehler mit denjenigen, welche wir für dieselben Werthe von n durch Anwendung des „Ersten Verfahrens" im Art. 34 erhalten haben, so wird man erkennen, dass die letzteren zwar etwas grösser als die obigen, die Unterschiede jedoch klein sind. Das Gewicht $P(n)$ kann hiemit nicht verglichen werden, da es bei jenen nicht vorkommen kann; vergleicht man dasselbe aber mit den zu den doppelten Werthen von n gehörigen $P(n)$ des Art. 34, so findet man, dass diese letzteren auch ein wenig grösser sind als die hier erhaltenen.

Die Vergleichung der Gewichte der Prüfungsintervalle mit denen des Art. 34 zeigt, dass die hier erhaltenen genau doppelt so gross sind, als jene, welcher Umstand leicht zu erklären ist.

Berichtigungen.

Seite 564, Zeile 12 v. u. statt $216n^3$ lies $215n^3$.
« 571, « 14 v. o. « $\frac{14}{3} = 4{,}67$ « $\frac{56}{13} = 4{,}31$
« 572, « 12 v. u. « $\frac{6}{5} = 1{,}20$ « $\frac{3}{2} = 1{,}50$

Zusatz zu Art. 92 u. flgg.

Aus den Gleichungen (c) des Art. 91 erhält man durch Hinzufügung der geeigneten Factoren und Addition:

$$0 = n(n+1)(\delta,1) + 2(n-1)M_1 + 3(n-2)M_2 + 4(n-3)M_3 + \text{etc.}$$

$$\text{bis } +(p-1)(p+2)M_{p-2}+p(p+1)M_{p-1} \text{ und bez. } +q(q+2)M_{q-1}+\tfrac{1}{2}(q+1)^2M_q$$

woraus die Werthe der im Art. 92 eingeführten Coefficienten $(1,1)$, $(1,2)$ . . $(1,p-1)$ und resp. $(1,q)$ sofort entnommen werden können. Nunmehr lassen sich mittelst der Gleichungen (c) successive auch $(\delta,2)$, $(\delta,3)$, $(\delta,4)$ u. s. w. durch die M ausdrücken, und somit auch die Coefficienten $(2,k)$, $(3,k)$, $(4,k)$ u. s. w. bestimmen. Auch kann man sich zu diesem Zwecke der folgenden Umformung des Systems (c) bedienen, von deren Richtigkeit man sich ohne Schwierigkeit überzeugt:

$$0 = (n+1)\left\{(\delta,2)-\frac{n-4}{n-2}(\delta,1)\right\}-\frac{n-4}{n-2}M_1 + \left\{3(n-2)M_2 + 4(n-3)M_3 + \ldots\right\}$$

$$0 = (n+1)\left\{(\delta,3)-\frac{n-6}{n-4}(\delta,2)\right\}-\frac{n-6}{n-4}M_2 + \left\{4(n-3)M_3 + 5(n-4)M_4 + \ldots\right\}$$

$$0 = (n+1)\left\{(\delta,4)-\frac{n-8}{n-6}(\delta,3)\right\}-\frac{n-8}{n-6}M_3 + \left\{5(n-4)M_4 + \ldots\right\}$$

etc. bis

$$0 = (n+1)\left\{(\delta,p-1)-\frac{2}{4}(\delta,p-2)\right\}-\frac{1}{2}M_{p-2} + \frac{p(p+1)}{(p-1)(p+2)}M_{p-1}$$

und bez. bis

$$0 = (n+1)\left\{(\delta,q)-\frac{1}{3}(\delta,q-1)\right\}-\frac{1}{3}M_{q-1} + \frac{(q+1)^2}{2q(q+2)}M_q$$

Die directe Rechnung ergiebt hieraus:

$$0 = (n+1)(\delta,1) + \frac{1}{n}\left\{2(n-1)M_1 + 3(n-2)M_2 + 4(n-3)M_3 + \ldots\right\}$$

$$0 = (n+1)(\delta,2) + \frac{n-4}{n}M_1 + \frac{n-2}{n(n-1)}\left\{3(n-2)M_2+4(n-3)M_3+\ldots\right\}$$

$$0 = (n+1)(\delta,3) + \frac{n-6}{n}\left(M_1 + \frac{2n-3}{n-1}M_2\right) + \frac{3n^2-16n+18}{3n(n-1)(n-2)}\left\{4(n-3)M_3 + \ldots\right\}$$

$$0 = (n+1)(\delta,4) + \frac{n-8}{n}\left(M_1 + \frac{2n-3}{n-1}M_2 + \frac{9n^2-37n+36}{3(n-1)(n-2)}M_3\right) +$$
$$+ \frac{6n^3-59n^2+169n-144}{6n(n-1)(n-2)(n-3)}\left\{5(n-4)M_4 + \ldots\right\}$$

welche Gleichungen nach Bedürfniss fortgesetzt werden können.

Es ist wohl nicht nöthig, die Werthe der durch die vorstehende Auflösung des Systems (c) gegebenen Coefficienten $(1,k)$, $(2,k)$ etc. ausführlich hinzuschreiben; man sieht, dass es im Grunde nur auf die Berechnung von (k,k) und von $(k,k-1)$ oder $(k+1,k)$ ankommt, welche wiederum durch die Gleichungen

$$(k,k) = \frac{n-2k}{n-2k-2}(k+1,k)+1$$

$$\frac{k(n-k+1)}{n-2k-2}(k+1,k) = \frac{(k+1)(n-k)}{n-2k}(k,k-1)+1$$

mit einander verbunden sind. Es ist nun leicht, die Ausdrücke der Artt. 92 u. 93 für W_k und N_k auf die Form zu bringen:

$$W_k = \frac{2}{n-2k-2}(k+1,k) = \frac{2}{n-2k}\left\{(k,k)-1\right\}$$

$$N_k = \frac{(k+1)(n-k)+(n-2k)(k,k-1)}{k(n-k+1)} = \frac{n-2k}{(k+1)(n-k)}(k,k)+1$$

womit die Relationen

$$k(n-k+1)W_k = (k+1)(n-k)W_{k-1} + 2$$

$$k(n-k+1)N_k = \tfrac{1}{2}(n-2k)^2 W_{k-1} + (k+1)(n-k)$$

hervorgehen.

Die gefundenen Gleichungen, in Verbindung mit den Werthen

$$W_1 = \frac{2}{n}, \qquad N_1 = 2\,\frac{n-1}{n}$$

vermitteln eine bequeme recurrirende Berechnungsweise für die W_k und N_k. Man erhält

$$W_2 = \frac{2(2n-3)}{n(n-1)}, \qquad N_2 = \frac{2n^2-7n+8}{n(n-1)}$$

$$W_3 = \frac{2(9n^2-37n+36)}{3n(n-1)(n-2)}, \qquad N_3 = \frac{6n^3-43n^2+120n-108}{3n(n-1)(n-2)}$$

$$W_4 = \frac{24n^3-187n^2+463n-360}{3n(n-1)(n-2)(n-3)}, \qquad N_4 = \frac{12n^4-148n^3+707n^2-1532n+1152}{6n(n-1)(n-2)(n-3)}$$

etc. etc.

Die Anwendung dieser Ausdrücke auf die Formeln

$$P(k) = \frac{2(n+1)}{3+\frac{1}{2}N_k}, \quad P(m_k) = \frac{2(n+1)(n-k)}{n+1+(k+1)W_k}, \quad P(m_{n-k-1}) = \frac{2(k+1)(n+1)}{n+1+(n-k)W_k}$$

liefert schliesslich die gesuchten Werthe der Gewichte.

Man kann bemerken, dass die für die W_k berechneten Werthe genau übereinstimmen mit den entsprechenden des „ersten Verfahrens", welche Art. 32 angegeben sind, während die Gewichte der Prüfungsintervalle sich verdoppelt haben. Die im Art. 29 aufgeführten Grössen U_k unterscheiden sich von den Coefficienten (k,k) nur durch den Factor $\frac{n}{(k+1)(n-k)}$, mithin fällt jetzt N_k mit $Q_k = 1 + T_k U_k$ des früheren Verfahrens zusammen, und man erhält die Relationen:

$$N_k = \frac{n-2k}{n}U_k + 1$$

$$P(k) = \frac{2P(k)}{1+\frac{2}{n+1}P(k)}$$

wo rechts die Ausdrücke des Art. 29 für $P(k)$ zu substituiren sind.

Im Folgenden sind die bis $k = 4$ entwickelten Ausdrücke für die Gewichte zusammengestellt, welche nach dem Früheren bis $k = p-1$ resp. $k = q$ angewandt werden dürfen.

$$P(1) = \frac{2(n+1)n}{4n-1}$$

$$P(2) = \frac{4(n+1)n(n-1)}{8n^2-13n+8}$$

$$P(3) = \frac{12(n+1)n(n-1)(n-2)}{24n^3-97n^2+156n-108}$$

$$P(4) = \frac{24(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{48n^4-359n^3+1103n^2-1748n+1152}$$

etc.

$$P(m_1) = \frac{2(n+1)n(n-1)}{n^2+n+4}$$

$$P(m_2) = \frac{2(n+1)n(n-1)(n-2)}{n^3 \quad +11n-18}$$

$$P(m_3) = \frac{6(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^4-6n^3+69n^2-290n+288}$$

$$P(m_4) = \frac{6(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{3n^5-15n^4+135n^3-920n^2+2297n-1800}$$

etc.

$$P(m_{n-5}) = \frac{30(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{3n^5+9n^4-268n^3+1226n^2-2280n+1440}$$

$$P(m_{n-4}) = \frac{24(n+1)n(n-1(n-2)}{3n^4+12n^3-131n^2+300n-216}$$

$$P(m_{n-3}) = \frac{6(n+1)n(n-1)}{n^3+4n^2-15n+12}$$

$$P(m_{n-2}) = \frac{4(n+1)n}{n^2+3n-2}$$

Schbr.

Zu Art. 53.

$-(s,1)$	$-(s,2)$	0
$+6(s,1)$	$-(s,2)$	$-(s0$
$-(s,1)$	$+7(s,2)$	$-(s0$
$-(s,1)$	$-(s,2)$	$+7(s0$
	$-(s,2)$	$-(s0$
$-(s,1)$		$-(s0$
	$-(s,2)$	0
		$-2(s0$
$-(s,1)$	$-(s,2)$	0
$-(s,1)$	$-(s,2)$	0
		$-(s0$

$-(d,1)$	$-(d,2)$		$2m_2$	$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_0$	$= 0$
$+6(d,1)$	$-(d,2)$	$-(d$	$2m_2$	$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_1$	$= 0$
$-(d,1)$	$+7(d,2)$	$-(d$	$2m_2$	$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_2$	$= 0$
$-(d,1)$	$-(d,2)$	$+7(d$	$2m_2$	$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_3$	$= 0$
	$-(d,2)$	$-(d$		$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_4$	$= 0$
$-(d,1)$		$-(d$		$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_5$	$= 0$
	$-(d,2)$			$-2m_3$	$-2m_4$	$+D_6$	$= 0$
					$-2m_4$	$+D_7$	$= 0$
$-(d,1)$	$+(d,2)$				$-2m_4$	$+D_8$	$= 0$
$+(d,1)$	$-(d,2)$				$-2m_4$	$+D_9$	$= 0$
						$+2\{0\}'$	$= 0$
$-2(d,1)$						$+2\{1\}'$	$= 0$
$-2(d,1)$	$-2(d,2)$	$-2(d$	$4m_2$			$+2\{2\}'$	$= 0$
$-2(d,1)$	$-2(d,2)$	$-2(d$		$+28m_3$		$+2\{3\}'$	$= 0$
$-2(d,1)$	$-2(d\ 2)$	$-2(d$			$+22m_4$	$+2\{4\}'$	$= 0$

$= 20,\ \varkappa = 2,\ \lambda = 4,\ \mu = 7,\ \nu = 10.$

	$-[0]_1$		$-[0]_2$		$-[0]_3$		$-[0]_4$
	$-[1]_1$		$-[1]_2$		$-[1]_3$		$-[1]_4$
$+[0]_1$	$-[2]_1$		$-[2]_2$		$-[2]_3$		$-[2]_4$
$+[1]_1$	$-[3]_1$		$-[3]_2$		$-[3]_3$		$-[3]_4$
$+[2]_1$	$-[4]_1$	$+[0]_2$	$-[4]_2$		$-[4]_3$		$-[4]_4$
$+[3]_1$	$-[5]_1$	$+[1]_2$	$-[5]_2$		$-[5]_3$		$-[5]_4$
$+[4]_1$	$-[6]_1$	$+[2]_2$	$-[6]_2$		$-[6]_3$		$-[6]_4$
$+[5]_1$	$-[7]_1$	$+[3]_2$	$-[7]_2$	$+[0]_3$	$-[7]_3$		$-[7]_4$
$+[6]_1$	$-[8]_1$	$+[4]_2$	$-[8]_2$	$+[1]_3$	$-[8]_3$		$-[8]_4$
$+[7]_1$	$-[9]_1$	$+[5]_2$	$-[9]_2$	$+[2]_3$	$-[9]_3$		$-[9]_4$
$+[8]_1$	$-[10]_1$	$+[6]_2$	$-[10]_2$	$+[3]_3$	$-[10]_3$	$+[0]_4$	$-(10)_4$
$+[9]_1$	$-[11]_1$	$+[7]_2$	$-[11]_2$	$+[4]_3$	$-[11]_3$	$+[1]_4$	
$+[10]_1$	$-[12]_1$	$+[8]_2$	$-[12]_2$	$+[5]_3$	$-[12]_3$	$+[2]_4$	
$+[11]_1$	$-[13]_1$	$+[9]_2$	$-[13]_2$	$+[6]_3$	$-[13]_3$	$+[3]_4$	
$+[12]_1$	$-[14]_1$	$+[10]_2$	$-[14]_2$	$+[7]_3$		$+[4]_4$	
$+[13]_1$	$-[15]_1$	$+[11]_2$	$-[15]_2$	$+[8]_3$		$+[5]_4$	
$+[14]_1$	$-[16]_1$	$+[12]_2$	$-[16]_2$	$+[9]_3$		$+[6]_4$	
$+[15]_1$	$-[17]_1$	$+[13]_2$		$+[10]_3$		$+[7]_4$	
$+[16]_1$	$-[18]_1$	$+[14]_2$		$+[11]_3$		$+[8]_4$	
$+[17]_1$		$+[15]_2$		$+[12]_3$		$+[9]_4$	
$+[18]_1$		$+[16]_2$		$+[18]_3$		$+[10]_4$	

Zu Art. 66.

$-(s,2)$	$+2(s,3)$	$-(s,4)$
$-(s,2)$	$-(s,3)$	$+4(s,4)$
		$-(s,4)$
		$-(s,4)$

3)	$-(s,14)$	
3)	$-(s,14)$	
3)	$+3(s,14)$	$-(s,15)$
	$-(s,14)$	$+2(s,15)$

$+2(s,3)$
$-(s,3)$

$-(s,15)$
$+2(s,15)$

$-(s,15)$
$+(s,15)$

ıgen.

s,10)					$-(s,15)$	$+S_0$	$=0$
+						$+S_1$	$=0$
-						$+S_2$	$=0$
						$+S_3$	$=0$
						$+S_4$	$=0$
s,10)						$+S_5$	$=0$
		$-(s,12)$				$+S_6$	$=0$
						$+S_7$	$=0$
s,10)						$+S_8$	$=0$
s,10)		$-(s,12)$				$+S_9$	$=0$
s,10)	$-(s,11)$	$-(s,12)$			$-(s,15)$	$+S_{10}$	$=0$
s,10)	$+2(s,11)$	$-(s,12)$				$+S_{11}$	$=0$
s,10)	$-(s,11)$	$+7(s,12)$	$-(s,13)$	$-(s,14)$	$-(s,15)$	$+S_{12}$	$=0$
		$-(s,12)$	$+2(s,13)$	$-(s,14)$		$+S_{13}$	$=0$
		$-(s,12)$	$-(s,13)$	$+3(s,14)$	$-(s,15)$	$+S_{14}$	$=0$
s,10)		$-(s,12)$		$-(s,14)$	$+4(s,15)$	$+\{15\}$	$=0$
d,10)					$-2M$	$+D_0$	$=0$
+						$+D_1$	$=0$
						$+D_2$	$=0$
						$+D_3$	$=0$
						$+D_4$	$=0$
d,10)						$+D_5$	$=0$
		$-(d,12)$				$+D_6$	$=0$
						$+D_7$	$=0$
d,10)						$+D_8$	$=0$
d,10)		$-(d,12)$				$+D_9$	$=0$
d,10)	$-(d,11)$	$-(d,12)$				$+D_{10}$	$=0$
d,10)	$+2(d,11)$	$-(d,12)$				$+D_{11}$	$=0$
d,10)	$-(d,11)$	$+9(d,12)$	$-(d,13)$	$-(d,14)$		$+D_{12}$	$=0$
		$-(d,12)$	$+2(d,13)$	$-(d,14)$		$+D_{13}$	$=0$
		$-(d,12)$	$-(d,13)$	$+5(d,14)$		$+D_{14}$	$=0$

Zu

$$\begin{array}{rr}
-(s,11) & -(s,12) \\
+2(s,11) & -(s,12) \\
-(s,11) & +3(s,12) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
-(s,12) \\
+(s,12) \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
-(s,12) \\
+(s,12) \\
\hline
-(s,12) \\
+(s,12) \\
\hline
\\
\hline
\end{array}$$

24.

hungen.

$-(s,8)$ $\quad -(s.12) \quad +S_0 = 0$

$+S_1 = 0$

$+S_2 = 0$

$+S_3 = 0$

$+S_4 = 0$

$-(s,8) \quad +S_5 = 0$

$-(s.12) \quad +S_6 = 0$

$-(s,8) \quad -(s,9) \quad +S_7 = 0$

$-(s,8) \quad -(s,12) \quad +S_8 = 0$

$+7(s,8) \quad -(s,9) \quad -(s,10) \quad -(s,12) \quad +S_9 = 0$

$-(s,8) \quad +4(s,9) \quad -(s,10) \quad -(s,11) \quad -(s,12) \quad +S_{10} = 0$

$-(s,8) \quad -(s,9) \quad +4(s,10) \quad +2(s,11) \quad -(s,12) \quad +S_{11} = 0$

$-(s,10) \quad +2(s,11) \quad +6(s,12) \quad +\{12\} = 0$

$-(s,8) \quad -(s,9) \quad -(s,10) \quad -(s,11)$

$-2M \quad +D_0 = 0$

$-(d,8) \quad +D_1 = 0$

$+D_2 = 0$

$+D_3 = 0$

$+D_4 = 0$

$-(d,8) \quad +D_5 = 0$

$+D_6 = 0$

$-(d,8) \quad -(d,9) \quad +D_7 = 0$

$-(d,8) \quad +D_8 = 0$

$+9(d,8) \quad -(d,9) \quad -(d,10) \quad +D_9 = 0$

$-(d,8) \quad +4(d,9) \quad -(d,10) \quad +D_{10} = 0$

$-(d,8) \quad -(d,9) \quad +4(d,10) \quad -(d,11) \quad +D_{11} = 0$

$-(d,10) \quad +2(d,11)$

ÜBER DIE DARSTELLUNG

DER

GRADEN AUFSTEIGUNG UND ABWEICHUNG

DES MONDES

IN FUNCTION

DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE.

VON

P. A. HANSEN

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des X. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ VIII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

Der Druckerei übergeben den 2. Mai 1874.
Der Abdruck vollendet den 13. Juni 1874.

ÜBER DIE DARSTELLUNG

DER

GRADEN AUFSTEIGUNG UND ABWEICHUNG

DES MONDES

IN FUNCTION

DER LÄNGE IN DER BAHN UND DER KNOTENLÄNGE.

VON

P. A. HANSEN.

Unsere bisherigen Mondtafeln geben nicht die grade Aufsteigung und Abweichung, sondern die Länge und Breite des Mondes. Um aus diesen jene zu erhalten, muss man die sphärische Trigonometrie anwenden, nemlich ein sphärisches Dreieck berechnen, in welchem die Mondlänge und Breite nebst der Schiefe der Ecliptik die gegebenen, und die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes die gesuchten Stücke sind. Wenngleich die Berechnung Eines solchen Dreiecks keine grosse Arbeit verursacht, so wächst dieselbe doch bedeutend an, wenn Hunderte von Mondörtern zu berechnen sind, und eine Abkürzung dieser Rechnung ist daher wünschenswerth. Sie ist um so mehr zu wünschen, weil das allgemeine Bedürfniss der Astronomie mehr auf die Erlangung der graden Aufsteigungen und Abweichungen, als auf die der Längen und Breiten gerichtet ist, und man in bei Weitem den meisten Fällen diese nur als ein bis jetzt nicht zu umgehendes Hülfsmittel zur Erlangung jener berechnet.

Eine Abkürzung des genannten Verfahrens kann man nur dadurch zu erlangen hoffen, dass man die Mondtafeln so einrichtet, dass sie die grade Aufsteigung und Abweichung unmittelbar geben, damit die Auflösung des obengenannten sphärischen Dreiecks vermieden werde. Wenn man hiebei wieder von der Länge und Breite ausgehen wollte, so würde man gewiss sich keine Erleichte-

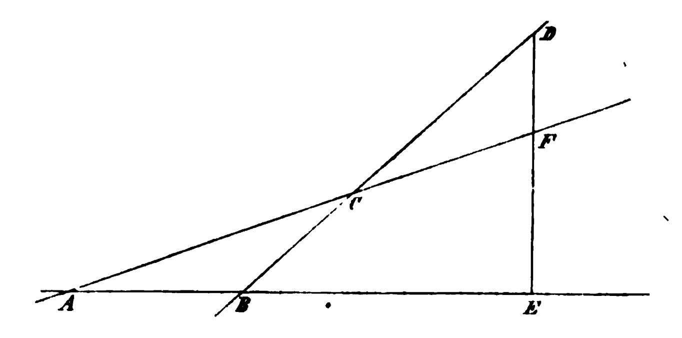
Anmerkung. Der Verfasser beabsichtigte die nachstehende, vor Herausgabe der »Mondtafeln« niedergeschriebene Abhandlung, behufs ihrer Veröffentlichung mit einer abgeänderten Einleitung zu versehen. Man hat geglaubt, nach dem erfolgten Ableben des Verfassers den unveränderten Wortlaut beibehalten zu sollen.

rung verschaffen können, aber wenn man diese hiebei gänzlich umgeht, und die Länge des Mondes in seiner Bahn als Ausgangspunkt wählt, so kann man eine Erleichterung des bisherigen Verfahrens erwarten. Es tritt nun aber beim Monde der bei den Planeten nicht vorkommende Umstand ein, dass die Bewegung der Mondknoten sehr schnell ist und die periodischen Veränderungen, welche die Lage der Mondbahn durch die störenden Kräfte erleidet, nicht unbedeutend sind. Die Mondknoten bewegen sich in ungefähr 19 Jahren um den ganzen Himmel, die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik erleidet periodische Veränderungen, die 16′ übersteigen, und die wahre Länge der Mondknoten mit der Ecliptik ist Schwankungen unterworfen, die mehr als 2° 40′ betragen. Diese Umstände verursachen, dass die Aufgabe, von der hier geredet wird, mit eigenthümlichen Schwierigkeiten behaftet ist.

Vermöge der eben angeführten Umstände zerfällt die Auflösung dieser Aufgabe in zwei Theile, deren erster die Glieder in Betracht zieht, die aus der schnellen retrograden Bewegung der Mondknoten entstehen, und deren zweiter den Einfluss der periodischen Aenderungen der Lage der Mondbahn berücksichtigt. Ich werde mich hier auf die Darlegung meiner Auflösung des ersten Theils der Aufgabe beschränken, und die des zweiten Theils auf eine andere Zeit und einen anderen Ort verschieben.

1.

In der nachstehenden Figur sollen alle graden Linien grösste Kreise auf der Kugel, und zwar AE den Aequator, AF die Ecliptik und BD die Mondbahn bedeuten. Bei E soll ein rechter Winkel sein.



Nehmen wir den Durchschnittspunkt A für das Frühlingsäquinox an, dann ist CAB die Schiefe der Ecliptik, AC die Länge des aufsteigenden Mondknotens, DCF die Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik. Wenn ferner D den gleichzeitigen Mondort bedeutet, dann ist DC das Argument der Breite des Mondes, $DC+CA$ seine Länge in der Bahn, AE seine grade Aufsteigung und DE seine Abweichung.

Die Bezeichnungen, die ich nun anwenden werde, sind die folgenden:

$$DC = W;\quad CB = N''-K''-\Theta;$$
$$AB = 360^0 - N'' - K'';\quad AC = 360^0 - \Theta;$$
$$CAB = J''_{\prime\prime};\quad DCF = J_{\prime};\quad DBE = J'';$$
$$AE = Æ;\quad DE = \delta.$$

Diese Bezeichnung ist der im siebenten Abschnitte meiner »Fundamenta nova investigationis etc.« eingeführten analog, von welchem Abschnitte in der That die gegenwärtige Aufgabe ein Theil der Fortsetzung ist. Die in dieser Bezeichnung angewandten Grössen besitzen die Eigenschaft, dass die periodischen, den zweiten hier zu übergehenden Theil der Auflösung bildenden Glieder leicht und sicher durch sie dargestellt werden können. Betrachten wir nun das rechtwinklige sphärische Dreieck DEB, so giebt uns die Trigonometrie folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta\sin(Æ+N''+K'') &= \cos J''\sin(W-\Theta+N''-K'') \\ \cos\delta\cos(Æ+N''+K'') &= \cos(W-\Theta+N''-K'') \\ \sin\delta &= \sin J''\sin(W-\Theta+N''-K'') \end{aligned}\right\}\quad (1)$$

wozu ich bemerke, dass $W-\Theta$ die Länge des Mondes in seiner Bahn ausdrückt. Durch Auflösung der zusammengesetzten Sinus und Cosinus verwandelt man diese Gleichungen leicht in die folgenden:

$$\begin{aligned} \cos\delta\sin Æ &= \sin W\{\cos J''\cos(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')+\sin(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')\} \\ &\quad +\cos W\{\cos J''\sin(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')-\cos(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')\} \\ \cos\delta\cos Æ &= \sin W\{\cos J''\cos(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')-\sin(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')\} \\ &\quad +\cos W\{\cos J''\sin(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')+\cos(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')\} \\ \sin\delta &= \sin W\sin J''\cos(N''-K''-\Theta)+\cos W\sin J''\sin(N''-K''-\Theta) \end{aligned}$$

Vermöge des Dreiecks ABC erhalten wir aber aus der sphärischen Trigonometrie folgende Relationen:

$$\cos J''\cos(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')+\sin(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'') = \cos J'_{,,}\cos J_{,}\cos\Theta-\sin J'_{,,}\sin J_{,}$$

$$\cos J''\sin(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'')-\cos(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'') = -\cos J'_{,,}\sin\Theta$$

$$\cos J''\cos(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')-\sin(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'') = \cos J_{,}\sin\Theta$$

$$\cos J''\sin(N''-K''-\Theta)\sin(N''+K'')+\cos(N''-K''-\Theta)\cos(N''+K'') = \cos\Theta$$

$$\sin J''\cos(N''-K''-\Theta) = \sin J'_{,,}\cos J_{,}\cos\Theta+\cos J'_{,,}\sin J_{,}$$

$$\sin J''\sin(N''-K''-\Theta) = -\sin J'_{,,}\sin\Theta$$

womit man die Grössen J'', N'' und K'' aus den vorstehenden Gleichungen eliminiren kann. Nachdem diess geschehen ist, und man die Producte der Sinus und Cosinus von W und Θ in linearische Sinus und Cosinus verwandelt hat, bekommt man:

$$\cos\delta\sin A\!\!R = \cos J'_{,,}\cos^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin(W-\Theta)-\sin J'_{,,}\sin J_{,}\sin W - \cos J'_{,,}\sin^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin(W+\Theta)$$

$$\cos\delta\cos A\!\!R = \cos^2\tfrac{1}{2}J_{,}\cos(W-\Theta)+\sin^2\tfrac{1}{2}J_{,}\cos(W+\Theta)$$

$$\sin\delta = \sin J'_{,,}\cos^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin(W-\Theta)+\cos J'_{,,}\sin J_{,}\sin W - \sin J'_{,,}\sin^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin(W+\Theta)$$

wodurch die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes schon in Function der Länge in der Bahn und der Knotenlänge dargestellt ist.

2.

Die eben gefundenen Gleichungen zeigen, dass von den drei Gruppen $\cos\delta\sin A\!\!R$, $\cos\delta\cos A\!\!R$, und $\sin\delta$ die erste und dritte aus drei und die zweite aus zwei Gliedern besteht, welche je Eine veränderliche Grösse enthalten. Diese acht Glieder liessen sich also in eben so viele Tafeln von einfachen Argumenten bringen, und wenn diess geschehen wäre, so könnte man in jedem vorliegenden Falle daraus die numerischen Werthe der genannten drei Gruppen berechnen, woraus man dann durch logarithmisch-trigonometrische Berechnung zu $A\!\!R$ und δ selbst übergehen könnte. Nun kann man zwar, vermöge der numerischen Werthe von $J'_{,,}$ und $J_{,}$, welche in der Natur stattfinden, die Glieder, aus denen $\sin\delta$ besteht, in drei Tafeln bringen, die, ohne unpractische Ausdehnung zu besitzen, in der Anwendung bequem werden; man kann sogar diese Tafeln so einrichten, dass man aus ihnen ohne Anwendung von trigonometrischer Rechnung δ selbst statt $\sin\delta$ erhält. Man muss zu dem Ende

die Coefficienten $\sin J'_{\prime\prime}\cos^2\frac{1}{2}J_{\prime}$, $\cos J'_{\prime\prime}\sin J_{\prime}$ und $\sin J'_{\prime\prime}\sin^2\frac{1}{2}J_{\prime}$ in den Tafeln nicht in Theilen des Radius, sondern in Theilen des Umfanges des Kreises (in Graden, Minuten und Secunden) ausdrücken und eine Tafel hinzufügen, die den Unterschied zwischen dem Bogen und dem ihm zukommenden Sinus giebt. Die beiden Gleichungen für $\cos\delta\sin A\!\!R$ und $\cos\delta\cos A\!\!R$ lassen sich aber nicht so bequem in Tafeln bringen, da die beiden Glieder $\cos J'_{\prime\prime}\cos^2\frac{1}{2}J_{\prime}\sin(W-\Theta)$ und $\cos^2\frac{1}{2}J_{\prime}\cos(W-\Theta)$ fast von -1 bis $+1$ variiren und mit sieben Decimalstellen angesetzt werden müssten; um hier bequem anzuwendende Tafeln zu erhalten, müsste man ihnen eine bedeutend grosse Ausdehnung geben. Es kommt hier noch hinzu, dass die Berücksichtigung der von der Veränderung der Mondbahn abhängigen periodischen Glieder in diesen Gleichungen sich weitläuftiger herausstellt, als sie in der That ist. Die Berücksichtigung dieser Glieder in der Gleichung für $\sin\delta$ ist dagegen einfach. Durch die Entwickelung von $A\!\!R$ in eine unendliche Reihe aus den beiden ersten in Rede stehenden Gleichungen erlangt man freilich Glieder, die sich alle in nicht zu grosse und doch bequeme Tafeln bringen lassen; es entstehen aber dadurch der Glieder und also auch der erforderlichen Tafeln zu viele, als dass daraus ein namhafter Vortheil erwüchse. Um diess klar darzuthun, werde ich die bezeichnete Reihenentwickelung ausführen.

3.

Sei c die Grundzahl der hyperbolischen Logarithmen und $\varrho=\sqrt{-1}$, dann ist bekanntlich, wenn z irgend einen reellen Kreisbogen bezeichnet,

$$2\cos z = c^{\varrho z}+c^{-\varrho z}\,;\quad 2\varrho\sin z = c^{\varrho z}-c^{-\varrho z}\,.$$

Wenden wir diese allgemeinen Gleichungen auf die obigen Werthe von $\cos\delta\sin A\!\!R$ und $\cos\delta\cos A\!\!R$ an, so ergiebt sich:

$$\cos\delta\,(c^{\varrho A\!\!R}-c^{-\varrho A\!\!R}) = \cos J'_{\prime\prime}\cos^2\tfrac{1}{2}J_{\prime}\,(c^{\varrho(W-\Theta)}-c^{-\varrho(W-\Theta)})$$
$$-\sin J'_{\prime\prime}\sin J_{\prime}\,(c^{\varrho W}-c^{-\varrho W})-\cos J'_{\prime\prime}\sin^2\tfrac{1}{2}J_{\prime}\,(c^{\varrho(W+\Theta)}-c^{-\varrho(W+\Theta)})$$

$$\cos\delta\,(c^{\varrho A\!\!R}+c^{-\varrho A\!\!R}) = \cos^2\tfrac{1}{2}J_{\prime}\,(c^{\varrho(W-\Theta)}+c^{-\varrho(W-\Theta)})$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J_{\prime}\,(c^{\varrho(W+\Theta)}+c^{-\varrho(W+\Theta)})$$

Addirt man diese beiden Gleichungen, multiplicirt ihre Summe mit $\frac{c^{-\varrho(W-\Theta)}}{(1+\cos J'_{\prime\prime})\cos^2\frac{1}{2}J,}$, und setzt zur Abkürzung

$$\eta = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}J'_{\prime\prime},\quad \lambda = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}J,$$

so bekommt man:

$$\frac{2\cos\delta\, c^{\varrho(\mathcal{R}-W+\Theta)}}{(1+\cos J'_{\prime\prime})\cos^2\frac{1}{2}J,} =$$

$$= 1+\eta^2 c^{-2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{-\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{-2\varrho W} + \eta^2\lambda^2 c^{2\varrho\Theta}$$

und wenn man hierin $-\varrho$ für ϱ schreibt

$$\frac{2\cos\delta\, c^{-\varrho(\mathcal{R}-W+\Theta)}}{(1+\cos J'_{\prime\prime})\cos^2\frac{1}{2}J,} =$$

$$= 1+\eta^2 c^{2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{-\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{2\varrho W} + \eta^2\lambda^2 c^{-2\varrho\Theta}$$

Dividirt man die erste durch die zweite, und nimmt von jeder Seite der Gleichung den hyperbolischen Logarithmus, so entsteht

$$2\varrho(\mathcal{R}-W+\Theta) =$$

$$= \log\left(1+\eta^2 c^{-2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{-\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{-2\varrho W} + \eta^2\lambda^2 c^{2\varrho\Theta}\right)$$

$$-\log\left(1+\eta^2 c^{2\varrho(W-\Theta)} - 2\eta\lambda c^{-\varrho\Theta} + 2\eta\lambda c^{\varrho(2W-\Theta)} + \lambda^2 c^{2\varrho W} + \eta^2\lambda^2 c^{-2\varrho\Theta}\right)$$

Entwickelt man nun auf bekannte Art die beiden hier vorkommenden Logarithmen in unendliche Reihen, und geht hierauf von den imaginären Grössen zu den reellen Sinus über, so bekommt man folgende Reihe, die ich so weit fortgesetzt habe, dass man jeden Coefficienten bis auf 0",01 genau haben kann:

$$\mathcal{R} = W-\Theta-2\eta\lambda\sin\Theta-\eta^2\lambda^2\sin 2\Theta-\tfrac{2}{3}\eta^3\lambda^3\sin 3\Theta-\tfrac{1}{2}\eta^4\lambda^4\sin 4\Theta-\text{etc.}$$

$$-\lambda^2\sin 2W-(2\eta\lambda+2\eta\lambda^3)\sin(2W-\Theta)-(\eta^2+4\eta^2\lambda^2+3\eta^2\lambda^4)\sin(2W-2\Theta)$$
$$-(2\eta^3\lambda+6\eta^3\lambda^3+8\eta^3\lambda^5)\sin(2W-3\Theta)-(3\eta^4\lambda^2+16\eta^4\lambda^4)\sin(2W-4\Theta)$$
$$-4\eta^5\lambda^3\sin(2W-5\Theta)-\text{etc.}$$

$$+\tfrac{1}{2}\lambda^4\sin 4W+(2\eta\lambda^3+2\eta\lambda^5)\sin(4W-\Theta)+(3\eta^2\lambda^2+8\eta^2\lambda^4)\sin(4W-2\Theta)$$
$$+(2\eta^3\lambda+12\eta^3\lambda^3+24\eta^3\lambda^5)\sin(4W-3\Theta)+(\tfrac{1}{2}\eta^4+8\eta^4\lambda^2+36\eta^4\lambda^4)\sin(4W-4\Theta)$$
$$+(2\eta^5\lambda+20\eta^5\lambda^3)\sin(4W-5\Theta)+5\eta^6\lambda^2\sin(4W-6\Theta)+16\eta^7\lambda^3\sin(4W-7\Theta)$$
$$+\text{etc.}$$

$$-2\eta\lambda^5 \sin(6W-\Theta) - 5\eta^2\lambda^4 \sin(6W-2\Theta) - \tfrac{20}{3}\eta^3\lambda^3 \sin(6W-3\Theta)$$
$$-(5\eta^4\lambda^2+40\eta^4\lambda^4)\sin(6W-4\Theta) - (2\eta^5\lambda+30\eta^5\lambda^3)\sin(6W-5\Theta)$$
$$-(\tfrac{1}{3}\eta^6+12\eta^6\lambda^2+120\eta^6\lambda^4)\sin(6W-6\Theta) - (2\eta^7\lambda+48\eta^7\lambda^3)\sin(6W-7\Theta)$$
$$-8\eta^8\lambda^2\sin(6W-8\Theta) - \text{etc.}$$

$$+\tfrac{35}{2}\eta^4\lambda^4\sin(8W-4\Theta) + 14\eta^5\lambda^3\sin(8W-5\Theta)$$
$$+(7\eta^6\lambda^2+112\eta^6\lambda^4)\sin(8W-6\Theta) + (2\eta^7\lambda+56\eta^7\lambda^3)\sin(8W-7\Theta)$$
$$+(\tfrac{1}{4}\eta^8+16\eta^8\lambda^2)\sin(8W-8\Theta) + 2\eta^9\lambda\sin(8W-9\Theta) + \text{etc.}$$

$$-24\eta^7\lambda^3\sin(10W-7\Theta) - 9\eta^8\lambda^2\sin(10W-8\Theta) - 2\eta^9\lambda\sin(10W-9\Theta)$$
$$-\tfrac{1}{5}\eta^{10}\sin(10W-10\Theta) - \text{etc.}$$

Nimmt man nun

$$J''_{,,} = 23^0\,27'\,54''\,80\,,\quad J_{,} = 5^0\,8'\,48''$$

an und substituirt diese Zahlenwerthe, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Æ} = W - \Theta & - 1^0\ 4'\,10'',55 \sin\Theta \\
& - 17,97 \sin 2\Theta \\
& - 0,11 \sin 3\Theta \\
& - 6'\,56,64 \sin 2W \\
& - 1^0\ 4'\,18,33 \sin(2W-\Theta) \\
& - 2^0\,29'\,28,71 \sin(2W-2\Theta) \\
& - 2'\,47,08 \sin(2W-3\Theta) \\
& - 2,35 \sin(2W-4\Theta) \\
& - 0,03 \sin(2W-5\Theta) \\
& + 0,42 \sin 4W \\
& + 7'',80 \sin(4W-\Theta) \\
& + 54,20 \sin(4W-2\Theta) \\
& + 2'\,48,10 \sin(4W-3\Theta) \\
& + 3'\,18,13 \sin(4W-4\Theta) \\
& + 7,30 \sin(4W-5\Theta) \\
& + 0,17 \sin(4W-6\Theta) \\
& - 0'',02 \sin(6W-\Theta) \\
& - 0,18 \sin(6W-2\Theta) \\
& - 1,12 \sin(6W-3\Theta) \\
& - 3,94 \sin(6W-4\Theta) \\
& - 7,38 \sin(6W-5\Theta) \\
& - 5,93 \sin(6W-6\Theta) \\
& - 0,32 \sin(6W-7\Theta) \\
& - 0,01 \sin(6W-8\Theta) \\
& + 0,03 \sin(8W-4\Theta) \\
& + 0,10 \sin(8W-5\Theta) \\
& + 0,24 \sin(8W-6\Theta) \\
& + 0,33 \sin(8W-7\Theta) \\
& + 0,20 \sin(8W-8\Theta) \\
& + 0,01 \sin(8W-9\Theta) \\
& - 0,01 \sin(10W-7\Theta) \\
& - 0,01 \sin(10W-8\Theta) \\
& - 0,01 \sin(10W-9\Theta) \\
& - 0,01 \sin(10W-10\Theta)
\end{aligned}
$$

Die Anzahl der Glieder dieses Ausdrucks der Reduction der Mondlänge auf den Aequator ist 34; da sie bloss von den zwei Argumenten W und Θ, oder $W-\Theta$ und Θ abhängen, so wäre es nicht unmöglich, sie alle in Eine Tafel mit diesen zwei Argumenten zu vereinigen. Aber eine solche Tafel würde eine übermässig grosse

Ausdehnung bekommen müssen, um practisch werden zu können. Diese Ausdehnung würde so gross sein, dass sie selbst ein Hinderniss für ihre bequeme Anwendung bilden würde. Man muss daher jedenfalls den vorstehenden Ausdruck, wenn man ihn anwenden will, in Tafeln von einfachen Argumenten redigiren. Solcher erfordert er aber, wenn man keine Glieder übergehen will, nicht weniger wie 23, und diese Anzahl würde sich durch Uebergehung der kleinen Glieder nur wenig vermindern. Es wird daher jedenfalls durch Anwendung dieses Ausdrucks die unmittelbare Berechnung der graden Aufsteigung des Mondes aus den Mondtafeln mühsam und zeitraubend, und man würde sie aufgeben müssen, wenn es unmöglich wäre, andere und einfachere Ausdrücke dafür zu finden.

4.

Um einen einfacheren Ausdruck wie den vorhergehenden zu finden, ist es nothwendig, die beiden Argumente oder veränderlichen Grössen, von welchen er abhängt, möglichst von einander abzusondern und den Ausdruck in Factoren zu zerlegen, von denen der eine nur die eine, und der andere nur die andere, oder vielmehr überhaupt auch nur Eine veränderliche Grösse enthält. Die Transformationen, durch welche ich diess bewirkt habe, werde ich im Folgenden zuerst im Allgemeinen angeben, und dann speciell auf die vorliegende Aufgabe anwenden.

Seien in einem beliebigen rechtwinkligen sphärischen Dreiecke $v-\sigma$ die Hypotenuse, $l-\theta$ und b die Katheten, so wie i der der Seite b gegenüberliegende Winkel. Dann ist allgemein:

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned} \cos b \sin(l-\theta) &= \cos i \sin(v-\sigma) \\ \cos b \cos(l-\theta) &= \cos(v-\sigma) \\ \sin b &= \sin i \sin(v-\sigma) \end{aligned}\right.$$

Diese Formeln habe ich in folgende umgewandelt:

$$(3) \quad \left\{\begin{aligned} \cos b \sin(l-\Pi) &= \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s_0 \left\{\operatorname{tg} i_0 + \frac{q_0}{k \cos i_0}\right\} \\ \cos b \cos(l-\Pi) &= \cos(v-\theta_0) + s_0 \frac{p}{k} \\ \sin b &= \sin i_0 \sin(v-\theta_0) + s_0 \end{aligned}\right.$$

wo

$$\left.\begin{aligned}
p &= \sin i \sin(\sigma - \theta_0)\\
q_0 &= \sin i \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i_0\\
k &= \cos i_0 (\cos i + \cos i_0) - q_0 \sin i_0\\
s_0 &= q_0 \sin(v - \theta_0) - p \cos(v - \theta_0)\\
\sin(\theta - \Pi) &= \frac{\cos i + \cos i_0}{k} \sin(\sigma - \theta_0)\\
\cos(\theta - \Pi) &= \frac{(1 + \cos i \cos i_0) \cos(\sigma - \theta_0) - \sin i \sin i_0}{k}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

i_0 und θ_0 hingegen durchaus willkürliche Grössen sind, die man nach Belieben bestimmen kann.

Die Ableitung dieser Gleichungen übergehe ich hier, weil ich sie bereits an einem anderen Orte gegeben habe; man kann sie indess auch ohne diese verificiren. Wenn man nemlich die Ausdrücke (4) in (3) substituirt und gehörig reducirt, so wird man finden, dass i_0 und θ_0 von selbst verschwinden und die Gleichungen (2) daraus hervorgehen, woraus die Richtigkeit der (3) und (4) schon folgt. Ich füge hinzu, dass die hier eingeführten Grössen i_0, θ_0, Π, etc. sich auf sehr einfache Weise geometrisch construiren lassen.

Um eine Anwendung der Gleichungen (3) anzudeuten, seien i und θ die mit der Zeit veränderliche Neigung und Länge des aufsteigenden Knotens irgend eines Himmelskörpers zum Aequator, σ die Entfernung des in der Bahn gewählten Anfangspunkts der Längen von diesem Knoten, v die Länge des Himmelskörpers in seiner Bahn, dann sind l und b seine grade Aufsteigung und Abweichung. Wählt man nun z. B. für i_0 und θ_0 die Neigung und Knotenlänge, die in irgend einem bestimmten Zeitpunkt stattfand, so sind s_0, p, q_0 und Π kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte, die die Lage der Bahn des Himmelskörpers im Raum zu verändern streben. Diese Glieder erscheinen in den Gleichungen (3) von den Hauptgliedern abgesondert, und können, da sie so einfach sind, leicht entweder in der endlichen Form, in welcher sie daselbst vorkommen, oder in sehr stark convergirende Reihen aufgelöst, auf die einfachste Weise berücksichtigt werden. In den Fällen, wo in Bezug auf die Zeit $\delta\theta = \frac{\delta\sigma}{\cos i}$ ist, nehmen die obigen Ausdrücke für Π eine noch einfachere Form an, und gehen in folgenden über:

$$\Pi = \int \frac{q_0 \delta p - p \delta q_0}{k \cos i}$$

Ich kann diess jedoch hier nur beiläufig erwähnen, denn die Anwendung, die ich im Folgenden von den aufgestellten Gleichungen machen werde, ist eine ganz andere.

5.

Entwickeln wir durch die beiden ersten Gleichungen (3) den Ausdruck des Bogens l in eine unendliche Reihe. Setzen wir

$$(5) \ldots \left\{\begin{aligned} \frac{p}{k} &= A\sin w_0 \\ \operatorname{tg} i_0 + \frac{q_0}{k\cos i_0} &= A\cos w_0 \end{aligned}\right.$$

dann gehen die genannten Gleichungen über in:

$$\cos b \sin(l-\Pi) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s_0 A\cos w_0$$
$$\cos b \cos(l-\Pi) = \cos(v-\theta_0) + s_0 A\sin w_0$$

und wenn wir die imaginären Exponentialfunctionen einführen, in

$$\cos b(c^{\varrho(l-\Pi)} - c^{-\varrho(l-\Pi)}) = \cos i_0(c^{\varrho(v-\theta_0)} - c^{-\varrho(v-\theta_0)}) - s_0 A\,(c^{\varrho w_0} + c^{-\varrho w_0})$$

$$\cos b(c^{\varrho(l-\Pi)} + c^{-\varrho(l-\Pi)}) = c^{\varrho(v-\theta_0)} + c^{-\varrho(v-\theta_0)} - \varrho s_0 A\,(c^{\varrho w_0} - c^{-\varrho w_0})$$

Durch Addition und Division mit $(1 + \cos i_0)\, c^{\varrho(v-\theta_0)}$ ergiebt sich hieraus:

$$\frac{2\cos b}{1+\cos i_0}\, c^{\varrho(l-\Pi-v+\theta_0)} = 1 + \varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)} - \varrho\varkappa s_0 c^{-\varrho(v-\theta_0-w_0)}$$

wo

$$(6) \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon = \operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2} i_0, \quad \varkappa = \frac{2A}{1+\cos i_0}$$

Setzt man in dieser Gleichung $-\varrho$ für ϱ, so entsteht die folgende analoge

$$\frac{2\cos b}{1+\cos i_0}\, c^{-\varrho(l-\Pi-v+\theta_0)} = 1 + \varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)} + \varrho\varkappa s_0 c^{\varrho(v-\theta_0-w_0)}$$

Dividirt man jene durch diese und nimmt die hyperbolischen Logarithmen, so erhält man

$$(7) \left\{\begin{aligned} 2\varrho(l-\Pi-v+\theta_0) &= \log(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)} - \varrho\varkappa s_0 c^{-\varrho(v-\theta_0-w_0)}) \\ &\quad - \log(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)} + \varrho\varkappa s_0 c^{\varrho(v-\theta_0-w_0)}) \end{aligned}\right.$$

Lösen wir nun die Logarithmen in unendliche Reihen auf, und gehen von dem Imaginären zu dem Reellen über, so bekommen wir

$$
\begin{aligned}
l = v - \theta_0 + \Pi - \varepsilon \sin 2(v-\theta_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 4(v-\theta_0) - \tfrac{1}{3}\varepsilon^3 \sin 6(v-\theta_0) \\
+ \tfrac{1}{4}\varepsilon^4 \sin 8(v-\theta_0) \mp \text{etc.} \\
- \varkappa s_0 \{\cos(v-\theta_0-w_0) - \tfrac{2}{2}\varepsilon \cos(3v-3\theta_0-w_0) + \tfrac{3}{3}\varepsilon^2 \cos(5v-5\theta_0-w_0) \\
- \tfrac{4}{4}\varepsilon^3 \cos(7v-7\theta_0-w_0) \pm \text{etc.}\} \\
- \varkappa^2 s_0^2 \{\tfrac{1}{2}\sin(2v-2\theta_0-2w_0) - \tfrac{3}{3}\varepsilon \sin(4v-4\theta_0-2w_0) + \tfrac{6}{4}\varepsilon^2 \sin(6v-6\theta_0-2w_0) \\
- \tfrac{10}{5}\varepsilon^3 \sin(8v-8\theta_0-2w_0) \pm \text{etc.}\} \\
+ \varkappa^3 s_0^3 \{\tfrac{1}{3}\cos(3v-3\theta_0-3w_0) - \tfrac{4}{4}\varepsilon \cos(5v-5\theta_0-3w_0) + \tfrac{10}{5}\varepsilon^2 \cos(7v-7\theta_0-3w_0) \\
- \tfrac{20}{6}\varepsilon^3 \cos(9v-9\theta_0-3w_0) \pm \text{etc.}\} \\
+ \varkappa^4 s_0^4 \{\tfrac{1}{4}\sin(4v-4\theta_0-4w_0) - \tfrac{5}{5}\varepsilon \sin(6v-6\theta_0-4w_0) + \tfrac{15}{6}\varepsilon^2 \cos(8v-8\theta_0-4w_0) \\
- \tfrac{35}{7}\varepsilon^3 \sin(10v-10\theta_0-4w_0) \pm \text{etc.}\} \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Diese Reihen schreiten nach so einfachen Gesetzen fort, dass ihre beliebige Fortsetzung nur die Mühe des Hinschreibens kostet. Ueber das Gesetz des Fortschreitens der Bögen unter dem Sinus- und Cosinuszeichen, der Nenner und der algebraischen Vorzeichen braucht hier Nichts gesagt zu werden; über die numerischen Zähler ist bloss zu bemerken, dass zwischen je drei derselben, die in irgend zwei aufeinanderfolgenden Reihen folgende Stellung gegeneinander einnehmen:

$$
b \quad {}^{a} \quad c
$$

wenn man von ihren Vorzeichen absieht, die Gleichung

$$
c = a + b
$$

stattfindet, durch welche man sie fortsetzen kann, so weit man will.

6.

Man kann die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\varkappa s_0$ auch durch endliche Ausdrücke geben. Man gelangt dahin, wenn man die Gleichung (7) wie folgt umstellt:

$$
\begin{aligned}
2\varrho(l-\Pi-v+\theta_0) = \log(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}) - \log(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)}) \\
+ \log\left(1 - \frac{\varrho \varkappa s_0 c^{-\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}}\right) - \log\left(1 + \frac{\varrho \varkappa s_0 c^{\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)}}\right)
\end{aligned}
$$

Löst man die beiden letzten Logarithmen in unendliche Reihen auf, so ergiebt sich zuerst

$$2\varrho(l-II-v+\theta_0) = \log(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}) - \log(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)})$$

$$-\varrho\varkappa s_0\left\{\frac{c^{\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)}} + \frac{c^{-\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}}\right\}$$

$$-\frac{1}{2}\varkappa^2 s_0^2\left\{\frac{c^{2\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)})^2} - \frac{c^{-2\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-\varrho(v-\theta_0)})^2}\right\}$$

$$+\frac{1}{3}\varrho\varkappa^3 s_0^3\left\{\frac{c^{3\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)})^3} + \frac{c^{-3\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)})^3}\right\}$$

$$+\frac{1}{4}\varkappa^4 s_0^4\left\{\frac{c^{4\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)})^4} - \frac{c^{-4\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)})^4}\right\}$$

Wenn man hier die beiden Glieder eines jeden der Coefficienten von $\varkappa s_0$, $\varkappa^2 s_0^2$, etc. auf gleichen Nenner bringt, so giebt sich ihre Transformation in Sinus und Cosinus sogleich zu erkennen. Die beiden Logarithmen, die in diesem Ausdrucke vorkommen, verwandelt man durch folgende Betrachtungen in einen Kreisbogen.

Seien allgemein a, b, d, e irgend welche reelle Grössen, zwischen denen die Gleichung stattfindet

$$\log(a+\varrho b) = d+\varrho e$$

wo wie vorher $\varrho = \sqrt{-1}$ ist. Geht man zu den Exponentialfunctionen über, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$a+\varrho b = c^{d+\varrho e} = c^d(\cos e+\varrho\sin e)$$

und da diese Gleichung identisch sein muss, so folgt daraus, dass

$$a = c^d\cos e,\quad b = c^d\sin e$$

mithin

$$a^2+b^2 = c^{2d},\ \text{oder}\ d = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2),\ \text{und}\ e = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

Wir erhalten also identisch

$$\log(a+\varrho b) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)+\varrho\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

und ebenso bekommen wir

$$\log(a-\varrho b) = \tfrac{1}{2}\log(a^2+b^2)-\varrho\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a}$$

Wenden wir diesen Satz auf die obige Gleichung an, so ist

$$\log(a-\varrho b) = \log(1+\varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)})$$

$$= \log(1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)-\varrho\varepsilon\sin 2(v-\theta_0))$$

also

$$a = 1 + \varepsilon\cos 2(v - \theta_0)\,, \quad b = \varepsilon\sin 2(v - \theta_0)\,,$$

folglich

$$\log(1 + \varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}) - \log(1 + \varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)}) = -2\varrho\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varepsilon\sin 2(v-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)}$$

Die obige Gleichung geht daher in folgende über:

$$l = v + \Pi - \theta_0 - \mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon\sin 2(v-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)}$$

$$-\varkappa s_0\,\frac{\cos(v-\theta_0-w_0)+\varepsilon\cos(v-\theta_0+w_0)}{1+2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)+\varepsilon^2}$$

$$-\varkappa^2 s_0^2\,\frac{\sin 2(v-\theta_0-w_0)-2\varepsilon\sin 2w_0-\varepsilon^2\sin 2(v-\theta_0+w_0)}{2(1+2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)+\varepsilon^2)^2}$$

$$+\varkappa^3 s_0^3\,\frac{\cos 3(v-\theta_0-w_0)+3\varepsilon\cos(v-\theta_0-3w_0)+3\varepsilon^2\cos(v-\theta_0+3w_0)+\varepsilon^3\cos 3(v-\theta_0+w_0)}{3(1+2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)-\varepsilon^2)^3}$$

$$+\varkappa^4 s_0^4\,\frac{\sin 4(v-\theta_0-w_0)+4\varepsilon(2v-2\theta_0-4w_0)-6\varepsilon^2\sin 4w_0-4\varepsilon^3\sin(2v-2\theta_0+4w_0)-\varepsilon^4\sin 4(v-\theta_0+w_0)}{4(1+2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)+\varepsilon^2)^4}$$

etc. etc.

wo das Gesetz des Fortganges ebenfalls deutlich zu erkennen ist. Zu bemerken ist ausserdem, dass zufolge der Gleichungen (3) und (6) der Artt. 4 und 5

$$1 + 2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0) + \varepsilon^2 = (1+\varepsilon)^2\cos^2 b_0 = (1+\varepsilon)^2(1-\sin^2 i_0\sin^2(v-\theta_0))$$

7.

Man kann auch die unendliche Reihe des vorstehenden Ausdrucks von l in einen durch seine Tangente gegebenen Kreisbogen verwandeln. Setzen wir

$$\varepsilon' c^{\varrho(\mu-w_0)} = \frac{c^{\varrho(v-\theta_0-w_0)}}{1+\varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)}}$$

und substituiren diesen Ausdruck in die erste Gleichung des vor. Art., so wird:

$$2\varrho(l - \Pi - v + \theta_0) = \log(1 + \varepsilon c^{-2\varrho(v-\theta_0)}) - \log(1 + \varepsilon c^{2\varrho(v-\theta_0)})$$
$$+\log(1 - \varrho\varkappa s_0\varepsilon' c^{-\varrho(\mu-w_0)}) - \log(1 + \varrho\varkappa s_0\varepsilon' c^{\varrho(\mu-w_0)})$$

woraus durch den im vor. Art. entwickelten Satz sich ergiebt

$$l = v - \theta_0 + \Pi - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varepsilon\sin 2(v-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{\varkappa s_0\varepsilon'\cos(\mu-w_0)}{1-\varkappa s_0\varepsilon'\sin(\mu-w_0)}$$

Die obige Gleichung für $\varepsilon' c^{\varrho(\mu-w_0)}$ nebst der reciproken, die aus der Verwandelung von ϱ in $-\varrho$ folgt, giebt aber

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2+2\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)}}$$

$$\frac{1}{\varepsilon'}\sin(\mu-w_0) = \sin(v-\theta_0-w_0) - \varepsilon\sin(v-\theta_0+w_0)$$

$$\frac{1}{\varepsilon'}\cos(\mu-w_0) = \cos(v-\theta_0-w_0) + \varepsilon\cos(v-\theta_0+w_0)$$

Aus diesen beiden Formeln zieht man:

$$\operatorname{tg}(\mu-v+\theta_0) = -\frac{\varepsilon\sin 2(v-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)},$$

es ist daher

$$\mu = v-\theta_0 - \operatorname{arc\,tg}\frac{\varepsilon\sin 2(v-\theta_0)}{1+\varepsilon\cos 2(v-\theta_0)}.$$

$$l = \mu + \Pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{s_0\varkappa\varepsilon'\cos(\mu-w_0)}{1-s_0\varkappa\varepsilon'\sin(\mu-w_0)}$$

8.

Wenden wir nun die vorstehenden Entwickelungen auf den Mond an. Hiebei ist zuerst zu bemerken, dass die Bedeutung der Grössen i, θ, σ, v, l, b durch die Vergleichung der Gleichungen (2) mit den Gleichungen (1) ermittelt werden muss. Diese Vergleichung zeigt, dass

$$i = J''$$
$$\theta = -N'' - K''$$
$$\sigma = -N'' + K''$$
$$v = W - \Theta$$
$$l = \mathit{Æ}$$
$$b = \delta$$

ist. Die Grössen i_0 und θ_0 können nun nach Belieben bestimmt werden, und je nachdem man sie so oder anders bestimmt, geben die vorstehenden Reihenentwickelungen verschiedenartige Ausdrücke für die Reduction der Mondlänge in seiner Bahn auf den Aequator. Die zweckmässigste Bestimmung dieser beiden Grössen ist aber jedenfalls die, wodurch die genannten Reihenentwickelungen die Form annehmen, welche die Anwendung derselben am einfachsten macht und wodurch zugleich die Trennung der beiden veränderlichen Grössen bewirkt wird.

Zu dem Ende setze ich zuerst

$$\theta_0 = -N'' + K''$$

Durch diese Annahme wird $\sigma = \theta_0$, und die Gleichungen (4) geben daher

$$
\begin{aligned}
p &= 0\\
q_0 &= \sin J'' - \sin i_0\\
s_0 &= (\sin J'' - \sin i_0) \sin (W - \Theta + N'' - K'')\\
k &= 1 + \cos(J'' + i_0)\\
\Pi &= \theta = -N'' - K''\\
\Pi - \theta_0 &= -2K''
\end{aligned}
$$

Aus den Gleichungen (5) und (6) ergiebt sich ferner

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 0\\
A &= \operatorname{tg} i_0 + \frac{\sin J'' - \sin i_0}{k \cos i_0} = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (J'' + i_0)\\
\varkappa &= \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (J'' + i_0)}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0}
\end{aligned}
$$

und hiemit

$$
s_0 \varkappa = \frac{\cos i_0 - \cos J''}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0} \sin (W - \Theta + N'' - K'')
$$

Schreiben wir nun

$$
\eta = \frac{\cos i_0 - \cos J''}{\cos^2 \frac{1}{2} i_0} \frac{1}{\alpha}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= -\alpha \sin V \left\{ \cos V - \tfrac{2}{2} \varepsilon \cos 3V + \tfrac{3}{3} \varepsilon^2 \cos 5V \mp \text{etc.} \right\}\\
B &= -\alpha^2 \sin^2 V \left\{ \tfrac{1}{2} \sin 2V - \tfrac{3}{3} \varepsilon \sin 4V + \tfrac{6}{4} \varepsilon^2 \sin 6V \mp \text{etc.} \right\}\\
C &= \quad \alpha^3 \sin^3 V \left\{ \tfrac{1}{3} \cos 3V - \tfrac{4}{4} \varepsilon \cos 5V + \tfrac{10}{5} \varepsilon^2 \cos 7V \mp \text{etc.} \right\}\\
D &= \quad \alpha^4 \sin^4 V \left\{ \tfrac{1}{4} \sin 4V - \tfrac{5}{5} \varepsilon \sin 6V + \tfrac{15}{6} \varepsilon^2 \sin 8V \mp \text{etc.} \right\}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

oder in endlicher Form

$$
\left.
\begin{aligned}
A &= -\alpha \sin V \frac{(1+\varepsilon) \cos V}{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V}\\
B &= -\alpha^2 \sin^2 V \frac{(1-\varepsilon^2) \sin 2V}{2(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^2}\\
C &= \quad \alpha^3 \sin^3 V \frac{(1+\varepsilon^3) \cos 3V + 3\varepsilon (1+\varepsilon) \cos V}{3(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^3}\\
D &= \quad \alpha^4 \sin^4 V \frac{(1-\varepsilon^4) \sin 4V + 4\varepsilon (1-\varepsilon^2) \sin 2V}{4(1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos 2V)^4}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}
\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (8)
$$

wo $V = W - \Theta + N'' - K''$, $\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i_0$

so erhalten wir, wenn wir überdiess

$$
\operatorname{tg} R = \frac{\varepsilon \sin 2V}{1 + \varepsilon \cos 2V}
$$

setzen, vermöge der Entwickelungen der Artt. 5 und 6:

$$
\text{\AE} = W - \Theta - R - 2K'' + A\eta + B\eta^2 + C\eta^3 + D\eta^4 + \text{etc.}
$$

In diesem Ausdrucke sind die beiden veränderlichen Grössen von einander abgesondert, wenn wir für die bis jetzt nur scheinbar darin enthaltene Grösse α eine Constante wählen. Denn η ist blos Function von J'', welche Grösse blos von Θ abhängt, wohingegen R, A, B, etc. blos Functionen der Veränderlichen V sind. Die Längen N'' und K'' ihrerseits sind blos Functionen von Θ. Der obige Ausdruck für $Æ$ lässt sich daher leicht in Tafeln bringen, wenn man die Multiplication von A, B, C, etc. mit den Potenzen von η der speciellen Anwendung überlässt.

9.

Es ist noch die Bestimmung der bis jetzt willkührlich gelassenen Grösse i_0 vorzunehmen. Man sieht leicht, dass im Allgemeinen die Reihe $A\eta + B\eta^2 +$ etc. möglichst convergent wird, wenn man i_0 so bestimmt, dass die Differenz $\cos i_0 - \cos J''$ möglichst kleine positive und negative Werthe annimmt. Nun sind aber $J'_{\prime\prime} + J_{\prime}$ und $J'_{\prime\prime} - J'$ die Grenzwerthe von J'', und die eben genannte Bedingung wird daher erfüllt, wenn man $\cos i_0$ dem arithmetischen Mittel aus den Cosinus dieser Grenzwerthe gleichsetzt. Hieraus folgt, wenn wir den so bestimmten Werth von i_0 vorzugsweise mit Γ bezeichnen, dass

$$\cos \Gamma = \cos J'_{\prime\prime} \cos J_{\prime},$$

oder zur sicherern Berechnung

$$\sin\tfrac{1}{2}\Gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}J'_{\prime\prime}\cos\frac{1}{2}J_{\prime}}{\cos\Delta}, \text{ wo } \operatorname{tg}\Delta = \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}J'_{\prime\prime}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J_{\prime}$$

Da nun

$$\cos J'' = \cos J'_{\prime\prime} \cos J_{\prime} - \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime} \cos \Theta$$

ist, so wird

$$\cos i_0 - \cos J'' = \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime} \cos \Theta$$

Setzen wir daher in die Formeln des vor. Art.

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}\Gamma, \quad \alpha = \frac{\sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \frac{1}{2}\Gamma}$$

so wird

$$Æ = W - \Theta - 2K'' - R + A\cos\Theta + B\cos^2\Theta + C\cos^3\Theta + D\cos^4\Theta + \text{etc.}$$

10.

Die eben gefundene Reihe convergirt am schwächsten, wenn die Mondknoten in der Nähe von 0° und 180° liegen, allein die Convergenz ist in diesen Punkten doch bedeutend, weil α eine kleine Grösse ist (in Theilen des Radius $\alpha = 0{,}0373...$); sie convergirt am stärksten, wenn die Mondknoten in der Nähe von 90° und 270°

liegen; für $\Theta = 90^0$ und $\Theta = 270^0$ ist die Summe der Reihe Null. Man kann aber noch andere Reihen angeben, die grade in den Punkten am stärksten convergiren, wo die Reihe des vor. Art. ihre schwächste Convergenz hat. Diese Reihen, die man auch aus jener erhalten könnte, leitet man am einfachsten dadurch ab, dass man i_0 den Grenzwerthen von J'' gleichsetzt. Setzt man i_0 gleich dem Maximum von J'', nemlich

$$i_0 = J'_{\prime\prime} + J_{\prime}$$

dann wird

$$\varepsilon = \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}(J'_{\prime\prime} + J_{\prime}), \quad \alpha = -\frac{2 \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \frac{1}{2}(J'_{\prime\prime} + J_{\prime})}$$

$$Æ = W - \Theta - 2K'' - R + A \sin^2 \tfrac{1}{2}\Theta + B \sin^4 \tfrac{1}{2}\Theta + C \sin^6 \tfrac{1}{2}\Theta + \text{etc.}$$

Diese Reihe convergirt am stärksten, wenn Θ in der Nähe von 0^0 liegt. Setzt man hingegen

$$i_0 = J'_{\prime\prime} - J_{\prime}$$

so wird

$$\varepsilon = \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}(J'_{\prime\prime} - J_{\prime}), \quad \alpha = \frac{2 \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \frac{1}{2}(J'_{\prime\prime} - J_{\prime})}$$

$$Æ = W - \Theta - 2K'' - R + A \cos^2 \tfrac{1}{2}\Theta + B \cos^4 \tfrac{1}{2}\Theta + C \cos^6 \tfrac{1}{2}\Theta + \text{etc.}$$

welche Reihe am stärksten convergirt, wenn Θ nahe gleich 180^0 ist.

11.

Der Merkwürdigkeit wegen will ich noch die Annahme $i_0 = 0$ untersuchen, aus welcher $\varepsilon = 0$ folgt. Setzt man hier nun $\alpha = 2$, so geht daraus hervor, dass

$$Æ = W - \Theta - 2K'' + A \sin^2 \tfrac{1}{2}J'' + B \sin^4 \tfrac{1}{2}J'' + \text{etc.}$$

wo

$$A = -2 \sin V \cos V$$
$$B = -2 \sin^2 V \sin 2V$$
$$C = \tfrac{8}{3} \sin^3 V \cos 3V$$
$$D = 4 \sin^4 V \sin 4V$$
$$\text{etc.}$$

Hier ist R verschwunden und die unendliche Reihe schreitet nach den positiven und graden Potenzen von $\sin \frac{1}{2} J''$ fort Sie ist aber weit weniger convergent, wie die vorhergehenden Reihen, und deshalb zur Anwendung weit weniger geeignet. Ich bemerke übrigens, dass diese Reihe mit der folgenden nahe verwandt ist:

$$Æ = W - \Theta - 2K'' - \mathrm{tg}^2 \tfrac{1}{2}J'' \sin 2V + \tfrac{1}{2}\mathrm{tg}^4 \tfrac{1}{2}J'' \sin 4V \mp \text{etc.}$$

die unmittelbar aus einer längst bekannten Reihe entspringt.

12.

Es ist noch die Entwickelung der einfachsten Ausdrücke für N'' und K'' übrig. Im ersten Artikel hatten wir aus dem Dreieck ABC die folgenden Relationen erhalten

$$\sin J'' \sin(N''-K''-\Theta) = -\sin J'_{,,} \sin\Theta$$
$$\sin J'' \cos(N''-K''-\Theta) = \cos J'_{,,} \sin J_{,} + \sin J'_{,,} \cos J_{,} \cos\Theta$$

Dasselbe Dreieck giebt auch die Gleichungen

$$\sin J'' \sin(N''+K'') = \sin J_{,} \sin\Theta$$
$$\sin J'' \cos(N''+K'') = \sin J'_{,,} \cos J_{,} + \cos J'_{,,} \sin J_{,} \cos\Theta$$

Führt man hier die imaginären Exponentialfunctionen ein, so bekommt man leicht

$$\sin J'' c^{\varrho(N''-K'')} = \sin J'_{,,} \cos^2\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos J'_{,,} \sin J_{,}\, c^{\varrho\Theta} - \sin J'_{,,} \sin^2\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{2\varrho\Theta}$$
$$= 2\{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}\}\{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}\}$$
$$\sin J'' c^{\varrho(N''+K'')} = \sin J'_{,,} \cos J_{,} + \cos^2\tfrac{1}{2}J'_{,,} \sin J_{,}\, c^{\varrho\Theta} - \sin^2\tfrac{1}{2}J'_{,,} \sin J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}$$
$$= 2\{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}\}\{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}\}$$

und noch zwei ähnliche Formeln, die sich aus den vorstehenden ergeben, wenn man darin $-\varrho$ für ϱ schreibt.*) Dividirt man die zweite dieser Relationen durch die erste, so bekommt man

$$c^{2\varrho K''} = \frac{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}}{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}}$$

Dividirt man die erste durch die zweite, nachdem man in letzterer $-\varrho$ für ϱ geschrieben hat, so ergiebt sich

$$c^{2\varrho N''} = \frac{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}}{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, wenn man zur reellen Form zurückkehrt

$$\operatorname{tg} N'' = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}J'_{,,}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J_{,}\sin\Theta}{1+\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}J'_{,,}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J_{,}\cos\Theta}$$
$$\operatorname{tg} K'' = \frac{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J'_{,,}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J_{,}\sin\Theta}{1-\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J'_{,,}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}J_{,}\cos\Theta}$$

---

*) Man bekommt ausserdem noch die Gleichungen

$$\cos^2\tfrac{1}{2}J'' = \{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}\}\{\cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} - \sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}\}$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}J'' = \{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{\varrho\Theta}\}\{\sin\tfrac{1}{2}J'_{,,}\cos\tfrac{1}{2}J_{,} + \cos\tfrac{1}{2}J'_{,,}\sin\tfrac{1}{2}J_{,}\, c^{-\varrho\Theta}\}$$

welche, in Verbindung mit den obigen, merkwürdige und nützliche Relationen geben, die ich aber hier nicht anwenden, und daher auch nicht ableiten werde. Auch die Gaussischen Relationen im sphärischen Dreiecke können aus diesen Gleichungen auf einfache Art abgeleitet werden.

Die vorstehenden Gleichungen zwischen den imaginären Grössen geben überdiess

$$2\varrho N'' = \log(1 + \cotg\tfrac{1}{2}J'_{,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}c^{\varrho\Theta}) - \log(1 + \cotg\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}c^{-\varrho\Theta})$$
$$2\varrho K'' = \log(1 - \tg\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}c^{-\varrho\Theta}) - \log(1 - \tg\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}c^{\varrho\Theta})$$

und wenn man die Logarithmen in unendliche Reihen entwickelt:

$$N'' = \cot\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}\sin\Theta - \tfrac{1}{2}\cot^2\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin 2\Theta + \tfrac{1}{3}\cot^3\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg^3\tfrac{1}{2}J_{,}\sin 3\Theta \mp \text{etc.}$$
$$K'' = \tg\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg\tfrac{1}{2}J_{,}\sin\Theta + \tfrac{1}{2}\tg^2\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg^2\tfrac{1}{2}J_{,}\sin 2\Theta + \tfrac{1}{3}\tg^3\tfrac{1}{2}J'_{,,}\tg^3\tfrac{1}{2}J_{,}\sin 3\Theta + \text{etc.}$$

13.

Unter den im Vorhergehenden für *Æ* entwickelten Reihen convergirt die im Art. 9 abgeleitete am stärksten, und zwar in jedem Falle so stark, dass, wenn die Coefficienten derselben in Tafeln von zweckmässiger Ausdehnung gebracht worden sind, ihre Anwendung nie unbequem wird; in den Fällen, wo $\cos\Theta$ klein, und folglich ihre Convergenz am grössten ist, wird ihre Anwendung äusserst einfach. Da aber grade in den Fällen, wo diese Reihe am mindesten stark convergirt, die Convergenz der im Art. 10 entwickelten Reihen am grössten ist, so kann man für jeden Fall eine stärkere Convergenz und folglich eine Abkürzung der Arbeit herbeiführen, wenn man den ganzen Umlauf der Mondknoten in drei Theile zerlegt, und in jedem dieser Theile eine andere jener drei Reihen anwendet. Man wird demnach die erste Reihe des Art. 10 in dem Theile des Knotenumlaufs anwenden, wo

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta < \cos\Theta$$

ist, d. i. von $\Theta = 300^0$ bis $\Theta = 60^0$; die Reihe des Art. 9 in dem Theile, wo

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta > \cos\Theta > -2\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta$$

ist, d. i. von $\Theta = 60^0$ bis $\Theta = 120^0$ und von $\Theta = 240^0$ bis $\Theta = 300^0$; endlich die zweite Reihe des Art. 10 in dem Theile, wo

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\Theta < -\cos\Theta$$

d. i. von $\Theta = 120^0$ bis $\Theta = 240^0$, womit der ganze Umkreis erschöpft ist. Es versteht sich indess von selbst, dass man diese Theilungspunkte nicht genau einzuhalten braucht, da alle drei Reihen für den ganzen Umkreis gelten und in der Nähe der Theilungspunkte

die Convergenz der einen Reihe nur wenig von der der anderen verschieden ist.

Ich werde noch, um einen Ueberblick über die hiefür nöthigen Tafeln zu geben, die Nullpunkte und die Maxima der entwickelten Grössen anführen. Die Bögen N'' und K'' sind Null für $\Theta = 0$ und $\Theta = 180^0$ und haben zwischen jedem dieser Nullpunkte Ein Maximum. Setzt man

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} J'_{\prime\prime} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J_{\prime} = \sin g, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J'_{\prime\prime} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} J_{\prime} = \sin h$$

so ist g das Maximum von N'' und h das Maximum von K''. Die Grössen R, A, B, C, D, etc. sind Null für $V = 0^0$, $V = 90^0$, $V = 180^0$, $V = 270^0$; R, A und B haben zwischen jedem dieser Nullpunkte Ein Maximum. Sei

$$\varepsilon = \sin f$$

so ist f das Maximum von R. Mit Rücksicht auf die eben angeführten Theilungspunkte wird das Maximum von $A \cos \Theta$

$$= \frac{\alpha}{4(1-\varepsilon)}$$

und das von $B \cos^2 \Theta$

$$= \frac{\alpha^2 \sin^3 (60^0)}{8}$$

wo α so verstanden ist, wie in Art. 9, nemlich ohne den Factor 2. C und D haben zwischen jedem Nullpunkt zwei Maxima. Das Maximum Maximorum von $C \cos^3 \Theta$ ist nahe

$$\doteq \frac{\alpha^3 \sin^4 (67\tfrac{1}{2}^0)}{24}$$

und das von $D \cos^4 \Theta$ nahe

$$= \frac{\alpha^4 \sin^5 (72^0)}{64}$$

Nehmen wir nun wie in Art. 3

$$J'_{\prime\prime} = 23^0 27' 54''80, \quad J_{\prime} = 5^0 8' 48''$$

an, so wird das Maximum

$$\text{von } N'' = 12^0 29' 52''$$
$$\text{von } K'' = 0^0 32' 5''3$$

Setzen wir zur Unterscheidung

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} (J'_{\prime\prime} + J_{\prime}), \quad \alpha = -\frac{2 \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \tfrac{1}{2} (J'_{\prime\prime} + J_{\prime})}$$

$$\varepsilon' = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} \Gamma, \qquad \alpha' = \frac{\sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \tfrac{1}{2} \Gamma}$$

$$\varepsilon'' = \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} (J'_{\prime\prime} - J_{\prime}), \quad \alpha'' = \frac{2 \sin J'_{\prime\prime} \sin J_{\prime}}{\cos^2 \tfrac{1}{2} (J'_{\prime\prime} - J_{\prime})}$$

und unterscheiden demgemäss auch R, R' und R'', dann bekommen wir zuerst

$$\log \varepsilon = 8{,}8131052, \quad \log \alpha = 8{,}8813033n$$
$$\log \varepsilon' = 8{,}6546430, \quad \log \alpha' = 8{,}5720901$$
$$\log \varepsilon'' = 8{,}4149190, \quad \log \alpha'' = 8{,}8650881$$

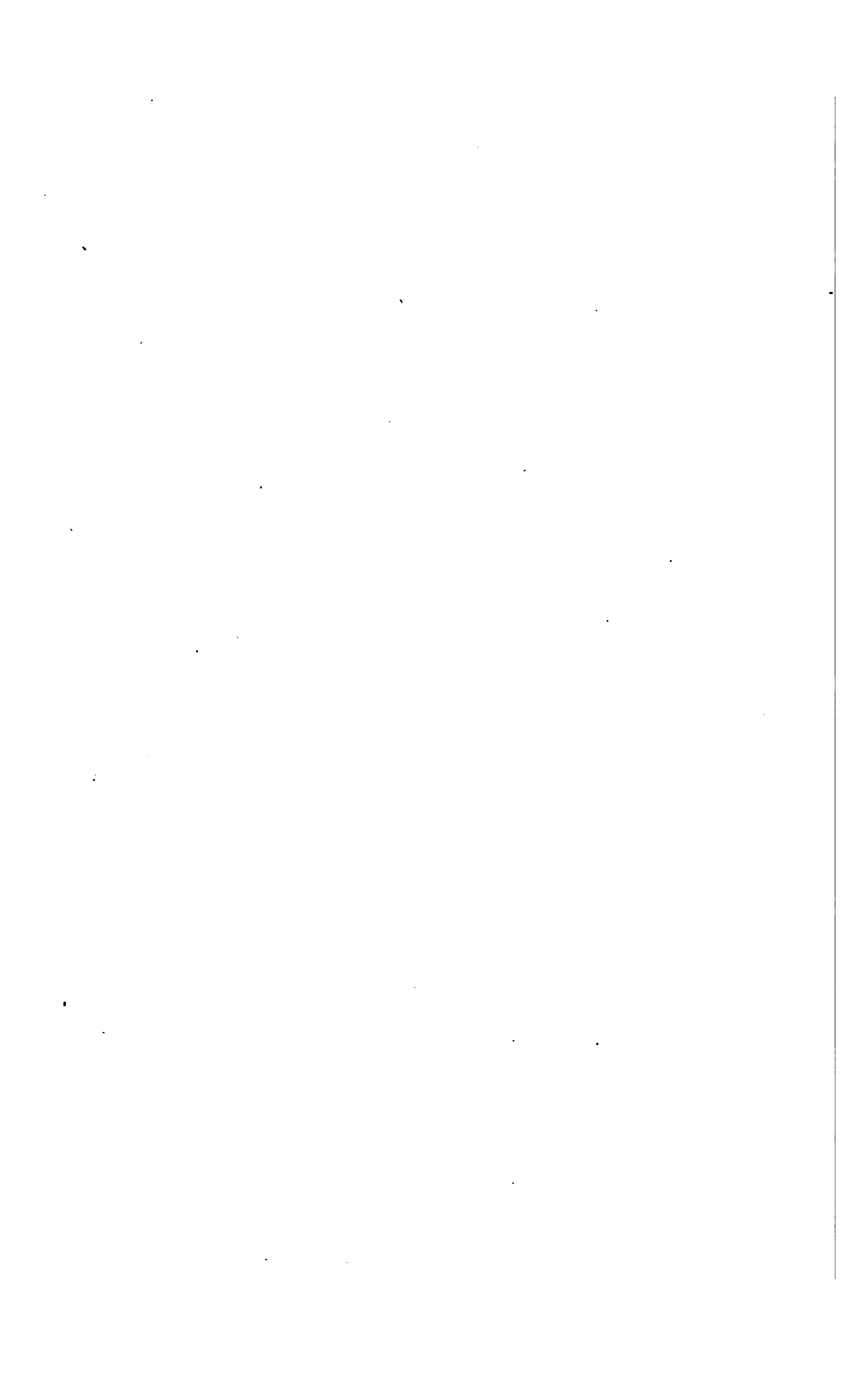
Hieraus folgt das Maximum

$$\text{von } R = 3^0\ 43'\ 42''6$$
$$\text{von } R' = 2\ \ 35\ \ 15{,}7$$
$$\text{von } R'' = 1\ \ 29\ \ 22{,}8$$

ferner mit Anwendung der vorstehenden Werthe von α' und ε' die Maxima

$$\text{von } A\cos\Theta = 33'36''2$$
$$\text{von } B\cos^2\Theta = 23{,}3$$
$$\text{von } C\cos^3\Theta = 0{,}32$$
$$\text{von } D\cos^4\Theta = 0{,}005$$

Man sieht also, dass das vierte Glied stets unmerklich ist und die Anwendung der drei ersten Glieder stets ausreicht. Wegen der vier Nullpunkte, die die Coefficienten in jedem Umlauf des Mondes haben, sind sie auch in dem grössten Theile jedes Monats viel kleiner wie diese Maxima, und es wird in jedem Monat nur eine kurze Zeit eintreten, wo man nicht mit den beiden ersten Gliedern ausreicht. Ferner wird es, wegen der minder grossen Bewegung der Knoten im Verhältniss zur Bewegung des Mondes selbst, in jedem Knotenumlauf Jahre geben, wo das dritte Glied ganz unmerklich wird, und das zweite nur selten berücksichtigt zu werden braucht, also von den übrigen Gliedern fast nur $A\cos\Theta$ merklich wird.



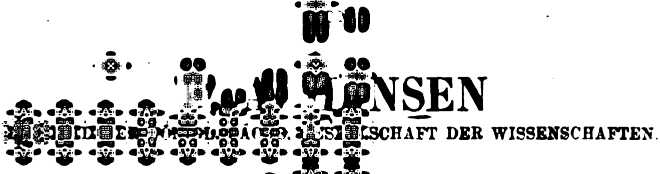
...TERSUCHUNGEN

...IGUNG DER

...TREUUNG

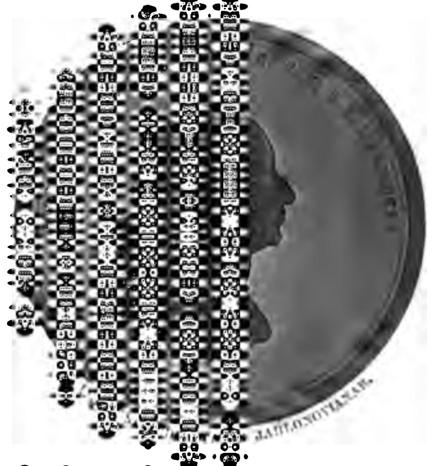
...R

... KUGELGESTALT.

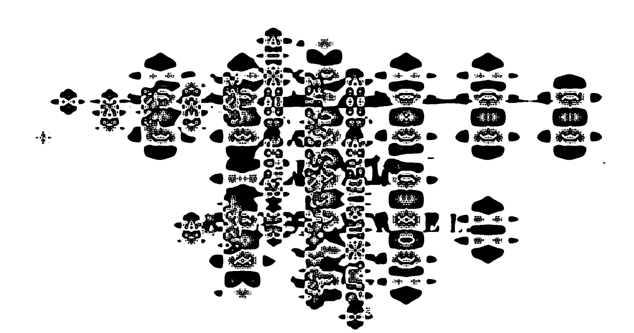


...NSEN

...SCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



...matisch-physischen Classe der Königl.
... der Wissenschaften



Im Manuscript übergeben den 30. Mai 1874.
Der Abdruck vollendet den 29. Novbr. 1874.

DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER

FARBENZERSTREUUNG

UND DER

ABWEICHUNG WEGEN KUGELGESTALT

VON

P. A. HANSEN.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Der am 28. März 1874 in seinem 79. Lebensjahre verstorbene Verfasser liefert in dieser Schrift die bereits in seiner früheren Abhandlung »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von brechenden sphärischen Oberflächen« (abgedruckt im X. Bande der Abhandl. der math.-phys. Classe der K. S. G. S. 65—202) in Aussicht gestellte Fortsetzung seiner dioptrischen Untersuchungen, welche sich vornehmlich auf die chromatische und sphärische Abweichung eines Linsensystems bezieht. Der Druck der Abhandlung ist noch vor seinem Ende von dem Verfasser angeordnet worden, wenn auch mit dem Bedauern, dass er weder die beabsichtigte Weiterführung seiner Untersuchungen hinzufügen, noch die letzte Hand an die Redaction des vollendeten Theils legen könne. Man wird in dieser Beziehung namentlich eine einleitende Uebersicht über die Tendenz und die Resultate der vorliegenden Arbeit vermissen, ein Mangel, dem durch die nachstehende Uebersicht der Hauptcapitel natürlich nur unvollkommen begegnet werden konnte. Wir bemerken noch, dass man geglaubt hat, sich jeder wesentlichen Redactionsänderung an dem mit halb erblindeten Augen niedergeschriebenen Manuscripte enthalten zu sollen; dass man aber von Art. 79 an, der allein in der Ueberschrift existirt, aus einem dem Manuscripte beiliegenden Brouillon einige Paragraphen über den Einfluss einer Aenderung in den Linsenkrümmungen auf die Vereinigungsweite der Strahlen entlehnt hat, die aller Wahrscheinlichkeit nach Material zur beabsichtigten Fortsetzung liefern sollten. Selbstverständlich hat die Verantwortlichkeit für die getroffene Auswahl lediglich der Unterzeichnete zu tragen, welchem der Auftrag zur Ueberwachung der Herausgabe des hinterlassenen Manuscripts geworden ist.

Scheibner.

Inhaltsübersicht.

Berichtigungen.

S. 710 Zeile 1, 3, 4 von oben lies: »$R\ R'\ R''$« statt: »$k\ k'\ k''$«.

S. 721 - 3 von oben lies: $+\frac{(m'-1)(m'+2)}{m'}D' + C$.

S. 723 - 16 - - fehlt im Werthe von a das Endglied $+C$.

S. — - 18 - - im Werthe von c lies: »$+C'$« statt: »$+C$«.

S. — - 20 - - lies: »$C = 0$ und $C' = 0$«.

§ 1. Allgemeine Entwickelungen.

1.

Denken wir uns eine unbestimmte Anzahl von Kugeloberflächen, welche Mittel von verschiedener Brechbarkeit von einander absondern, und solche Lage haben, dass ihre Mittelpunkte alle auf Einer graden Linie liegen. Diese Linie, welche die optische Achse des Systems von brechenden Oberflächen genannt wird, soll zugleich die Abscissenachse sein; die, von einem beliebigen Anfangspunkte an gezählten, Abscissen der Durchschnittspunkte der brechenden Oberflächen mit der Abscissenachse mögen q, q', q'', etc., die der Mittelpunkte derselben Oberflächen p, p', p'', etc. genannt werden. Die Brechungsverhältnisse der verschiedenen Mittel, von dem vor der ersten Kugeloberfläche anfangend, sollen durch

$$\frac{1}{n} : \frac{1}{n'} : \frac{1}{n''} : \frac{1}{n'''} : \text{ etc.}$$

ausgedrückt werden.

2.

Betrachten wir die durch ein derartiges System von brechenden Oberflächen gehenden Lichtstrahlen, aber ziehen wir nur solche in Betracht, welche die optische Achse, oder die Abscissenachse, schneiden, da leicht einzusehen ist, dass diejenigen Lichtstrahlen, bei denen diess nicht der Fall, geringeren Abweichungen unterworfen sind als jene. Nehmen wir an, dass sich im ersten Mittel, das ist vor der ersten brechenden Oberfläche, ein leuchtender Punkt befinde, dessen Abscisse ξ und dessen Ordinate η sei, und betrachten vorläufig nur Einen der Lichtstrahlen, die der leuchtende Punkt auf die erste brechende Oberfläche sendet, und zwar denjenigen, welcher letztere in dem Punkte schneidet, dessen Abscisse a

und dessen Ordinate k ist. Es ist klar, dass die Lage dieses Lichtstrahls hiemit vollständig gegeben ist; ja dieselbe ist hiedurch mehr als hinreichend und nöthig bestimmt, da vermöge der gegebenen Beschaffenheit der brechenden Oberfläche a und k von einander abhängig sind.

3.

Die Gleichung des eben definirten einfallenden Lichtstrahls kann auf verschiedene Weise aufgestellt werden. Bezeichnen wir die laufenden Coordinaten irgend einer Linie überhaupt mit x und y, sowie die Abscisse des Punktes, in welchem die Verlängerung dieses Lichtstrahls die Abscissenlinie schneidet, mit c, so ist die Gleichung desselben

$$y-\eta = (\xi - x)\,\frac{\eta}{c-\xi}$$

Nennen wir den Winkel, den der Lichtstrahl mit der Abscissenachse macht α, so geht diese Gleichung über in

$$y-\eta = (\xi - x)\,\operatorname{tg}\alpha$$

indem

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\eta}{c-\xi}$$

ist. Wir wollen uns nicht bei allen übrigen Formen aufhalten, die dieser Gleichung gegeben werden könnten, sondern nur noch Eine derselben hervorheben, die uns nützlich werden wird. Eliminiren wir durch Hülfe der letzten Gleichung η aus der vorstehenden, so verschwindet auch ξ, und die Gleichung des einfallenden Lichtstrahls wird

$$y = (c-x)\,\operatorname{tg}\alpha$$

Durch diese Gleichung wird der allgemeinere Fall, den wir zuerst eingeführt haben, nemlich der, dass der leuchtende Punkt ausserhalb der optischen Achse liegt, auf den speciellen zurückgeführt, dass er in der optischen Achse selbst, und zwar in dem Punkte c derselben liegt. Man kann betreffenden Falles durch dieselbe Analyse von dem speciellen Falle zu dem allgemeineren übergehen. Es ist auch an sich klar, dass alle leuchtenden Punkte, die auf der Linie des Lichtstrahls, die wir betrachtet haben, vor der ersten brechenden Oberfläche liegen, derselben Brechung unterworfen sind.

4.

Gehen wir zu dem durch die erste Oberfläche gebrochenen Lichtstrahl über, nennen die Abscisse, unter welcher dieser die Abscissenachse schneidet c', und den Winkel, den er mit der Abscissenachse macht α', so ist dem Vorhergehenden analog die Gleichung desselben:

$$y = (c' - x) \operatorname{tg} \alpha'$$

und für α' werden wir die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\eta'}{c' - \xi'}$$

bekommen, wenn ξ' und η' die Abscisse und die Ordinate irgend eines Punktes der Linie bezeichnen, die der gebrochene Lichtstrahl beschreibt.

5.

Die nächste Aufgabe wird nun darin bestehen, die Abhängigkeit zwischen c' und c durch bekannte Grössen auszudrücken, und die Gleichung, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, so weit zu entwickeln, dass darin das erste Glied des Unterschiedes zwischen Sinus und Bogen enthalten ist.

Nennen wir den Einfallswinkel λ und den Brechungswinkel μ, so giebt die Dioptrik, in Folge der im Art. 1 eingeführten Bezeichnungen der Brechungsverhältnisse:

$$n \sin \lambda = n' \sin \mu$$

und es sind zunächst λ und μ durch α und α' auszudrücken. Diess geschieht am einfachsten durch Zuziehung des Winkels, den der an den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt des einfallenden und des gebrochenen Lichtstrahls mit der brechenden Oberfläche gezogene Halbmesser der letzteren mit der Abscissenachse macht. Nennen wir diesen Winkel θ, so folgt aus dem Vorhergehenden, dass

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{k}{p - a}$$

ist, und man findet leicht, dass θ der äussere Winkel von zwei Dreiecken ist, von welchen das eine die inneren gegenüberliegenden Winkel λ und α hat, während in dem anderen diese Winkel μ und α' sind. Hieraus folgt sogleich

$$\lambda = \theta - \alpha, \quad \mu = \theta - \alpha'$$

und die Gleichung des Brechungsgesetzes geht über in

$$n \sin(\theta - \alpha) = n' \sin(\theta - \alpha')$$

aus welcher die drei Winkel θ, α, α' zu eliminiren sind.

6.

Gleichwie in Art. 5 ξ' und η' als die Coordinaten irgend eines beliebigen Punktes auf der Linie des gebrochenen Strahls definirt wurden, können auch ξ und η als die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf der Linie des einfallenden Strahls definirt, und der Durchschnittspunkt dieser beiden Linien als derjenige Punkt betrachtet werden, welchem sowohl ξ und η, als auch ξ' und η' angehören. Da nun die Coordinaten dieses Durchschnittspunktes auch a und k sind, so bekommen wir sogleich die drei, einander analogen Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k}{c-a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{k}{c'-a}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k}{p-a}$$

durch deren Hülfe sich leicht $\sin(\theta-\alpha)$ und $\sin(\theta-\alpha')$ ausdrücken lassen.

7.

Wir brauchen uns nur mit der Entwickelung des ersten der beiden eben genannten Sinus zu beschäftigen, da daraus die des anderen durch blosse Substitution von c' statt c hervorgehen wird. Die Gleichungen des vorigen Art. geben sofort

$$\sin(\theta-\alpha) = k\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{c-a}\right)\cos\theta\cos\alpha$$

und aus denselben Gleichungen erhält man

$$\cos\theta = \frac{p-a}{\sqrt{(p-a)^2+k^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{c-a}{\sqrt{(c-a)^2+k^2}}$$

oder nach den hier erforderlichen Entwickelungen:

$$\cos\theta\cos\alpha = 1 - \frac{k^2}{2(p-a)^2} - \frac{k^2}{2(c-a)^2}$$

Um aus diesen Gleichungen a fortzuschaffen bemerke ich, dass zufolge der Definitionen des Art. 1 der Halbmesser der ersten brechenden Kugeloberfläche durch $p-q$ ausgedrückt wird, und wir so-

wohl deshalb, als weil der Durchschnittspunkt, dessen Coordinaten a und k sind, auf dieser Kugeloberfläche liegen, die Gleichung

$$(p-q)^2 = (p-a)^2 + k^2$$

erhalten. Die obige Gleichung für $\cos\theta$ giebt in Folge dessen

$$a = q + (p-q)(1-\cos\theta)$$

und wenn die Entwickelung von $\cos\theta$ substituirt wird,

$$a = q + \frac{k^2}{2(p-q)}$$

wodurch man leicht

$$\frac{1}{p-a} = \frac{1}{p-q} + \frac{k^2}{2(p-q)^3}$$

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{c-q} + \frac{k^2}{2(p-q)(c-q)^2}$$

erhält. Setzt man nun, um die Ausdrücke zusammen zu ziehen,

$$R = \frac{1}{p-q}, \quad \pi = \frac{1}{c-q}$$

so wird die obige Gleichung für $\sin(\theta-\alpha)$

$$\sin(\theta-\alpha) = k\left(R - \pi + R^3\frac{k^2}{2} - R\pi^2\frac{k^2}{2}\right)\left(1 - R^2\frac{k^2}{2} - \pi^2\frac{k^2}{2}\right)$$

oder nach der Entwickelung:

$$\sin(\theta-\alpha) = k(R-\pi) + \pi(R-\pi)^2\frac{k^3}{2}$$

Setzt man ferner

$$\pi' = \frac{1}{c'-q}$$

so ergiebt sich sogleich

$$\sin(\theta-\alpha') = k(R-\pi') + \pi'(R-\pi')^2\frac{k^3}{2}$$

und aus der Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung des Brechungsgesetzes folgt ohne Weiteres:

$$n(R-\pi) - n'(R-\pi') = \{n'\pi'(R-\pi')^2 - n\pi(R-\pi)^2\}\frac{k^2}{2}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da π' in dieser Gleichung die einzige Unbekannte ist.

8.

Man kann dem Coefficienten von k^2 in der eben erhaltenen Gleichung verschiedene Formen geben, von denen ich die wichtigsten hier ableiten will. Setzt man zur Abkürzung

$$L = n'\pi'(R-\pi')^2 - n\pi(R-\pi)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

welches die erste Form von L ist, so wird

$$n(R-\pi) - n'(R-\pi') = L\frac{k^2}{2}$$

und wir dürfen uns, ohne den Grad der Genauigkeit zu verletzen, zur Verwandlung der Form von L der Gleichung

(a) . . . . $n(R-\pi) = n'(R-\pi')$

bedienen. Eliminirt man damit ein Mal $R-\pi'$ und ein Mal $R-\pi$ aus der Gleichung (1), so bekommt man die beiden weiteren Formen:

(2) . . . . $L = \frac{n}{n'}(n\pi' - n'\pi)(R-\pi)^2$

(3) . . . . $L = \frac{n'}{n}(n\pi' - n'\pi)(R-\pi')^2$

Die Gleichung (a) kann leicht auf die beiden folgenden Formen gebracht werden

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} (n'-n)(R-\pi) = n'(\pi'-\pi) \\ (n'-n)(R-\pi') = n(\pi'-\pi) \end{array} \right.$$

und benutzt man diese, um sowohl $R-\pi$ wie $R-\pi'$ aus (1) zu eliminiren, so ergiebt sich:

(4) . . . . $L = \frac{n'n}{(n'-n)^2}(n\pi' - n'\pi)(\pi'-\pi)^2.$

Man kann endlich auch die Gleichung (a) in die beiden Ausdrücke verwandeln

$$n\pi' - n'\pi = \frac{n'-n}{n'}\{n(R-\pi) - n'\pi\}$$

$$n\pi' - n'\pi = \frac{n'-n}{n}\{n'(R-\pi') - n\pi'\}$$

und substituirt man diese, nebst den aus den Gleichungen (b) folgenden Werthen von $\pi'-\pi$ in (4), so erhält man

(5) . . . . . . $L = \frac{n(n'-n)}{n'^2}\{n(R-\pi)^3 - n'\pi(R-\pi)^2\}$

(6) . . . . . . $L = \frac{n'(n'-n)}{n^2}\{n'(R-\pi')^3 - n\pi'(R-\pi')^2\}$

Diese beiden Formen von L besitzen die Eigenschaft, dass in der ersten kein π' und in der zweiten kein π enthalten ist. Wir bemerken noch, dass die vorhin erhaltene Gleichung für π' in der folgenden Form aufgestellt werden kann:

(A) . . . . $n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$

welche verlangt wird, wenn sie auf mehrere Brechungen angewandt werden soll, und in welcher man jede beliebige der eben erhaltenen sechs Formen von L substituiren darf.

9.

Die nächste Aufgabe besteht in der Ermittelung des Orts des Bildes, oder der Bilder, die nach der ersten Brechung von dem

Gegenstande entstehen, dessen Coordinaten ξ und η sind, und wobei von der Definition ausgegangen werden muss, dass das Bild eines Gegenstandes immer in dem Durchschnittspunkte zweier gebrochenen Lichtstrahlen entsteht.

Nehmen wir vorläufig an, dass $\eta = 0$ und demzufolge $\xi = c$ werde, so giebt die Gleichung (A) des vor. Art. durch den Werth von π', welcher aus derselben folgt, schon den allgemeinen Ort der Bilder dieses Gegenstandes an. Denn da der angenommene Gegenstand in der optischen Achse liegt, und der von demselben ausgehende, in der optischen Achse liegende Lichtstrahl ungebrochen durchgeht, so wird er von allen übrigen Lichtstrahlen in dem durch π' bestimmten, auch in der optischen Achse liegenden Punkte geschnitten, und giebt folglich ein Bild des Gegenstandes. Da aber π' von k mit abhängt, und k von Null bis an die Grenze des den Lichtstrahlen zugänglich gelassenen Theils der brechenden Oberfläche ausgedehnt werden kann, so nimmt π' innerhalb gewisser Grenzen eine grosse Anzahl von Werthen an, deren jeder einem Bilde des Gegenstandes entspricht.

Aber auch ausserhalb der optischen Achse liegen Bilder des in der optischen Achse befindlichen Gegenstandes. Denn die irgend zwei Werthen von k, die beide nicht Null sind, entsprechenden Lichtstrahlen schneiden einander ebenfalls, und zwar ausserhalb der optischen Achse. Der ganze Complex von Bildern, welche von dem Einen Gegenstande entstehen, nimmt also einen körperlichen Raum ein, dessen Ausdehnung grösser oder kleiner ist, je nachdem das Maximum von k grösser oder kleiner ist. Wenn der dem Lichte zugänglich gelassene Theil der brechenden Oberfläche, wie gewöhnlich, durch einen Kreis begrenzt wird, durch dessen Mittelpunkt man sich die optische Achse gehend denkt, dann ist der körperliche Raum, in welchem alle Bilder eines in der optischen Achse liegenden Gegenstandes enthalten sind, symmetrisch, und die Projection desselben auf eine durch die optische Achse gelegte, senkrechte Ebene ist auch ein Kreis. Man kann den Durchmesser dieses Kreises, sowie die Länge der darauf senkrecht stehenden Achse des genannten körperlichen Raumes, welche einen Abschnitt der optischen Achse bildet, bestimmen; aber es würde mich zu weit führen, wenn ich mich hier darauf einlassen wollte.

10.

Nehmen wir jetzt an, dass von den Coordinaten ξ und η des Gegenstandes keine gleich Null sei, und suchen den allgemeinen Ausdruck für den Ort der Bilder, welche in den Durchschnittspunkten der einander unendlich nahe liegenden Lichtstrahlen entstehen. Allgemeinen Grundsätzen zufolge erhalten wir die Coordinaten ξ' und η' dieser Bilder, wenn wir die Gleichung (A) des Art. 8 unter der Bedingung, dass sowohl ξ und η, wie ξ' und η' Constanten seien, differentiiren, und darauf ξ' und η' wechselsweise zwischen diesem Differential und der Gleichung selbst eliminiren.

Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$\frac{\eta}{c-\xi} = \frac{k}{c-a}$$

indem jede Seite dieser Gleichung nichts Anderes ist als ein Ausdruck für $\operatorname{tg}\alpha$; ferner sind identisch

$$c-\xi = (c-q)-(\xi-q) = \frac{1}{\pi}-\frac{1}{\lambda}$$

wenn wir

$$\lambda = \frac{1}{\xi-q}$$

setzen, und

$$c-a = (c-q)-(a-q) = \frac{1}{\pi}-R\frac{k^2}{2}$$

zufolge der im Art. 7 gegebenen Entwickelung von $(a-q)$. Die Substitution dieser Ausdrücke in die obige Gleichung giebt nach einer kurzen Entwickelung:

$$\pi = \lambda-\frac{\eta\lambda}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right)$$

und ebenso erhält man

$$\pi' = \lambda'-\frac{\eta'\lambda'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right)$$

nachdem

$$\lambda' = \frac{1}{\xi'-q}$$

gesetzt worden ist. Zu diesen Gleichungen kann man bemerken, dass η, η', k im Allgemeinen Grössen derselben Ordnung sind. Die oben angezogene Gleichung (A), nemlich

$$n'\pi' = n\pi+(n'-n)R+L\frac{k^2}{2}$$

geht durch Substitution der bez. Ausdrücke für π und π' über in

$$\text{(B)} \; . \; . \; n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+n'\frac{\lambda'\eta'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right)-n\frac{\lambda\eta}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right)+L\frac{k^2}{2}$$

Sieht man in dieser Gleichung k als einzige Veränderliche an, indem die Zuziehung der Veränderung von π, π', L nur Glieder höherer Ordnung als die, welche überhaupt berücksichtigt worden sind, hervorbringen würde, so giebt das Differential derselben

$$0 = -n'\frac{\lambda'\eta'}{k^2}\left(1+\pi' R\frac{k^2}{2}\right)+n\frac{\lambda\eta}{k^2}\left(1+\pi R\frac{k^2}{2}\right)+Lk$$

woraus sogleich

$$\eta' = \eta\frac{n\lambda}{n'\lambda'}\left(1+(\pi-\pi')R\frac{k^2}{2}\right)+\frac{L}{n'\lambda'}k^3 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

folgt. Die Gleichung (B) wird hierauf, nachdem η' durch Hülfe der vorstehenden Gleichung eliminirt worden,

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+n\lambda\eta(\pi-\pi')Rk+\frac{3}{2}Lk^2 \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da die beiden vorstehenden Gleichungen die Coordinaten ξ' und η' des Bildes geben. Da diese Ausdrücke von k abhängen, so erkennt man, dass wieder der Gegenstand, dessen Coordinaten ξ und η sind, eine Reihe von Bildern giebt.

11.

Gehen wir zu dem Falle über, in welchem das Bild des Gegenstandes in dem Durchschnittspunkte zweier Lichtstrahlen liegt, welche die brechende Oberfläche in zwei Punkten schneiden, die in einer endlichen Entfernung von einander liegen. Diese Aufgabe wird dadurch gelöst, dass wir die Gleichung (B) des vor. Art. in Bezug auf zwei solche Punkte aufstellen, und zwischen den zwei so entstehenden Gleichungen wechselsweise η' und λ' eliminiren. Nennen wir die Ordinate des Durchschnittspunktes des zweiten Lichtstrahls mit der brechenden Oberfläche k', und behalten für den ersten Lichtstrahl die Bezeichnung k dieser Ordinate bei, so sind die beiden bezeichneten Gleichungen:

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+n'\frac{\lambda'\eta'}{k}\left(1-\pi' R\frac{k^2}{2}\right)-n\frac{\lambda\eta}{k}\left(1-\pi R\frac{k^2}{2}\right)+L\frac{k^2}{2}$$

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+n'\frac{\lambda'\eta'}{k'}\left(1-\pi' R\frac{k'^2}{2}\right)-n\frac{\lambda\eta}{k'}\left(1-\pi R\frac{k'^2}{2}\right)+L\frac{k'^2}{2}$$

aus denen man durch die bez. Eliminationen ohne Schwierigkeit

$$\eta' = \eta\frac{n\lambda}{n'\lambda'}\left(1+\frac{1}{2}(\pi-\pi')Rkk'\right)+\frac{L}{n'\lambda'}\frac{k+k'}{2}kk' \quad \ldots\ldots \quad (C')$$

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+\frac{1}{2}n\lambda\eta(\pi-\pi')R(k+k')+\frac{1}{2}L(k^2+kk'+k'^2) \quad (D')$$

erhält, welche die Coordinaten der verlangten Bilder geben. Man

sieht sogleich, dass diese Gleichungen in die Gll. (C) und (D) des vor. Art. übergehen, wenn man $k' = k$ macht; sie enthalten also auch den dort betrachteten Fall, und geben daher überhaupt die Coordinaten aller in der Ebene der xy liegenden Bilder.

Einen besonderen Fall wollen wir noch betrachten, welcher zu einer Uebersicht über die Lage der Gesammtheit aller Bilder führt. Nehmen wir an, dass der zweite Lichtstrahl die brechende Oberfläche in demselben Punkte schneide, in welchem diese letztere von der Abscissenachse, die als identisch mit der optischen Achse betrachtet wird, geschnitten wird. Es folgt hieraus $k' = 0$, und die Gleichungen (C) und (D) gehen über in:

(C'') . . . $\eta' = \eta \frac{n\lambda}{n'\lambda'}$

(D'') . . $n'\lambda' = n\lambda + (n'-n) R + \frac{1}{2} n\lambda\eta (\pi-\pi') Rk + \frac{1}{2} Lk^2$

Man sieht aus diesen Gleichungen, dass jetzt der Ausdruck für η' unabhängig von k ist, und folglich diese Coordinate denselben Werth behält, wie auch k beschaffen sein mag. Es folgt hieraus, dass im gegenwärtigen Falle alle Bilder auf einer graden Linie liegen, welche der Abscissenachse parallel ist. Man kann noch weiter gehen, und die Gleichungen (C'') und (D'') auf die Gesammtheit aller möglichen Bilder ausdehnen. Man kann sie vermittelst einer einfachen Betrachtung auf die Lichtstrahlen anwenden, die mit der ursprünglich angenommenen Abscissenachse nicht in Einer Ebene liegen, und gelangt dadurch zur Uebersicht über die Gestalt des Raumes, in welchem sich alle Bilder des als Punkt gedachten Gegenstandes befinden. Die hiezu anzuwendenden Betrachtungen sind so einfache, dass es genügt, ihr Resultat anzugeben. Vorausgesetzt, dass die dem Lichte zugänglich gelassenen Theile der brechenden Oberflächen durch Kreise beschränkt sind, deren Mittelpunkte in der optischen Achse liegen, so ist die Gesammtheit aller von dem eben genannten Gegenstande entstehenden Bilder in einem kleinen körperlichen Raume enthalten, welcher von einer Oberfläche begrenzt wird, die man eine abgeplattete eiförmige nennen kann. Die grosse Achse dieser Oberfläche ist der optischen Achse (wenigstens sehr nahe) parallel; die mittlere Achse liegt in der Ebene, die durch den Gegenstand und die optische Achse geht, mit anderen Worten in der xy-Ebene; die kleine Achse steht senkrecht auf jenen beiden. Die Oberfläche

wird durch die xy-Ebene in zwei gleiche und ähnliche Theile zerlegt, lässt aber im Allgemeinen sonst keine symmetrische Theilung zu; ihre Projection auf eine zur optischen Achse senkrechte Ebene bildet eine eiförmige Figur, die durch ihre, nach der optischen Achse hingerichtete grosse Achse in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Wenn der Gegenstand in der optischen Achse liegt, so geht die jetzt besprochene Oberfläche in die im Art. 9 erhaltene Revolutionsoberfläche über.

12.

Dehnen wir jetzt die im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln auf eine beliebige Anzahl von brechenden Oberflächen aus, so kommen vor Allem die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen dieser Oberflächen von einander in Betracht, welche zufolge der im Art. 1 eingeführten Bezeichnungen durch die Unterschiede $q'-q$, $q''-q'$, $q'''-q''$, etc. ausgedrückt werden. Setzen wir zur Abkürzung

$$q'-q=d,\ q''-q'=d',\ q'''-q''=d'', \text{ etc.}$$

Gleichwie oben die Abscisse des Durchschnittspunkts des einfallenden Lichtstrahls mit der Abscissenachse c, und die des ein Mal gebrochenen Strahls c' genannt wurden, sollen von nun an diese Abscissen für den zwei Mal, drei Mal u. s. w. gebrochenen Lichtstrahl mit c'', c''', u. s. w. bezeichnet werden, und gleichwie die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen der beiden ersten dieser Durchschnittspunkte von der ersten Oberfläche $c-q$ und $c'-q$ sind, werden die des zweiten und dritten von der zweiten Oberfläche $c'-q'$ und $c''-q'$, die des dritten und vierten von der dritten Oberfläche $c''-q''$ und $c'''-q''$, u. s. w. sein. Hieraus ergeben sich sofort die Gleichungen

$$\begin{aligned} c'-q &= c'-q'+d \\ c''-q' &= c''-q''+d' \\ c'''-q'' &= c'''-q'''+d'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Führt man daher, ausser den im Vorhergehenden schon vorkommenden Bezeichnungen

$$\pi=\frac{1}{c-q},\ \pi'=\frac{1}{c'-q}$$

auch

$$\pi_{,} = \frac{1}{c'-q'},\quad \pi'' = \frac{1}{c''-q'}$$

$$\pi_{,,} = \frac{1}{c''-q''},\quad \pi''' = \frac{1}{c'''-q''}$$

etc.

ein, so bekommt man zunächst die Relationen

$$\pi_{,} - \pi' = \pi_{,}\,\pi'\,d$$

$$\pi_{,,} - \pi'' = \pi_{,,}\,\pi''\,d'$$

$$\pi_{,,,} - \pi''' = \pi_{,,,}\,\pi'''\,d''$$

etc.

und hieraus die folgenden, auf deren rechten Seiten nur je Eine der beiden concurrirenden Reciproken der Vereinigungsweiten vorkommt:

$$\pi_{,} = \frac{\pi'}{1-\pi'd} = \pi' + \frac{\pi'^2 d}{1-\pi'd}$$

$$\pi_{,,} = \frac{\pi''}{1-\pi''d'} = \pi'' + \frac{\pi''^2 d'}{1-\pi''d'}$$

$$\pi_{,,,} = \frac{\pi'''}{1-\pi'''d''} = \pi''' + \frac{\pi'''^2 d''}{1-\pi'''d''}$$

etc. etc.

Es folgen aus diesen die entgegengesetzten Relationen:

$$\pi' = \frac{\pi_{,}}{1+\pi_{,}d} = \pi_{,} - \frac{\pi_{,}^2 d}{1+\pi_{,}d}$$

$$\pi'' = \frac{\pi_{,,}}{1+\pi_{,,}d'} = \pi_{,,} - \frac{\pi_{,,}^2 d'}{1+\pi_{,,}d'}$$

$$\pi''' = \frac{\pi_{,,,}}{1+\pi_{,,,}d''} = \pi_{,,,} - \frac{\pi_{,,,}^2 d''}{1+\pi_{,,,}d''}$$

etc. etc.

13.

Die Abscisse des Punktes, in welchem der Lichtstrahl die erste Oberfläche schneidet, wurde a, und dessen Ordinate k genannt; für die zweite und folgenden Oberflächen seien dieselben a' und k', a'' und k'', u. s. w. Diese Werthe sind von einander abhängig, und man findet leicht, dass ihre Abhängigkeit durch die Gleichungen

$$\frac{k'}{k} = \frac{c'-a'}{c'-a}$$

$$\frac{k''}{k'} = \frac{c''-a''}{c''-a'}$$

etc.

ausgedrückt wird. Aber im Vorhergehenden wurde k als kleine Grösse erster Ordnung eingeführt, und aus diesem Grunde sind auch

k', k'', etc. kleine Grössen erster Ordnung; es werden daher die Unterschiede $a-q$, $a'-q'$, $a''-q''$, etc. kleine Grössen zweiter Ordnung. Da nun hier nur die niedrigsten Potenzen von k, k', k'', etc. berücksichtigt werden, so dürfen wir in den vorstehenden Gleichungen q statt a, q' statt a', q'' statt a'', etc. setzen, und dieselben können daher zu Functionen der d, d', d'', etc. gemacht werden. Durch Hülfe der Gleichungen des vor. Art. verwandelt man sie in

$$\begin{aligned} k' &= (1-\pi' d)\,k \\ k'' &= (1-\pi'' d')\,k' \\ k''' &= (1-\pi''' d'')\,k'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

oder in

$$\begin{aligned} k &= (1+\pi_{,} d)\,k' \\ k' &= (1+\pi_{,,} d')\,k'' \\ k'' &= (1+\pi_{,,,} d'')\,k''' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Jedes dieser beiden Systeme kann nach Umständen angewandt werden.

14.

Nach diesen Vorbereitungen ist es ein Leichtes, die obigen Formeln auf eine beliebige Anzahl von Brechungen auszudehnen. Setzen wir noch

$$R' = \frac{1}{p'-q'}, \quad R'' = \frac{1}{p''-q''}, \text{ etc.}$$

und bezeichnen in Bezug auf die zweite und folgende Brechungen mit L', L'', etc. den Coefficienten, welcher in Bezug auf die erste Brechung L genannt wurde, so entstehen neben der Gleichung (A) des Art. 8 sogleich die folgenden:

$$\begin{aligned} n'\pi' &= (n'-n)\,R + n\pi + L\frac{k^2}{2} \\ n''\pi'' &= (n''-n')\,R' + n'\pi_{,} + L'\frac{k'^2}{2} \\ n'''\pi''' &= (n'''-n'')\,R'' + n''\pi_{,,} + L''\frac{k''^2}{2} \\ &\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

die man fortsetzen kann soweit als man will. In Bezug auf die Ausdrücke für L', L'', etc. will ich der Deutlichkeit wegen noch bemerken, dass sie aus denen für L des Art. 8 entstehen, wenn man in den letzteren

$$n',\ n,\ k,\ \pi,\ \pi'$$

bezüglich in

$$n'',\ n',\ k',\ \pi_{,},\ \pi''$$
$$n''',\ n'',\ k'',\ \pi_{,,},\ \pi'''$$

u. s. w. verwandelt, wie sich von selbst versteht.

15.

Eliminiren wir aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen die Grössen $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. und k', k'', etc. durch die in den Artt. 12 und 13 dafür erhaltenen Gleichungen, so stellen sie sich wie folgt:

$$n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$$
$$n''\pi'' = n'\pi' + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_{,}d + (1-\pi'd)^2 L'\frac{k^2}{2}$$
$$n'''\pi''' = n''\pi'' + (n'''-n'')R'' + n''\pi''\pi_{,,}d' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L''\frac{k^2}{2}$$
$$n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}} = n'''\pi''' + (n^{\text{IV}}-n''')R''' + n'''\pi'''\pi_{,,,}d'' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2(1-\pi'''d'')^2 L'''\frac{k^2}{2}$$

etc. etc.

welche man auch so weit fortsetzen kann, als man will.

Durch blosse Additionen erhält man hieraus eine Reihe von Gleichungen, welche in ihren Hauptgliedern nur vom ersten und letzten π abhängen, nemlich

$$n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$$
$$n''\pi'' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_{,}d + \{L + (1-\pi'd)^2 L'\}\frac{k^2}{2}$$
$$n'''\pi''' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'\pi_{,}d + n''\pi''\pi_{,,}d' + \{L + (1-\pi'd)^2 L' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L''\}\frac{k^2}{2}$$
$$n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}} = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + (n^{\text{IV}}-n''')R''' + n'\pi'\pi_{,}d + n''\pi''\pi_{,,}d' + n'''\pi'''\pi_{,,,}d'' + \{L + (1-\pi'd)^2 L' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2 L'' + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2(1-\pi'''d'')^2 L'''\}\frac{k^2}{2}$$

etc. etc.

wo wieder das Gesetz des Fortganges offenbar ist.

Die zwischen dem ersten und dem letzten π liegenden π', π'', π''', etc., welche hier in den Nebengliedern vorkommen, lassen sich in den Anwendungen leicht berücksichtigen, wie man in der Folge sehen wird.

16.

Ein Umstand, welcher in den Anwendungen häufig vorkommt, besteht darin, dass die Entfernungen, entweder aller brechenden Oberflächen, oder wenigstens einer Anzahl derselben, von einander weit kleiner sind als die Halbmesser der letzteren, und daher in Bezug auf diese Halbmesser als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden können, von denen es ausreicht, nur die ersten Potenzen zu berücksichtigen. Die Einführung dieser Bedingung vereinfacht die im vor. Art. erhaltenen Gleichungen und macht sie der Anwendung leichter zugänglich. Man kann durch die Benutzung dieses Umstandes genäherte Formeln von solcher Genauigkeit erhalten, dass die durch dieselben berechneten Linsensysteme entweder gar keiner, oder doch nur sehr geringer Verbesserung durch die Anwendung der strengen, trigonometrischen Formeln bedürfen, welche den Weg, den der Lichtstrahl nach verschiedenen Brechungen durchläuft, geben.

Nehmen wir jetzt an, dass alle Entfernungen der brechenden Oberflächen von einander, das ist alle mit d, d', d'', etc. bezeichneten Grössen so klein seien, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht, so bekommt man aus den Gleichungen des vor. Art. sogleich die folgenden:

$$n'\pi' = n\pi + (n'-n)R + L\frac{k^2}{2}$$

$$n''\pi'' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'^2 d + \{L + L' - 2\pi' d L'\}\frac{k^2}{2}$$

$$n'''\pi''' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + \{L + L' + L'' - 2\pi' d(L' + L'') - 2\pi'' d' L''\}\frac{k^2}{2}$$

$$n^{IV}\pi^{IV} = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + (n^{IV}-n''')R''' + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + n'''\pi'''^2 d'' + \{L + L' + L'' + L''' - 2\pi' d(L' + L'' + L''') - 2\pi'' d'(L'' + L''') - 2\pi''' d'' L'''\}\frac{k^2}{2}$$

etc. etc.

die man ebenfalls fortsetzen kann, so weit man will.

17.

Wir kommen jetzt zu dem Falle, in welchem nicht alle Entfernungen zwischen den brechenden Oberflächen so klein sind, dass sie als kleine Grössen erster Ordnung betrachtet werden könnten,

sondern wo auch solche Entfernungen vorhanden sind, die als endliche Grössen behandelt werden müssen. Die allgemeinen Gleichungen für diesen Fall lassen sich leicht aus den vorhergehenden zusammenstellen, allein es ist nicht nothwendig sie aufzuführen, sondern hinreichend, einen einfachen speciellen Fall auszuwählen, und die demselben zukommenden Gleichungen hinzuschreiben, da man von diesen leicht auf die jedem anderen Falle dieser Gattung zukommenden übergehen kann.

Es soll daher hier angenommen werden, dass sechs brechende Oberflächen vorhanden seien, und zwischen der dritten und vierten derselben sich eine so grosse Entfernung befinde, dass sie strenge berücksichtigt werden muss, während die Entfernungen zwischen den übrigen brechenden Oberflächen so klein sein mögen, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht. Wir bekommen nun zunächst die beiden nachstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} n'''\pi''' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' \\ &\quad + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + \{L + L' + L'' - 2\pi' d(L' + L'') - 2\pi'' d' L''\} \frac{k^2}{2} \\ n^{\text{VI}}\pi^{\text{VI}} &= n'''\pi_{'''} + (n^{\text{IV}} - n''')R''' + (n^{\text{V}} - n^{\text{IV}})R^{\text{IV}} + (n^{\text{VI}} - n^{\text{V}})R^{\text{V}} \\ &\quad + n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}2} d''' + n^{\text{V}}\pi^{\text{V}2} d^{\text{IV}} + \{L''' + L^{\text{IV}} + L^{\text{V}} - 2\pi^{\text{IV}} d'''(L^{\text{IV}} + L^{\text{V}}) - 2\pi^{\text{V}} d^{\text{IV}} L^{\text{V}}\} \frac{k'''^2}{2} \end{aligned}$$

welche durch folgende Relationen mit einander zu verbinden sind. Aus dem Art. 13 erhält man

$$k^2 = (1 + 2\pi' d + 2\pi'' d')k''^2$$

weshalb das mit k^2 multiplicirte Glied der ersten dieser beiden Gleichungen sich auch schreiben lässt:

$$+ \{L + L' + L'' + 2\pi' d L + 2\pi'' d'(L + L')\} \frac{k''^2}{2}$$

Ausserdem entnehmen wir den Artt. 12 und 13 die strengen Gleichungen

$$k'' = (1 + \pi_{'''} d'')k''', \quad \pi_{'''} = \pi''' + \pi'''\pi_{'''} d''$$

Addirt man nun die beiden obigen Gleichungen, und berücksichtigt die vorstehenden Relationen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} n^{\text{VI}}\pi^{\text{VI}} - n\pi &= (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + \\ &\quad + (n^{\text{IV}} - n''')R''' + (n^{\text{V}} - n^{\text{IV}})R^{\text{IV}} + (n^{\text{VI}} - n^{\text{V}})R^{\text{V}} \\ &\quad + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d' + n'''\pi'''\pi_{'''} d'' + n^{\text{IV}}\pi^{\text{IV}2} d''' + n^{\text{V}}\pi^{\text{V}2} d^{\text{IV}} \\ &\quad + \left\{ \begin{array}{l} \{L + L' + L'' + 2\pi' d L + 2\pi'' d'(L + L')\}(1 + \pi_{'''} d'')^2 + \\ \quad + \{L''' + L^{\text{IV}} + L^{\text{V}} - 2\pi^{\text{IV}} d'''(L^{\text{IV}} + L^{\text{V}}) - 2\pi^{\text{V}} d^{\text{IV}} L^{\text{V}}\} \end{array} \right\} \frac{k'''^2}{2} \end{aligned}$$

welche Gleichung leicht für eine grössere oder kleinere Anzahl von Brechungen, zwischen denen endliche Entfernungen vorhanden sind, eingerichtet werden kann.

18.

Es wären noch die im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen für die Oerter der Bilder auf eine unbestimmte Anzahl von brechenden Oberflächen auszudehnen, allein da eine solche Ausdehnung auf dieselbe Weise vorgenommen werden müsste, wie die eben ausgeführte, so meine ich davon absehen zu können, um so mehr, da sie sich in den verschiedenen speciellen Fällen weit leichter ausführen lässt, als in dem allgemein aufgestellten Falle. Wir werden, ehe wir diesen Abschnitt schliessen, nur noch Etwas über die Bedeutung einiger der im Vorhergehenden angewandten Grössen anführen.

Die im Vorhergehenden durch $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{\pi_{,}}$, $\frac{1}{\pi_{,,}}$, etc., so wie die durch $\frac{1}{\pi'}$, $\frac{1}{\pi''}$, $\frac{1}{\pi'''}$, etc. ausgedrückten, auf der Abscissenachse liegenden Linien nennt man die Vereinigungsweiten der Lichtstrahlen, und zwar die in der zuerst angeführten Gruppe enthaltenen, die Vereinigungsweiten vor den Brechungen, und die in der zweiten Gruppe enthaltenen, die Vereinigungsweiten nach den Brechungen. Die π, $\pi_{,}$, $\pi_{,,}$, etc. π', π'', π''', etc. können also die Reciproken der Vereinigungsweiten genannt werden. Alle hier vorkommenden Vereinigungsweiten, nebst ihren Reciproken, werden vom Durchschnittspunkt der betreffenden brechenden Oberfläche mit der Abscissenachse an gezählt, und sind positiv, wenn sie an derjenigen Seite dieser Oberfläche liegen, an welcher die Abscissen überhaupt wachsen. Ich mache auf diesen Umstand besonders aufmerksam, da er in der Anwendung von wesentlicher Bedeutung ist, und man sonst in der Dioptrik die Vereinigungsweiten vor den Brechungen auf der anderen Seite der brechenden Oberflächen positiv anzunehmen pflegt.

Die mit R, R', R'', etc. bezeichneten Grössen können die Reciproken der Halbmesser der brechenden Oberflächen genannt werden, und sind immer positiv, wenn die betreffende Oberfläche ihre convexe Seite dem einfallenden Lichtstrahle zuwendet.

Die auf der Abscissenachse gemessenen Entfernungen der brechenden Oberflächen von einander, d, d', d'', etc. sind unter allen

Umständen positiv, und ein negatives d muss für eine unmögliche Grösse gehalten werden.

---

§ 2. Berechnung eines Linsensystems von drei Brechungen.

19.

In den Anwendungen werden gewöhnlich die Brechungen der Lichtstrahlen durch Glaslinsen bewirkt, deren Oberflächen man zu erhabenen oder vertieften Kugelabschnitten bearbeitet. Abgesehen von der einfachen Linse, welche zwei Brechungen verursacht, ist ein Linsensystem von drei Brechungen das einfachste, welches man sich denken kann. Man stellt ein solches durch zwei Linsen von verschiedenen Glasarten her, die verschiedene Brechungsverhältnisse besitzen, indem man den inneren Halbmessern der beiden Linsen gleiche Grösse giebt, und sie, ohne eine merkliche Entfernung zu gestatten, an einander legt. Die erste Brechung geschieht sodann von der Luft in die Glasart der ersten Linse, die zweite von der Glasart der ersten Linse in die der zweiten Linse, und die dritte Brechung von dieser letzteren wieder in die Luft.

20.

Den vorstehenden Erklärungen zufolge, und da wir annehmen, dass die beiden Linsen nicht dicker gemacht werden, als ihre Haltbarkeit erfordert, folglich in Bezug auf die Halbmesser als kleine Grössen angesehen werden können, ist es die folgende Gleichung

$$n'''\pi''' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'^2 d + n''\pi''^2 d'$$
$$+ \{L + L' + L'' - 2\pi' d(L'+L'') - 2\pi'' d' L''\}\frac{k^2}{2}$$

wo nun d und d' die in der optischen Achse gemessenen Dicken der beiden Linsen bezeichnen, welche erfüllt werden muss. Aber wegen der mit der Brechung des Lichts immer verbundenen Zerstreuung, oder der Zerlegung der Lichtstrahlen in ihre einzelnen Bestandtheile, die sich durch verschiedene Färbung ausdrücken, reicht man mit dieser Einen Gleichung nicht aus, sondern muss sie auf

verschiedene Punkte des bei der Brechung des Sonnenlichts entstehenden Spectrums anwenden. Es genügt, sie auf zwei Punkte des Sonnenspectrums anzuwenden, von welchen der eine etwa einer bestimmten im rothen Theile, und der andere einer solchen im violetten Theile des Sonnenspectrums liegenden Fraunhoferschen Linie entspricht. Denn da die Zerstreuungen der verschiedenen Bestandtheile des Sonnenlichts in den verschiedenen Glasarten einander nahe proportional sind, so werden zugleich mit der zu bewirkenden Vereinigung der beiden eben angedeuteten Linien des Sonnenspectrums auch alle übrigen Linien desselben nahe mit einander vereinigt sein. Der übrig bleibende Mangel an Vereinigung verursacht wie bekannt das sogenannte secundäre Spectrum, und denkende praktische Optiker wählen für ihre zusammengesetzten Linsen immer solche zwei Glasarten aus, in Bezug auf welche das secundäre Spectrum möglichst klein ist.

Da in unserem Linsensystem die Brechungen von Luft ausgehen, und in Luft sich endigen, so wird $n''' = n$, und wir können für diese Grössen die Eins annehmen. Substituiren wir ausserdem in die obige Gleichung die Brechungsverhältnisse für die rothen Lichtstrahlen, bezeichnen den von k unabhängigen Theil der Gleichung mit P und den Coefficienten von k^2 mit Q, so ist die eine zu erfüllende Gleichung

$$\pi''' - \pi = P + Qk^2$$

Substituiren wir auch die Brechungsverhältnisse der violetten Lichtstrahlen in dieselbe Gleichung, bezeichnen hierauf den von k unabhängigen Theil derselben mit P', und den Coefficienten von k^2 mit Q', so ist auch die Gleichung

$$\pi''' - \pi = P' + Q'k^2$$

zu erfüllen. Durch die Erfüllung dieser beiden Gleichungen würden nur der rothe und der violette Lichtstrahl, welche beide unter der Ordinate k die erste brechende Oberfläche schneiden, mit einander vereinigt werden, während es erforderlich ist, dass die Vereinigung so viel als möglich über die ganze Oberfläche der Linsen bewirkt werde. Wir gelangen dahin, indem wir die Vereinigung der Central- und der Randstrahlen, jede für sich, bewirken, oder mit anderen Worten, indem wir die beiden obigen Gleichungen unabhängig von

k erfüllen, wodurch jede derselben in zwei Gleichungen zerfällt, also im Ganzen die folgenden vier

$$\pi''' - \pi = P, \quad \pi''' - \pi = P'$$
$$0 = Q, \qquad 0 = Q'$$

zu erfüllen sind. Es wird hiedurch bewirkt, dass die Gleichung für den Unterschied der Reciproken der ersten und der letzten Vereinigungsweite überhaupt die Form

$$\pi''' - \pi = P + Rk^4 + Sk^6 + \text{etc.}$$

annimmt, und da man die Oeffnung des Linsensystems immer so wählen kann, dass die mit k^4, etc. multiplicirten Glieder unmerklich werden, so kann man die Vereinigung der rothen und der violetten Lichtstrahlen mit einander als sich über die ganze Oberfläche des Linsensystems erstreckend betrachten.

Der Erfüllung aller vier obigen Gleichungen tritt jedoch in Bezug auf das hier in Betrachtung stehende Linsensystem ein unübersteigbares Hinderniss entgegen, sofern wir nur drei unbestimmte Grössen, nemlich R, R', R'' zu unserer Verfügung haben. Es können demzufolge nur drei Gleichungen erfüllt werden, und da jedenfalls die Gleichungen

$$\pi''' - \pi = P, \quad \pi''' - \pi = P'$$

erfüllt werden müssen, so können wir statt der Gleichungen $Q = 0$ und $Q' = 0$ nur eine Combination derselben erfüllen, wozu sich am besten die Summe derselben

$$Q + Q' = 0$$

eignet. Es kommt diess sehr nahe darauf hinaus, dass wir

$$Q = 0$$

mit Zugrundelegung der mittleren Brechungsverhältnisse der beiden Glasarten erfüllen, und es ist damit zugleich unter derselben Annahme auch

$$Q' = 0$$

erfüllt, da Q und Q' unter Zugrundelegung der nemlichen Brechungsverhältnisse mit einander identisch werden. Auch hat die Erfahrung gelehrt, dass man unter Zugrundelegung dieser Bestimmung sehr gut wirkende Linsensysteme zu Wege bringen kann; sie soll daher hier angewandt werden.

21.

Wir wollen nun annehmen, dass für die erste Linse, und für eine bestimmte Linie im rothen Theil des Sonnenspectrums, das Brechungsverhältniss von Luft in Glas wie $N:1$, und für die zweite Linse und dieselbe Linie des Sonnenspectrums dasselbe wie $N':1$ sei; für eine bestimmte Linie im violetten Theil des Sonnenspectrums soll das Brechungsverhältniss in der ersten Linse durch $M:1$, und in der zweiten Linse durch $M':1$ ausgedrückt werden. Demzufolge werden in die Gleichungen zu setzen sein

$$\begin{aligned} n &= 1 \\ n' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\ n'' &= N', \text{ oder } = M', \text{ oder } = m' \\ n''' &= 1 \end{aligned}$$

wo m und m' die mittleren Brechungsverhältnisse bedeuten, oder

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{1}{2}(N+M) \\ m' &= \tfrac{1}{2}(N'+M') \end{aligned}$$

sind. Die beiden zuerst zu erfüllenden Gleichungen werden nun

$$\begin{aligned} \pi''' - \pi &= (N-1)R + (N'-N)R' - (N'-1)R'' + A \\ \pi''' - \pi &= (M-1)R + (M'-M)R' - (M'-1)R'' + B \end{aligned}$$

die wir zunächst auf die folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned} \pi''' - \pi &= 2(N-1)\Delta + 2(N'-1)\Delta' + A \\ \pi''' - \pi &= 2(M-1)\Delta + 2(M'-1)\Delta' + B \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \text{(a)}$$

indem wir

$$\begin{aligned} 2\Delta &= R - R' \\ 2\Delta' &= R' - R'' \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= N\pi'^2 d + N'\pi''^2 d' \\ B &= M\pi'^2 d + M'\pi''^2 d' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\text{a}^*)$$

setzen, und im Laufe der Entwickelungen π' und π'' in A durch die Brechungszahlen N und N', in B hingegen durch M und M' ausdrücken werden.

Aus der Summe und dem Unterschiede der Gleichungen (a) bekommen wir, nachdem

$$\varkappa = \tfrac{1}{2}(B+A), \qquad \varkappa' = \tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$z = \frac{M-N}{m-1}, \qquad z' = \frac{M'-N'}{m'-1}$$

gesetzt worden sind:

$$(m-1)\Delta+(m'-1)\Delta' = \tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi) - \tfrac{1}{2}\varkappa$$

$$z(m-1)\Delta+z'(m'-1)\Delta' = -\varkappa'$$

und löst man diese in der Voraussetzung auf, dass $\varkappa$ und $\varkappa'$ bekannt sind, so ergiebt sich

$$\Delta = \tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi)\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} - \tfrac{1}{2}\varkappa\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} + \frac{\varkappa'}{(z'-z)(m-1)}$$

$$\Delta' = -\tfrac{1}{2}(\pi'''-\pi)\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} + \tfrac{1}{2}\varkappa\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} - \frac{\varkappa'}{(z'-z)(m'-1)}$$

In der ersten Annäherung muss man $\varkappa$ und $\varkappa'$ gleich Null setzen, und in der zweiten und den etwa nöthigen folgenden Annäherungen $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch die Werthe von R, R', R'' berechnen, welche die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat.

22.

Wenden wir uns jetzt zur Entwickelung der Gleichung $Q+Q'=0$, oder vielmehr der identisch werdenden Gleichungen $Q=0$, $Q'=0$, nachdem darin die mittleren Brechungsverhältnisse substituirt worden sind. Die einzige Gleichung, welche wir mit zu Grundelegung dieser Bedingung im gegenwärtigen Falle noch zu erfüllen haben, ist

$$0 = L+L'+L''-2\pi'd(L'+L'')-2\pi''d'L''$$

Da aber, wenn d und d' gleich Null gesetzt werden, diese Gleichung sich in $0 = L+L'+L''$ zusammenzieht, so kann man sie in die folgende einfachere umwandeln:

$$\text{(b)} \quad \ldots\ldots\ 0 = L+L'+L''+2\pi'Ld-2\pi''L''d'$$

Zur weiteren Entwickelung wollen wir für L den Ausdruck (5), für L' den Ausdruck (1), und für L'' den Ausdruck (6) des Art. 8 anwenden, und erhalten somit im gegenwärtigen Falle die Werthe

$$L = \frac{m-1}{m^2}\{(R-\pi)^3-m\pi(R-\pi)^2\}$$

$$L' = m'\pi''(R'-\pi'')^2-m\pi_,(R'-\pi_,)^2$$

$$L'' = -\frac{m'-1}{m'^2}\{(R''-\pi''')^3-m'\pi'''(R''-\pi''')^2\}$$

denen wir die durch die mittleren Brechungsverhältnisse ausge-

drückten Relationen zwischen den Vereinigungsweiten hinzufügen wollen. Diese sind

$$\left.\begin{aligned} m\pi' &= \pi + (m-1)R \\ m'\pi'' &= m\pi_{,} + (m'-m)R' \\ \pi''' &= m'\pi_{,,} - (m'-1)R'' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (c)$$

wozu noch die Gleichungen

$$\pi_{,} = \pi' + \pi'^2 d$$
$$\pi_{,,} = \pi'' + \pi''^2 d'$$

kommen.

23.

Führen wir die Hülfsgrösse π^0 durch die Gleichung

$$\pi^0 = m\pi_{,} - (m-1)R'$$

ein, dann ist auch, zufolge der Relationen (c) des vor. Art.

$$\pi^0 = m'\pi'' - (m'-1)R'$$

Aus diesen Gleichungen bekommt man ohne Mühe:

$$\pi_{,} = \pi^0 + \frac{m-1}{m}(R'-\pi^0)$$
$$\pi'' = \pi^0 + \frac{m'-1}{m'}(R'-\pi^0)$$

und

$$\pi_{,} = \pi^0 + (m-1)(R'-\pi_{,})$$
$$\pi'' = \pi^0 + (m'-1)(R'-\pi'')$$

folglich

$$R' - \pi_{,} = \frac{1}{m}(R'-\pi^0)$$
$$R' - \pi'' = \frac{1}{m'}(R'-\pi^0)$$

Hiemit verwandelt man den im vor. Art. aufgestellten Ausdruck für L' leicht in

$$L' = \frac{m'-1}{m'^2}\left\{(R'-\pi^0)^3 - m'\pi^0(R'-\pi^0)^2\right\}$$
$$- \frac{m-1}{m^2}\left\{(R'-\pi^0)^3 - m\pi^0(R'-\pi^0)^2\right\}$$

und es hat also durch diese Substitutionen L' dieselbe Form bekommen, welche den L und L'' ursprünglich gegeben worden ist; nur besteht L' aus zwei solchen Functionen, die in L und L'' blos Ein Mal vorkommen.

Die Summe aller L wird jetzt

$$L + L' + L'' = \frac{m-1}{m^2}\left\{\begin{array}{l}(R-\pi)^3 - m\pi\,(R-\pi)^2 \\ -(R'-\pi^0)^3 + m\pi^0 (R'-\pi^0)^2\end{array}\right\}$$
$$+\frac{m'-1}{m'^2}\left\{\begin{array}{l}(R'-\pi^0)^3 - m'\pi^0 (R'-\pi^0)^2 \\ -(R''-\pi''')^3 + m'\pi'''(R''-\pi''')^2\end{array}\right\}$$

und besteht also aus zwei einander ähnlichen Theilen.

24.

Erinnern wir uns der oben eingeführten Gleichungen

$$R - R' = 2\Delta, \quad R' - R'' = 2\Delta'$$

und setzen ausserdem:

$$R' - \pi^0 = g$$
$$D = \Delta + \tfrac{1}{2}\pi'^2 d$$
$$D' = \Delta' + \tfrac{1}{2}\pi''^2 d'$$

dann bekommen wir durch die Verbindung der Gleichungen (c) des vorvor. Art. mit denen für π^0 des vor. Art. sehr leicht

$$\pi^0 = \pi + 2(m-1)D + \pi'^2 d$$
$$\pi^0 = \pi''' - 2(m'-1)D' - \pi''^2 d'$$

$$(\mathrm{d}) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} R - \pi = g + 2mD \\ R'' - \pi''' = g - 2m'D' \end{array}\right.$$

Durch Anwendung dieser Werthe folgt

$$L + L' + L'' = \frac{m-1}{m^2}\left\{\begin{array}{l}(g+2mD)^3 - m\pi\,(g+2mD)^2 - g^3 \\ + m\pi g^2 + 2m\,(m-1)\,Dg^2 + mg^2\pi'^2 d\end{array}\right\}$$
$$+\frac{m'-1}{m'^2}\left\{\begin{array}{l}-(g-2m'D')^3 + m'\pi'''(g-2m'D')^2 + g^3 \\ -m'\pi''' g^2 + 2m'\,(m'-1)\,D'g^2 + m'g^2\pi''^2 d'\end{array}\right\}$$

oder, nach der Entwickelung:

$$L + L' + L'' = 2\,\frac{m-1}{m}\left\{\begin{array}{l}(m+2)\,Dg^2 + 2m\,(3D-\pi)\,Dg \\ +2m^2\,(2D-\pi)\,D^2 + \tfrac{1}{2}g^2\pi'^2 d\end{array}\right\}$$
$$+2\,\frac{m'-1}{m'}\left\{\begin{array}{l}(m'+2)\,D'g^2 - 2m'\,(3D'+\pi''')\,D'g \\ + 2m'^2(2D'+\pi''')\,D'^2 + \tfrac{1}{2}g^2\pi''^2 d'\end{array}\right\}$$

in welchem Ausdruck, abgesehen von den Factoren π' und π'' in den mit d und d' multiplicirten Gliedern, g die einzige Unbekannte ist.

25.

Substituirt man nun den eben erhaltenen Ausdruck in die Gleichung (b) des Art. 22, und setzt zur Abkürzung:

$$C = \frac{m-1}{2m}\pi'^2 d + \frac{m'-1}{2m'}\pi''^2 d'$$
$$C' = \pi' L d - \pi'' L'' d'$$
$$a = \frac{(m-1)(m+2)}{m} D + \frac{(m'-1)(m'+2)}{m'} + C$$
$$b = (m-1)(3D-\pi) D - (m'-1)(3D'+\pi''')D'$$
$$c = 2m(m-1)(2D-\pi)D^2 + 2m'(m'-1)(2D'+\pi''')D'^2 + C'$$

so wird die Endgleichung

$$0 = ag^2 + 2bg + c$$

aus welcher die Unbekannte g zu berechnen ist. Hat man g gefunden, so werden, zufolge der Gleichungen (d) des vor. Art.

$$R = g + 2mD + \pi$$
$$R'' = g - 2m'D' + \pi'''$$

worauf sich

$$R' = R - 2\Delta = R'' + 2\Delta'$$

ergiebt, welche zwei Werthe mit einander übereinstimmen müssen.

In der ersten Annäherung setzt man nicht nur, wie schon im Art. 21 in Bezug auf die Berechnung von Δ und Δ' gesagt wurde, $A = 0$, $B = 0$, sondern auch $C = 0$, $C' = 0$ und $D = \Delta$, $D' = \Delta'$, worauf g die einzige Unbekannte ist, welche die obige quadratische Gleichung enthält. In der zweiten, und wenn nöthig werden sollte, den folgenden Annäherungen berechnet man A, B, C, C', D, D' mit den Werthen der Reciproken der Halbmesser R, R', R'', die die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat. Meistens wird man nach der Ausführung der zweiten Annäherung schon ein ausreichend genaues Resultat erhalten haben.

Da die Gleichung, aus welcher der Werth von g zu ermitteln ist, eine quadratische ist, so erkennt man, dass die Auflösung der Aufgabe, mit den derselben zu Grunde gelegten Daten, entweder unmöglich ist, oder dass zwei von einander verschiedene Linsensysteme sie lösen. Bei den Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen, welche die Glasarten besitzen, die gewöhnlich in der praktischen Dioptrik angewandt zu werden pflegen, ist die Aufgabe lösbar, und führt somit auf zwei verschiedene Linsensysteme, unter denen es am zweckmässigsten ist, dasjenige auszuwählen, dessen Oberflächen die geringsten Krümmungen darbieten.

26.

Die Ausdrücke von π' und π'', welche zur Berechnung der von d und d' abhängigen Glieder gebraucht werden, ergeben sich aus dem Vorhergehenden auf einfache Weise. Rechnet man

$$u = \pi + (N-1)R, \quad u' = \pi''' + (N'-1)R''$$
$$w = \pi + (M-1)R, \quad w' = \pi''' + (M'-1)R''$$

so findet man ohne Mühe, dass A, B, C, C', D, D' die folgenden Ausdrücke annehmen:

$$A = \frac{u^2}{N}d + \frac{u'^2}{N'}d'$$
$$B = \frac{w^2}{M}d + \frac{w'^2}{M'}d'$$
$$C = \frac{m-1}{8m^3}(u+w)^2 d + \frac{m'-1}{8m'^3}(u'+w')^2 d'$$
$$C' = \{(R-\pi) - m\pi\}(R-\pi)^2 \frac{m-1}{2m^3}(u+w)d$$
$$+ \{(R''-\pi''') - m'\pi'''\}(R''-\pi''')^2 \frac{m'-1}{2m'^3}(u'+w')d'$$
$$D = \Delta + \frac{(u+w)^2}{8m^2}d$$
$$D' = \Delta' + \frac{(u'+w')^2}{8m'^2}d'$$

womit alle Hülfsgrössen entwickelt, und die ersten Potenzen der Linsendicken vollständig berücksichtigt sind.

27.

Es soll jetzt, um die Genauigkeit des im Vorstehenden entwickelten Verfahrens zu zeigen, ein Objectiv nach demselben berechnet werden, wobei wir die Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse von zwei Fraunhoferschen Glasarten zu Grunde legen werden. Die gegebenen Stücke seien die folgenden:

$$N = 1.51870$$
$$M = 1.53956$$
$$N' = 1.61800$$
$$M' = 1.660242$$
$$\pi = 0$$
$$\pi''' = 1$$

Die Bedingung $\pi = 0$ ist die des Objectivs, oder der Ausdruck dafür, dass die einfallenden Lichtstrahlen von einem unendlich weit entfernten Gegenstande kommen, während die Bedingung $\pi''' = 1$ Nichts weiter

als die gewählte Maasseinheit ausdrückt, die nach ausgeführter Rechnung in jede andere, beliebige Maasseinheit verwandelt werden kann. Aus den vorstehenden Daten bekommt man zunächst

$$M-N = 0.020860$$
$$M'-N' = 0.042242$$
$$m = 1.52913$$
$$m' = 1.63912$$
$$z = 0.0394232$$
$$z' = 0.0660939$$
$$z'-z = 0.0266707$$

Die erste Annäherung giebt nun, nachdem $A = B = 0$ gesetzt worden, die genäherten Werthe

$$\Delta = +2.34172$$
$$\Delta' = -1.15639$$

und allgemein

$$a = (0.086786)\,D + (0.151969)\,D'$$
$$b = (0.200684)\,D^2 - (9.805583)\,(3D'+1)\,D'$$
$$c = (0.510066)\,D^3 + (0.321223)\,(2D'+1)\,D'^2 + C$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Setzt man in diesen Ausdrücken jetzt $C = 0$, so wie $D = \Delta$ und $D' = \Delta'$, so ergiebt sich die Endgleichung

$$0 = g^2 + 2(0.751630)\,g + (1.492480)$$

deren Wurzeln

$$g = -6.52838, \text{ und } g = -4.76074$$

sind. Da nun ausserdem hier

$$2m\Delta = +7.16158, \quad 2m'\Delta' = -3.79093$$

ist, so bekommen wir für die beiden Objective, die aus diesem Verfahren hervorgehen, die genäherten Werthe

1stes Objectiv.	2tes Objectiv.
$R = +0.63323$,	$R = +2.40085$
$R' = -4.05021$,	$R' = -2.28259$
$R'' = -1.73743$,	$R'' = +0.03019$

womit die erste Annäherung ausgeführt ist.

28.

Um zur zweiten Annäherung überzugehen müssen zuerst die Dicken der Linsen festgesetzt werden, die wir wie folgt annehmen wollen:

$$\log d = 7.72596, \qquad \log d' = 7.54987$$

und es muss jedes der beiden eben erhaltenen Objective für sich behandelt werden. Nehmen wir zuerst das erste Objectiv vor, so erhalten wir

$$u = +\ 0.3284, \qquad u' = -\ 0.0738$$
$$w = +\ 0.3417, \qquad w' = -\ 0.1471$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +\ 0.3351, \qquad \tfrac{1}{2}(u'+w') = -\ 0.1105$$

und hieraus zunächst

$$A = 0.0003897, \qquad \varkappa = 0.0004197$$
$$B = 0.0004497, \qquad \varkappa' = 0.0000300$$

Es wurden hierauf die Verbesserungen

$$\text{von } \varDelta = \begin{Bmatrix} -\ 0.00098 \\ +\ 0.00213 \end{Bmatrix} = +\ 0.00115$$

$$\text{und von } \varDelta' = \begin{Bmatrix} +0.00048 \\ -0.00176 \end{Bmatrix} = -\ 0.00128$$

gefunden, womit sich die genaueren Werthe

$$\varDelta = +\ 2.34287, \qquad \varDelta' = -\ 1.15767$$

ergaben. Weiter berechnet man

$$D = \varDelta + 0.00016, \quad D' = \varDelta' + 0.00001$$

mithin

$$D = +\ 2.34303, \qquad D' = -\ 1.15766$$

Es werden ferner, wenn wir wieder die Werthe der einzelnen Glieder ansetzen:

$$C = \begin{Bmatrix} +0.00006 \\ 0.00000 \end{Bmatrix} = +\ 0.00006$$

$$C' = \begin{Bmatrix} +0.00007 \\ +0.00187 \end{Bmatrix} = +\ 0.00194$$

und die Endgleichung

$$0 = g^2 + 2(0.751992)g + (1.493179)$$

deren einzig hier anzuwendende Wurzel

$$g = -\ 6.53479$$

ist. Da ferner hier

$$2mD = +\ 7.16558, \qquad 2m'D' = -\ 3.79508$$

sind, so erhalten wir schliesslich

$$R = +\ 0.63079$$
$$R' = -\ 4.05500$$
$$R'' = -\ 1.73971$$

die von den Werthen der ersten Annäherung wesentlich verschieden sind.

29.

Unter Anwendung derselben Linsendicken wie vorher, ergeben sich in Bezug auf das zweite Objectiv in der zweiten Annäherung weit grössere Abweichungen der Werthe der R, R', R'' von denen der ersten Annäherung, wie die folgenden Rechnungen zu erkennen geben. Es wurden erhalten

$$u = +\ 1.2453, \qquad u' = +\ 1.0187$$
$$w = +\ 1.2954, \qquad w' = +\ 1.0199$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +\ 1.2704, \qquad \tfrac{1}{2}(u'+w') = +\ 1.0193$$
$$A = 0.0077080, \qquad \varkappa = 0.0078647$$
$$B = 0.0080214, \qquad \varkappa' = 0.0001567$$

$$\text{die Verb. von } \varDelta = \begin{Bmatrix} -0.01842 \\ +0.01111 \end{Bmatrix} = -\ 0.00731$$

$$\text{die Verb. von } \varDelta' = \begin{Bmatrix} +0.00909 \\ -0.00919 \end{Bmatrix} = -\ 0.00010$$

Man sieht, dass schon diese Verbesserungen wesentlich grösser ausgefallen sind, als die des ersten Objectivs, und Ähnliches wird man in den folgenden Zahlenwerthen finden. Es ergeben sich ferner

$$\varDelta = +\ 2.33441, \qquad \varDelta' = -\ 1.15649$$
$$D = \varDelta + 0.00184, \qquad D' = \varDelta' + 0.00069$$
$$D = +\ 2.33625, \qquad D' = -\ 1.15580$$
$$C = \begin{Bmatrix} +0.00064 \\ +0.00027 \end{Bmatrix} = +\ 0.00091$$
$$C' = \begin{Bmatrix} +0.01387 \\ -0.00129 \end{Bmatrix} = +\ 0.01258$$
$$0 = g^2 + 2(0.750954)g + (1.491114)$$
$$g = -\ 4.75278$$
$$2mD = +\ 7.14487, \qquad 2m'D' = -\ 3.78898$$
$$R = +\ 2.39209$$
$$R' = -\ 2.27675$$
$$R'' = +\ 0.03620$$

Hiemit können die Berechnungen im Grunde als geschlossen betrachtet werden.

30.

Führt man die im Vorhergehenden erhaltenen Werthe der Halbmesser der beiden Objective auf die Brennweite des von mir in der Abhandlung: »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls u. s. w.«*) untersuchten Objectivs des Königsberger Heliometers hin, so wird man finden, dass das erste Objectiv nahe mit diesem übereinkommt, während das zweite davon wesentlich unterschieden ist. Aus diesem Grunde, und da das zweite hier berechnete Objectiv dem ersten vorzuziehen ist, weil es kleinere Krümmungen der Linsenoberflächen darbietet, will ich jenes hier nicht weiter berücksichtigen, aber für dieses eine dritte Annäherung durchführen, um zu zeigen, dass die Resultate der letzteren von denen der zweiten Annäherung nur sehr geringe Verschiedenheiten darbieten.

31.

In der dritten Annäherung in Bezug auf das obige zweite Objectiv ergaben sich die folgenden Zahlenwerthe:

$$u = +1.2408, \qquad u' = +1.0225$$
$$w = +1.2907, \qquad w' = +1.0240$$
$$\tfrac{1}{2}(u+w) = +1.2658, \qquad \tfrac{1}{2}(u'+w') = +1.0233$$
$$A = 0.0076863, \qquad \varkappa = 0.0078421$$
$$B = 0.0079978, \qquad \varkappa' = 0.0001558$$

$$\text{die Verbesserung von } \varDelta = \begin{Bmatrix} -0.01836 \\ +0.01104 \end{Bmatrix} = -0.00732$$

$$\text{die Verbesserung von } \varDelta' = \begin{Bmatrix} +0.00907 \\ -0.00914 \end{Bmatrix} = -0.00007$$

$$D = \varDelta + 0.00182, \qquad D' = \varDelta' + 0.00069$$
$$\varDelta = +2.33440, \qquad \varDelta' = -1.15646$$
$$D = +2.33622, \qquad D' = -1.15577$$
$$C = \begin{Bmatrix} +0.00063 \\ +0.00027 \end{Bmatrix} = +0.00090$$
$$C' = \begin{Bmatrix} +0.01366 \\ -0.00127 \end{Bmatrix} = +0.01239$$
$$0 = g^2 + 2(0.750970)\,g + (1.491124)$$
$$g = -4.75207$$
$$2mD = +7.14477, \qquad 2m'D' = -3.78889$$

*) Abgedruckt S. 65—202 dieses Bandes.

$$R = +\ 2.39270$$
$$R' = -\ 2.27610$$
$$R'' = +\ 0.03682$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit denen der zweiten Annäherung zeigt nur geringe Unterschiede.

32.

Es soll nun, um die Abweichungen von der strengen Vereinigung der von einem Punkt ausgehenden Lichtstrahlen, die das zweite Objectiv darbietet, kennen zu lernen, der Gang verschiedener Lichtstrahlen durch dasselbe vermittelst strenger Formeln berechnet, und dazu die Verfahrungsarten, die ich in der Abhandlung: »Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls u. s. w.«. entwickelt habe, angewandt werden. Da man im gegenwärtigen Falle von der Berechnung der Hauptpunkte absehen kann, so werde ich mich in Bezug auf die Centralstrahlen des Gaussischen Verfahrens in der Gestalt bedienen, welche ich demselben in den Artt. 37 u. f. der angezogenen Abhandlung gegeben habe.

In Bezug auf die Lichtstrahlen, die in solcher Entfernung von der optischen Achse des Linsensystems einfallen, dass man nicht die Sinus ihren Bögen gleich setzen darf, und die ich überhaupt Randstrahlen nennen werde, habe ich in der angezogenen Abhandlung zwei allgemeine Verfahrungsarten vollständig entwickelt, die für jede beliebige Lage des einfallenden Lichtstrahls gelten, und nicht voraussetzen, dass dieser letztere mit der optischen Achse in einer und derselben Ebene liege.

Die Grundidee der ersten dieser beiden Verfahrungsarten gehört Gauss, welcher sie in seinen »Dioptrischen Untersuchungen« niedergelegt hat. Das zweite a. a. O. gegebene Verfahren ist mir dagegen völlig eigenthümlich, und so viel mir bekannt, ist kein Vorbild davon vorhanden. Dieses zweite Verfahren ist auch in der Anwendung dem ersten wesentlich vorzuziehen, und ich habe mich desselben immer ausschliesslich bedient. Aus jeder dieser beiden allgemeinen Verfahrungsarten folgt das sehr einfache specielle Verfahren, welches sich auf die Fälle erstreckt, in denen der einfallende Lichtstrahl mit der optischen Achse des Linsensystems in Einer Ebene

liegt. Letzteres Verfahren ist sehr bequem, und ich muss es auch für neu halten, da ich es vorher bei keinem Schriftsteller gefunden habe.

33.

Ehe ich zur Anwendung meines strengen Verfahrens auf das oben berechnete zweite Objectiv übergehe, muss ich einen Umstand erörtern, der dabei eintreten kann. Wenn der Halbmesser der letzten brechenden Oberfläche des Linsensystems, auf welches man dieses Verfahren anwenden will, sehr gross ist, so wird der Bogen oder Winkel θ^{m-1} sehr klein, und die Gleichung

$$k^{m-1} = (p^{m-1} - q^{m-1}) \sin \theta^{m-1}$$

(Artt. 24 u. 31 der früheren Abh.) giebt für k^{m-1} keinen hinreichend genauen Werth, weil $\sin \theta^{m-1}$ für diese Bestimmung nicht hinreichend genau erhalten werden kann, wenngleich der dafür sich ergebende Werth für andere Bestimmungen ausreichend genau ist, und namentlich a^{m-1} mit weit mehr als hinreichender Genauigkeit dadurch erhalten wird.

Man muss in diesem Falle zur Bestimmung von k^{m-1} von der vorletzten Brechung ausgehen, durch welche man, vermittelst der Gleichungen, die überhaupt die Identität zwischen irgend einem gebrochenen Lichtstrahl und dem zunächst einfallenden bedingen, die Bestimmung von k^{m-1} auch leicht ableiten kann. Diese Gleichungen sind im Art. 21 der früheren Abh. unter verschiedenen Formen aufgestellt worden; wählen wir die erste Form und wenden dieselbe auf den vorletzten gebrochenen Lichtstrahl an, so werden sie:

$$0 = k^{m-1} \cos \psi^{m-1} - k^{m-2} \cos \psi^{m-2} + (a^{m-1} - a^{m-2}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \cos \beta^{m-1}$$
$$0 = k^{m-1} \sin \psi^{m-1} - k^{m-2} \sin \psi^{m-2} + (a^{m-1} - a^{m-2}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \sin \beta^{m-1}$$

woraus man leicht

$$(a) \ldots \left\{ \begin{aligned} k^{m-1} \sin (\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) &= k^{m-2} \sin (\psi^{m-2} - \beta^{m-1}) \\ k^{m-1} \cos (\psi^{m-1} - \beta^{m-1}) &= k^{m-2} \cos (\psi^{m-2} - \beta^{m-1}) \\ &\quad + (a^{m-2} - a^{m-1}) \operatorname{tg} \alpha^{m-1} \end{aligned} \right.$$

erhält. Hiemit sind k^{m-1} und ψ^{m-1} gegeben, nachdem k^{m-2} und ψ^{m-2} ermittelt worden sind. Aus der oft angez. Abh. findet man aber leicht, dass wenn man

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\Phi &= \operatorname{tg}\mu^{m-2}\cos\omega^{m-1} \\ \sin\varphi &= \sin\mu^{m-2}\sin\omega^{m-1} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

setzt, man

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta^{m-2}\sin(\psi^{m-2}-\beta^{m-1}) &= \sin\varphi \\ \sin\theta^{m-2}\cos(\psi^{m-2}-\beta^{m-1}) &= \cos\varphi\sin(\alpha^{m-2}-\Phi) \end{aligned}\right\} \ldots (c)$$

erhält. Hat man hieraus $\operatorname{tg}(\psi^{m-2}-\beta^{m-1})$ und $\sin\theta^{m-2}$ berechnet, so ergeben sich

$$\left.\begin{aligned} k^{m-2} &= (p^{m-2}-q^{m-2})\sin\theta^{m-2} \\ a^{m-2} &= q^{m-2}+2(p^{m-2}-q^{m-2})\sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-2} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (d)$$

Zur Berechnung von a^{m-1} aus der der vorstehenden ähnlichen Gleichung

$$a^{m-1} = q^{m-1}+2(p^{m-1}-q^{m-1})\sin^2\tfrac{1}{2}\theta^{m-1} \ldots\ldots\ldots (e)$$

dient die im gegenwärtigen Falle mehr als hinreichend genäherte Gleichung

$$\theta^{m-1} = H - \lambda^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (f)$$

worauf die Gleichungen (a) k^{m-1} und ψ^{m-1} mit Genauigkeit geben. Bei der Anwendung dieses Verfahrens werden die Gleichungen für

$$\sin\theta^{m-1}\sin(\psi^{m-1}-\beta^{m-1}) \text{ und } \sin\theta^{m-1}\cos(\psi^{m-1}-\beta^{m-1})$$

(Art. 24 der früheren Abh.), die im gegenwärtigen Falle keine ausreichend genauen Werthe für θ^{m-1} und ψ^{m-1} geben können, gänzlich überflüssig, und brauchen nicht berechnet zu werden. Es sind also im gegenwärtigen Falle von den Gleichungen der Schlussrechnung nur die vier zu berechnen, welche die Werthe von H, η, β^m und $\sin\alpha^m$ geben.

In den Fällen, in denen die Lichtstrahlen mit der optischen Achse in Einer Ebene liegen, kürzen sich die vorstehenden Formeln wesentlich ab. Da jetzt die Winkel θ^{m-2} und θ^{m-1} ohnehin, und zwar mit einer für ihre übrigen Verwendungen hinreichenden Genauigkeit, erhalten werden, so fallen die vorstehenden Gleichungen (b), (c) und (f) weg, und man kann ohne Weiteres k^{m-2}, a^{m-2} und a^{m-1} aus den Gleichungen (d) und (e) berechnen. Die Gll. (a) ziehen sich im gegenwärtigen Falle in die einzige

$$k^{m-1} = k^{m-2}+(a^{m-2}-a^{m-1})\operatorname{tg}\alpha^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (g)$$

zusammen, in welcher alle Grössen rechter Hand bekannt sind, und welche k^{m-1} mit aller erforderlichen Genauigkeit giebt.

34.

Bei der strengen Berechnung des Weges verschiedener Lichtstrahlen, die das oben berechnete zweite Objectiv durchlaufen, werde ich zwei Hauptgattungen von Lichtstrahlen vornehmen: nemlich zuerst solche, die parallel mit der optischen Achse einfallen, und darauf solche, die mit der optischen Achse einen Winkel von 16′ machen. Da bei grossen Fernröhren und starken Vergrösserungen das Gesichtsfeld immer wesentlich kleiner gemacht werden muss als der Sonnendurchmesser, und 16′ dem halben Sonnendurchmesser entsprechen, so ist diese Annahme mehr als hinreichend, und die Abweichungen, die aus dieser Annahme folgen, werden grösser sein, als diejenigen, welche das Objectiv bei seiner Anwendung zu erkennen giebt.

Ich werde ferner bei jeder der beiden oben genannten Gattungen von Hauptstrahlen einen rothen und einen violetten Centralstrahl und Randstrahl in Rechnung ziehen. Es ist bereits erwähnt, dass, wenn die rothen und die violetten Strahlen des Sonnenspectrums mit einander zur Vereinigung gebracht worden sind, auch alle übrigen Strahlen sich nahe mit einander vereinigen, und der übrig bleibende Mangel an Vereinigung dieser letzteren das sogenannte secundäre Spectrum hervorruft, welches nur dann vermieden werden kann, wenn es gelingt zwei Glasarten aufzufinden, deren Zerstreuungen in allen Punkten des Sonnenspectrums einander proportional sind.

35.

Da den hier angewandten Bezeichnungen zufolge

$$R = \frac{1}{p-q}, \quad R' = \frac{1}{p'-q'}, \quad R'' = \frac{1}{p''-q''}$$

und die Linsendicken

$$d = q'-q, \quad d' = q''-q'$$

sind, so geben die Resultate des Art. 31 und die Linsendicken, die bei ihrer Berechnung angewandt worden sind:

$$\begin{aligned} p-q &= +\ 0.417938, & q'-q &= 0.005321 \\ p'-q' &= -\ 0.439348, & q''-q' &= 0.003547 \\ p''-q'' &= +\ 27.1591 \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir, wenn $q = 0$ gesetzt wird,

$$p = + \ 0.417938$$
$$p' = - \ 0.434027, \qquad q' = 0.005321$$
$$p'' = + \ 27.1680, \qquad q'' = 0.008868$$

Es werden ferner dem Art. 31 der früheren Abhandlung entsprechend

$$\log A = 9.978303n, \qquad \log B = 0.287613$$
$$\log A' = 8.208893n, \qquad \log B' = 0.007025$$

gefunden, während aus den oben benutzten numerischen Werthen der Brechungsverhältnisse sich ergeben:

für die rothen Strahlen	für die violetten Strahlen
$\log n = 0$	$\log n = 0$
$\log n' = 0.181472,$	$\log n' = 0.187397$
$\log n'' = 0.208979,$	$\log n'' = 0.220171$
$\log n''' = 0$	$\log n''' = 0$

Endlich werde ich für die Randstrahlen

$$k = 0.03$$

setzen, welche Annahme sehr nahe der halben Oeffnung entspricht, die man grossen Objectiven zu geben pflegt.

36.

1. Die parallel mit der Achse einfallenden rothen Centralstrahlen.

In Bezeichungen des Art. 37 u. f. der oft genannten Abhandlung fanden sich:

$$\log u = 0.093804$$
$$\log u' = 9.354140n, \qquad \log t' = 7.544448n$$
$$\log u'' = 8.357072n, \qquad \log t'' = 7.340891n$$
$$\log A = 0.093804$$
$$\log A' = 9.998108$$
$$\log A'' = 0.006919$$
$$\log A''' = 9.997135$$
$$\log A^{\text{IV}} = 9.997148$$

*) und hieraus die Entfernung des Brennpunktes von der letzten brechenden Oberfläche, oder

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$
$$\eta''' = 0$$

*) Die Berechnung der a. a. O. mit B', B'', etc. bezeichneten Grössen ist hier nicht erforderlich.

2. Die mit der Achse parallel einfallenden violetten Centralstrahlen.

$$\log u = 0.110928$$
$$\log u' = 9.438843n, \quad \log t' = 7.538563n$$
$$\log u'' = 8.385787n, \quad \log t'' = 7.329699n$$
$$\log A = 0.110928$$
$$\log A' = 9.998058$$
$$\log A'' = 0.007553$$
$$\log A''' = 9.997109$$
$$\log A^{\text{IV}} = 9.997123$$

und hieraus

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$
$$\eta''' = 0$$

3. Die unter einem Winkel von 16′ mit der Achse einfallenden rothen Centralstrahlen.

$$\xi''' \text{ wie oben}$$
$$\eta''' = -0.0046849$$

4. Die unter einem Winkel von 16′ mit der Achse einfallenden violetten Centralstrahlen.

$$\xi''' \text{ wie oben}$$
$$\eta''' = -0.0046851$$

5. Die mit der Achse parallel einfallenden rothen Randstrahlen.

Für diese nach dem Verfahren des Art. 31 der früheren Abhandlung, und mit Benutzung der hier nothwendigen im obigen Art. 33 erklärten Abänderung, zu berechnenden Lichtstrahlen sind die numerischen Werthe der constanten Grössen schon im vor. Art. gegeben. Hinzuzufügen ist nur, dass im gegenwärtigen Falle

$$\alpha = 0, \quad k = 0.03$$

sind, woraus

$$\theta = +4^0\, 6'\, 58''63$$

folgt. Hiemit bekommt man:

$$\alpha' = +1^\circ 24' 25''95, \quad \theta' = -3^\circ 54' 18''08$$
$$\alpha'' = +1 \;\; 4 \;\; 49.17, \quad \theta'' = +0 \;\; 3 \;\; 46.58$$
$$\alpha''' = +1 \;\; 42 \;\; 33.16$$
$$a' = 0.004301, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475973, \quad \log k'' = 8.474717$$

und die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls wird

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298344$$

wo

$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.474802$$

ist.

6. Die mit der Achse parallel einfallenden violetten Randstrahlen.

Hier sind wieder

$$\alpha = 0, \quad k = 0.03$$
$$\theta = +4^\circ 6' 58''63$$

und es folgen hieraus:

$$\alpha' = +1^\circ 26' 38''19, \quad \theta' = -3^\circ 54' 17''10$$
$$\alpha'' = +1 \;\; 3 \;\; 14.93, \quad \theta'' = +0 \;\; 3 \;\; 46.55$$
$$\alpha''' = +1 \;\; 42 \;\; 31.94$$
$$a' = 0.004301, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475943, \quad \log k'' = 8.474717$$

und die Gleichung des ausfahrenden Lichtstrahls wird

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298344$$

wo

$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.474681$$

37.

Wenn wir zu den gegen die Achse geneigten Randstrahlen übergehen, so bieten sich vier extreme Fälle dar, die einzeln zu untersuchen sind. Man kann sich den aus parallelen Lichtstrahlen bestehenden, schief einfallenden Strahlenbündel als einen Cylinder von elliptischer Grundfläche denken, dessen Durchschnitt mit dem Objectiv einen Kreis bildet, welcher die Oeffnung des Objectivs zum Durchmesser hat. Es ist leicht einzusehen, dass die vier Lichtstrahlen, welche den

Endpunkten der beiden Hauptachsen der genannten cylindrischen Grundfläche entsprechen, auch den Maximis und Minimis der dioptrischen Abweichungen in den Ordinaten y und z der überhaupt schief einfallenden Lichtstrahlen entsprechen müssen. Setzt man, was immer bewirkt werden kann, in dem Verfahren des Art. 24 der früheren Abhandlung $\beta = 0$, dann sind es die Werthe

$$\psi = 0, \ \psi = 90^0, \ \psi = 180^0, \ \psi = 270^0$$

welche diese vier Lichtstrahlen kennzeichnen.

Geht man die a. a. O. gegebene Auflösung der allgemeinen Aufgabe durch, so findet man leicht, dass die beiden Fälle $\psi = 90^0$ und $\psi = 270^0$ auf dasselbe Resultat hinführen müssen, mit dem alleinigen Unterschiede, dass in dem einen Falle z positiv und in dem anderen negativ wird. Von diesen beiden Fällen braucht daher nur der eine der Rechnung unterzogen zu werden.

Ferner erkennt man, dass in den beiden Fällen $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$ der einfallende Lichtstrahl mit der optischen Achse in einer und derselben Ebene liegt, und daher das Verfahren des Art. 31 angewandt werden kann; sie unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass in dem einen Falle θ positiv und in dem anderen θ negativ anzunehmen ist, während in beiden α positiv gesetzt wird. Es muss jeder dieser beiden Fälle der Rechnung unterzogen werden, da sie im Allgemeinen verschiedene Resultate geben.

38.

7. Die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden rothen Lichtstrahlen.

a) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 0$, θ positiv.

Es wird wieder

$$\theta = + 4^0 6' 58'' 63$$

und hieraus folgen:

$$\alpha' = + 1^0 34' 57'' 18, \quad \theta' = - 3^0 54' 13'' 46$$
$$\alpha'' = + 1 \ 14 \ 41.63, \quad \theta'' = + 0 \ 3 \ 46.40$$
$$\alpha''' = + 1 \ 58 \ 32.16$$
$$a' = 0.004302, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475831, \quad \log k'' = 8.474383$$

$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298114$
$z = 0$

nebst

$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.537749$$

b) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 180^0$, θ negativ

$$\theta = -\ 4^0 6' 58'' 63$$

$\alpha' = -\ 1^0 13' 54'' 80$, $\theta' = +\ 3^0 54' 22'' 72$
$\alpha'' = -\ 0\ 54\ 56.48$, $\theta'' = -\ 0\ \ 3\ 46.76$
$\alpha''' = -\ 1\ 26\ 33.86$
$a' = 0.004302$, $a'' = 0.008884$
$\log k' = 8.476117n$, $\log k'' = 8.475054n$
$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298575$
$z = 0$
$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401157n$

c) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 90^0$, $\beta = 0$

Durch das Verfahren des Art. 24 der angez. Abh. ergaben sich hier die folgenden Werthe:

$$\theta = +\ 4^0 6' 58'' 63$$

1ste Brechung.

$\log \mathrm{tg}\,\chi = 1.189285$, $\lambda = +\ 4^0 7' 29'' 63$, $\mu = +\ 2^0 42' 53'' 07$

2te Brechung.

$q = +\ 0^0\ 1'\ 1'' 96$, $\log \mathrm{tg}\,\omega' = 9.281060n$, $\lambda' = -\ 5^0 18' 54'' 20$
$r = \ 86\ 17\ 58.9$, $\log \mathrm{tg}\,\alpha' = 8.393679$, $\mu' = -\ 4\ 59\ 16.79$
$\beta' + r = 169\ 11\ 11.5$, $\log \mathrm{tg}\,\chi' = 8.962078n$, $\beta' = 82\ 53\ 12.6$

3te Brechung.

$q' = -\ 1^0 24' 43'' 94$, $\log \mathrm{tg}\,\omega'' = 9.076469n$, $\lambda'' = +\ 1^0\ 1' 50'' 39$
$r' = -\ 5\ 14\ \ 3.4$, $\log \mathrm{tg}\,\alpha'' = 8.280484$, $\mu'' = +\ 1\ 40\ \ 3.96$
$\beta'' - \beta' + r' = -\ 6\ 47\ 57.7$, $\log \mathrm{tg}\,\chi'' = 7.966598n$, $\beta'' = 81\ 19\ 18.3$

Schlussrechnung.

$H = +\ 1^0 5' 34'' 37$, $\log \eta = 9.999981$
$\beta''' = 81\ \ 7\ 34.8$, $\log \sin \alpha''' = 8.479837$

ferner durch die Formeln des obigen Art. 33

$$\Phi = +\,4^\circ 57' 11'' 12, \quad \log\sin\varphi = 8.012658\,n$$
$$\log\mathrm{tg}\,(\psi' - \beta'') = 9.184516, \quad \log\sin\theta' = 8.833163\,n$$
$$\log k' = 8.475972, \quad a' = 0.004301$$
$$\theta'' = 0^\circ 3' 44'', \quad a'' = 0.008884$$
$$\psi'' = 90^\circ 2' 32'' 9, \quad \log k'' = 8.474715$$

Hiemit werden die Gleichungen des ausfahrenden Strahls:

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha'''\cos\beta''' - 0.0000221$$
$$z = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha'''\sin\beta''' + 0.0298343$$

wo

$$\log\mathrm{tg}\,\alpha'''\cos\beta''' = 7.668276$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha'''\sin\beta''' = 8.474804$$

39.

8. Die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden violetten Lichtsrahlen.

a) $\alpha = 0^\circ 16'$, $\psi = 0$, θ positiv

$$\theta = +\,4^\circ\ 6' 58'' 63$$
$$\alpha' = +\,1^\circ 37'\ 0'' 86, \quad \theta' = -\,3\ 54\ 12.53$$
$$\alpha'' = +\,1\ 12\ 52.34, \quad \theta'' = +\,0\ \ 3\ 46.41$$
$$\alpha''' = +\,1\ 58\ 30.44$$
$$a' = 0.004302, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.475802, \quad \log k'' = 8.474390$$
$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298119$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.537644$$

b) $\alpha = 0^\circ 16'$, $\psi = 180^\circ$, θ negativ

$$\theta = -\,4^\circ\ 6' 58'' 63$$
$$\alpha' = -\,1^\circ 16' 15'' 63, \quad \theta' = +\,3\ 54\ 21.70$$
$$\alpha'' = -\,0\ 53\ 37.62, \quad \theta'' = -\,0\ \ 3\ 46.76$$
$$\alpha''' = -\,1\ 26\ 32.61$$
$$a' = 0.004302, \quad a'' = 0.008884$$
$$\log k' = 8.476085, \quad \log k'' = 8.475046$$
$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298570$$
$$\log\mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401053\,n$$

c) $\alpha = 0^0 16'$, $\psi = 90^0$, $\beta = 0$

1[ste] Brechung.

θ, χ, λ wie unter 7. c), $\mu = + 2^0 40' 40'' 53$

2[te] Brechung.

q und r wie unter 7. c), $\beta' + r = 169^0 27' 31'' 5$

$$\log \operatorname{tg} \omega' = 9.269727\, n, \qquad \lambda' = - 5^0 21' \; 5'' 29$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha' = 8.404629, \qquad \mu' = - 4 \; 57 \; 41.29$$
$$\log \operatorname{tg} \chi' = 8.942093\, n \qquad \beta' = 83 \;\; 9 \; 32.6$$

3[te] Brechung.

$$q' = - 1^0 26' 55'' 60, \quad \log \operatorname{tg} \omega'' = 9.078178\, n, \quad \lambda'' = + 1^0 \; 0' 15'' 02$$
$$r' = - 5 \;\; 0 \;\; 0.04, \quad \log \operatorname{tg} \alpha'' = 8.269822, \quad \mu'' = + 1 \; 40 \;\; 2.36$$
$$\beta'' - \beta' + r' = - 6 \; 49 \; 33.5, \quad \log \operatorname{tg} \chi'' = 7.977282, \quad \beta'' = 81 \; 19 \; 59.1$$

Schlussrechnung.

$$H = + 1^0 \; 3' 59'' 01, \qquad \log \eta = 9.999980$$
$$\beta''' = 81^0 \; 7' 28'' 1, \qquad \log \sin \alpha''' = 8.479746$$
$$\Phi = + 4^0 55' 35'' 28, \qquad \log \sin \varphi = 8.012033\, n$$
$$\log \operatorname{tg} (\psi' - \beta'') = 9.183906, \qquad \log \sin \theta' = 8.833134\, n$$
$$\log k' = 8.475943, \qquad a' = 0.004301$$
$$\theta'' = 0^0 3' 43'', \qquad a'' = 0.008884$$
$$\psi'' = 90^0 2' 28'' 9, \qquad \log k'' = 8.474717$$

Die Gleichungen des ausfahrenden Lichtstrahls werden:

$$y = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' \cos \beta''' - 0.0000215$$
$$z = (0.008884 - x) \operatorname{tg} \alpha''' \sin \beta''' + 0.0298344$$

wo

$$\log \operatorname{tg} \alpha''' \cos \beta''' = 7.668257$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha''' \sin \beta''' = 8.474692$$

sind.

40.

Gehen wir zur Berechnung der Abweichungen über, die aus den vorhergehenden strengen Berechnungen folgen, und wenden wir uns zuerst zu den Lichtstrahlen, die mit der optischen Achse parallel

einfallen. Der Art. 36 zeigt, dass in Bezug auf die Centralstrahlen die Vereinigungsweite der rothen und der violetten Lichtstrahlen genau die nemliche ist, indem bei beiden Gattungen von Lichtstrahlen, für die Entfernung des Durchschnittspunkts derselben mit der optischen Achse von der letzten brechenden Oberfläche, der Werth

$$\xi''' - q'' = 0.999970$$

gefunden wurde. Genau genommen müsste diese Zahl $= 1$ gefunden werden, da bei der Berechnung des Objectivs π''' der Einheit gleich gesetzt worden ist. Die kleine Abweichung, die sich davon gezeigt hat, rührt von der besonderen Beschaffenheit der quadratischen Gleichung

$$0 = ag^2 + 2bg + c$$

im gegenwärtigen Falle her, in welchem die Function

$$\frac{b}{a} - \sqrt{\frac{c}{a}}$$

eine kleine Grösse ist, und daher die Wurzeln derselben, wenn man nicht zur Berechnung der Coefficienten Logarithmen mit einer grösseren Anzahl von Decimalen anwendet, mit etwas geringerer Genauigkeit erhalten werden, als die übrigen Zahlenwerthe. Es können daher sehr wohl die erhaltenen Zahlenwerthe von R, R', R'' in der letzten Stelle einige Ungenauigkeit besitzen; doch ist diese bei allen dreien von der nemlichen Grösse, da die Unterschiede derselben bis auf die letzte Stelle genau sich ergeben. Nun zeigt sich aber durch Entwickelung der Differentialquotienten, dass eine kleine gleiche Vergrösserung aller R, R', R'' zwar die Brennweite ein wenig ändert, aber die Grösse der Abweichungen, die die verschiedenen Lichtstrahlen in Bezug auf den genauen Brennpunkt zeigen, durchaus unmerklich beeinflusst, wenn dieselben, wie hier der Fall, überhaupt sehr klein sind. Ich durfte daher die obige Abweichung von 0.000030 stehen lassen, obgleich es ein Leichtes gewesen wäre, sie fortzuschaffen.

41.

Für die mit der optischen Achse parallel einfallenden Randstrahlen giebt der Art. 36 die Gleichungen nach der letzten Brechung:

rothe Strahlen:

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298344$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.474802$$

violette Strahlen:

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' + 0.0298344$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.474681$$

Suchen wir zuerst die Durchschnittspunkte mit der optischen Achse, so finden wir bez.

$$\xi''' - q'' = 0.999821$$
$$= 1.000100$$

und die Unterschiede dieser Werthe von der im vor. Art. erhaltenen Vereinigungsweite der Centralstrahlen sind bez.

$$-\ 0.000149$$
$$+\ 0.000130$$

Es verdient angemerkt zu werden, dass die rothen Lichtstrahlen, die einem kleineren Brechungsverhältniss entsprechen, und folglich an sich eine grössere Brennweite haben, hier eine kleinere, sowie die violetten Lichtstrahlen, die ihrer grösseren Brechung wegen, an sich einer kleineren Brennweite entsprechen, hier eine grössere Brennweite bekommen haben.

Da die eben erhaltenen Abweichungen Maxima sind, so folgt aus denselben, dass die grosse Achse des körperlichen Raumes, in welchem sich alle Bilder eines in der optischen Achse liegenden, unendlich weit entfernten Gegenstandes befinden,

$$0.000279$$

lang ist. Für ein Objectiv von 1000 Par. Linien Brennweite, welche nahe der des Objectivs des Königsberger Heliometers gleichkommt, wird also in unserem Falle die Länge dieser grossen Achse

0.279 Par. Linien

betragen; eine für das Auge unmerkliche Grösse, weil sie in der Gesichtslinie liegt, und überdem von den Bildern, welche die Centralstrahlen verursachen, sehr nahe in zwei gleiche Hälften getheilt wird.

Grösseren Eindruck auf das Auge verursachen die Abweichungen, die in der auf die optische Achse senkrecht stehenden und durch den Brennpunkt gehenden Ebene liegen, und als Seitenabweichungen zu bezeichnen sind. Sie bilden im gegenwärtigen Falle eine Kreisfläche,

deren Durchmesser bis auf Unmerkliches ein Maximum ist, und durch das Produkt der obigen grossen Achse mit $\operatorname{tg}\alpha'''$ erhalten wird. Es ergiebt sich für unser Objectiv dieser Durchmesser

$$= 0.0000083$$

oder für ein Objectiv von 1000 Par. Linien Brennweite,

$$= 0.0083 \text{ Par. Linien}$$

welche Grösse für ganz unerkennbar zu erachten ist.

42.

Die Resultate, welche wir für die unter einem Winkel von 16′ mit der optischen Achse einfallenden Lichtstrahlen erhalten haben, bestehen in Folgendem:

Centralstrahlen beider Farben.

Coordinaten des Bildes.

$$\xi''' - q'' = 0.999970, \qquad \eta''' = -0.0046850$$

Rothe Randstrahlen.

Gleichungen der ausfahrenden Strahlen.

Für $\psi = 0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298114$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.537749$$

Für $\psi = 180^0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' - 0.0298575$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8{,}401157\,n$$

Für $\psi = 90^0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha'''\cos\beta''' - 0.0000221$$
$$z = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha'''\sin\beta''' + 0.0298343$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha'''\cos\beta''' = 7.668276$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha'''\sin\beta''' = 8.474804$$

Violette Randstrahlen.

Für $\psi = 0$

$$y = (0.008884 - x)\operatorname{tg}\alpha''' + 0.0298119$$
$$z = 0$$
$$\log\operatorname{tg}\alpha''' = 8.537644$$

Für $\psi = 180^0$

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' - 0.0298570$$
$$z = 0$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' = 8.401053\,n$$

Für $\psi = 90^0$

$$y = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' \cos\beta''' - 0.0000215$$
$$z = (0.008884 - x)\,\mathrm{tg}\,\alpha''' \sin\beta''' + 0.0298344$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' \cos\beta''' = 7.668257$$
$$\log \mathrm{tg}\,\alpha''' \sin\beta''' = 8.474692$$

Für $\psi = 270^0$ bekommt man dieselben Gleichungen, wie für $\psi = 90^0$, mit der einzigen Ausnahme, dass $-z$ statt z geschrieben werden muss.

Suchen wir nun den Durchschnittspunkt der violetten Strahlen für $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$, so finden wir die Coordinaten des in demselben entstehenden Bildes:

$$\xi''' - q'' = 1{,}000065, \qquad \eta''' = -0.0046759$$

und die Unterschiede mit denen der Centralstrahlen

$$+0.000095 \quad \text{und} \quad +0.0000091$$

Desgleichen für die rothen Strahlen, nebst $\psi = 0$ und $\psi = 180^0$,

$$\xi''' - q'' = 0.999830, \qquad \eta''' = -0.0046766$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000140 \quad \text{und} \quad +0.0000084$$

Desgleichen für die Verbindung

der violetten Strahlen und $\psi = 0$

mit den rothen - - $\psi = 180^0$

$$\xi''' - q'' = 0.999974, \qquad \eta''' = -0.0046728$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$+0.000004 \quad \text{und} \quad +0.0000122$$

Desgleichen für die rothen Strahlen und $\psi = 0$

mit den violetten - - $\psi = 180^0$

$$\xi''' - q'' = 0.999832, \qquad \eta''' = -0.0046767$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000138 \quad \text{und} \quad +0.0000083$$

Alle diese Bilder sind extreme und liegen, gleich allen übrigen derselben Gattung, in der xy-Ebene. Wie man sieht, beträgt die grösste Seitenabweichung

$$0.0000122$$

Verbinden wir ausserdem die rothen Lichtstrahlen für $\psi = 90^0$ und $\psi = 270^0$ miteinander, so muss selbstverständlich das Bild auch in der xy-Ebene liegen; es ergeben sich die Coordinaten desselben

$$\xi''' - q'' = 0.999811, \quad \eta''' = -0.0046800, \quad \zeta''' = 0$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$-0.000159 \quad \text{und} \quad +0.0000050$$

Desgleichen geben die violetten Strahlen

$$\xi''' - q'' = 1.000074, \quad \eta''' = -0.0046804, \quad \zeta''' = 0$$

Unterschiede mit den Centralstrahlen:

$$+0.000104 \quad \text{und} \quad +0.0000046$$

Die Seitenabweichungen liegen hier innerhalb der vorher gefundenen.

Verbindet man endlich die rothen Strahlen für $\psi = 90^0$ mit den violetten für $\psi = 270^0$, sowie jene für $\psi = 270^0$ mit diesen für $\psi = 90^0$, so wird man finden, dass diese Linien einander zwar nicht schneiden, aber in so geringer Entfernung an einander vorüber gehen, dass im Minimum der Entfernung derselben von einander ein Bildpunkt angenommen werden darf. Man erkennt ohne Weiteres, dass die zwei Bilder, welche beide Minima geben, in gleichen Abständen, aber auf entgegesetzten Seiten der xy-Ebene liegen müssen. Sucht man diese Minima, so ergiebt sich, dass denselben bis auf Unmerkliches dieselbe Abscisse zukommt, und zwar wird

$$y - q'' = 0,999942$$

sie liegen also sehr nahe in der Ebene des Brennpunkts. Ihre Ordinaten fand ich

$$y = -0.0046806, \quad z = \mp 0.0000038$$
$$y = -0.0046799, \quad z = \mp 0.0000039$$

wo sowohl die oberen wie die unteren Zeichen zu einander gehören. Das Minimum der Entfernung folgt hieraus

$$= 0.0000007$$

welches für Nichts zu achten ist. Auch diese Seitenabweichungen in der Richtung der y liegen innerhalb der oben erhaltenen, und kommen daher hier nicht in Betracht; die Seitenabweichungen in der Richtung der z sind Maxima, und alle von den übrigen Lichtstrahlen verursachten ähnlichen sind kleiner.

Projicirt man nun die grössten aller erhaltenen Seitenabweichungen auf die Ebene der yz, so wird man eine Fläche erhalten, die von der Ebene der xy in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird, deren grosse, in der Richtung der y liegende Achse

$$= 0.0000122$$

und deren kleine, in der Richtung der z liegende Achse

$$= 0.0000077$$

ist. Beide Achsen schneiden einander, jedoch theilt der Durchschnittspunkt die grosse Achse nicht in zwei gleiche Theile; die krumme Linie, welche die Fläche begrenzt, wird daher eine eiförmige sein. Diese Fläche wird sich dem Auge als die Bildfläche aller von dem betrachteten Punkte auf das Objectiv einfallenden Lichtstrahlen darstellen.

Uebertragen wir die eben erhaltenen Achsen der Bildfläche auf das Objectiv von 1000 Linien Brennweite, so ergeben sich die Werthe derselben

$$= 0.012 \text{ und } 0.008 \text{ Linie}$$

Diess sind die grössten Abweichungen, die das hier berechnete Objectiv zeigt, und so klein, dass wenigstens mir kein Objectiv vorgekommen ist, welches nicht grössere Abweichungen besässe. So sind z. B. die Abweichungen, welche das von mir in der früheren Abhandlung untersuchte Objectiv des Königsberger Heliometers zeigt, bedeutend grösser.

Es ist hiebei noch zu bemerken, dass hier die Berechnung des Objectivs durch genäherte, sehr einfache Formeln ausgeführt worden ist, und eine sehr kurze Zeit in Anspruch genommen hat. Demungeachtet ist das Resultat so genau ausgefallen, dass die Anwendung der strengen Formeln zur Ausgleichung der Unterschiede, welche die früheren genäherten Formeln geben, gänzlich überflüssig wird. Mag man auch durch Anwendung der strengen Formeln die sich auf ein Objectiv von 1000 Linien Brennweite beziehende grösste Abweichung von 0.012 Linie ein Weniges verkleinern können, so kann diess doch nur auf Kosten des in der optischen Achse liegenden Bildes geschehen, dessen Abweichungen durch eine solche Ausgleichung sich vergrössern würden.

43.

Nicht blos zu Fernrohrobjectiven, sondern auch zu Objectiven für Mikroskope, und mit gewissen Zusätzen für Oculare, sind die hier entwickelten Ausdrücke brauchbar, da in denselben sowohl die erste, wie die letzte Vereinigungsweite der Lichtstrahlen unbestimmt gelassen worden ist. Um zu zeigen, dass die Halbmesser der Oberflächen der Linsen unter verschiedenen Umständen sehr verschiedene Werthe annehmen können, soll hier noch ein Mikroskopobjectiv berechnet, jedoch zur Abkürzung nur die erste Annäherung, und zwar blos mit Logarithmen von vier Decimalen, durchgeführt werden.

Je nach dem Zwecke, zu welchem das Mikroskop dienen soll, wird das Verhältniss der Entfernung des Gegenstandes zu der des Bildes verschieden angenommen; um aber eine bestimmte Grundlage zu erhalten, muss dieses Verhältniss im Voraus festgesetzt werden. Hier werden wir annehmen, dass sich die Entfernung des Gegenstandes von der ersten Oberfläche des Objectivs zu der des Bildes von der letzten Oberfläche desselben verhalten soll wie 2 : 5, welche Annahme als ein Mittel aus den verschiedenen in der Praxis vorkommenden betrachtet werden kann.

44.

In Folge des eben bestimmten Verhältnisses können wir setzen

$$\pi = -1, \qquad \pi''' = +0.4$$

Die Glasarten, aus denen die beiden Linsen dieses Objectivs bestehen, sollen dieselben sein, welche dem obigen Beispiel zu Grunde gelegt wurden, und deren Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse im Art. 27 angeführt sind. Die Berechnung soll in zwei verschiedenen Annahmen über die Lage der Linsen ausgeführt werden: nemlich zuerst wird angenommen, dass die Kronglaslinse, und darauf, dass die Flintglaslinse die erste sei. Ein ziemlicher Theil der oben ausgeführten numerischen Rechnungen kann hier wieder angewandt werden.

Wenn die Kronglaslinse vorangestellt wird, so findet man

$$\Delta = +3.279, \qquad \Delta' = -1.619$$

Die Endgleichung wird

$$0 = g^2 + 2\,(0.9201)\,g + (1.8322)$$

deren Wurzeln

$$g = -\,9.442, \qquad = -\,7.197$$

sind, woraus die bei beiden folgenden Objective hervorgehen:

$$\begin{aligned} R &= -\,0.416, & &= +\,1.829 \\ R' &= -\,6.974, & &= -\,4.728 \\ R'' &= -\,3.735, & &= -\,1.490 \end{aligned}$$

Wie man sieht, sind diese Halbmesser bedeutend von den oben erhaltenen des Fernrohrobjectivs verschieden. Im ersten Objectiv sind beide Linsen Menisken, die ihre concave Seite dem Gegenstand zukehren, während im zweiten Objectiv die Kronglaslinse convex-convex und die Flintglaslinse ein Meniskus ist, beide äussere Oberflächen sind hier convex.

45.

Wenn die Flintglaslinse vorangestellt wird, so ergeben sich

$$\Delta = -\,1.619, \quad \Delta' = +\,3.279$$

Die Endgleichung wird

$$0 = g^2 - 2\,(0.9070)\,g + (1.8046)$$

deren Wurzeln

$$g = +\,9.256, \qquad = +\,6.890$$

sind, woraus die beiden Objective

$$\begin{aligned} R &= +\,2.951, & &= +\,0.583 \\ R' &= +\,6.188, & &= +\,3.821 \\ R'' &= -\,0.570, & &= -\,2.736 \end{aligned}$$

folgen, die wieder von allen vorhergehenden wesentlich verschieden sind. In beiden ist die Flintglaslinse ein Meniskus, und die Kronglaslinse convex-convex, alle äusseren Oberflächen sind convex. Man kann in beiden Fällen mit den vorstehenden Grundlagen die zweite, und wo nöthig die dritte Annäherung ausführen, worauf wir jedoch, wie schon oben erwähnt, hier nicht eingehen werden.

---

§ 3. Von den Linsensystemen mit vier Brechungen.

46.

Dem im vorigen Abschnitte untersuchten Linsensysteme schliesst sich zunächst dasjenige von vier Brechungen an. Ein solches Linsensystem lässt sich in der Anwendung auf zwei wesentlich verschiedene Arten ausführen. Man kann es erstens aus zwei von einander abgesonderten Linsen zusammensetzen, deren vier Oberflächen Halbmesser von verschiedener Grösse und Lage haben; man kann es aber zweitens auch durch Zuziehung von drei Linsen bilden, bei denen der zweite Halbmesser der ersten und der erste der zweiten Linse, sowie der zweite Halbmesser der letzteren und der erste der dritten Linse, einander gleich und von gleicher Lage sind. Man bringt diese Linsen so nahe an einander, dass die beiden Zwischenräume für Null erachtet werden können.

Zur ersten Gattung dieser beiden Linsensysteme gehören die seit lange im Gebrauch befindlichen achromatischen Fernrohrobjective, die von verschiedenen Künstlern verschieden construirt worden sind. Gauss hat schon vor vielen Jahren gezeigt, dass man in einem solchen Objectiv zwei Lichtstrahlen von verschiedenen Brechungsverhältnissen, sowohl in Bezug auf die Centralstrahlen, wie in Bezug auf die Randstrahlen, vollständig mit einander vereinigen kann, eine Aufgabe, deren Lösung vorher für unmöglich gehalten worden war. Seine Construction ist indessen nicht zur allgemeinen Anwendung gelangt, was vielleicht dem Umstande zuzuschreiben ist, dass sie auf Linsenoberflächen von sehr grossen Krümmungen führt. Auch ist es in der That nicht unumgänglich nothwendig, die Randstrahlen zweier verschiedenen Farben strenge mit einander zu vereinigen, da, wie man im vor. Abschnitte gesehen hat, sich ohnehin Objective, die sehr kleine Abweichungen zeigen, herstellen lassen: Objective, deren Linsen weit geringere Krümmungen haben, als jene.

Es soll hier diese Gattung von Linsensystemen nicht weiter untersucht, dagegen die oben genannte zweite Gattung von Linsen-

systemen von vier Brechungen vorgenommen werden. Zunächst werden wir untersuchen, ob in diesen sich auch zwei Lichtstrahlen von verschiedenen Brechungsverhältnissen, sowohl für die Centralstrahlen wie für die Randstrahlen, mit einander vereinigen lassen. Die Möglichkeit dazu kann im Voraus nicht in Abrede gestellt werden, da die Aufgabe auf vier Gleichungen führt, und die vier Halbmesser der Linsenoberflächen eben so viele Unbekannte darbieten. Es handelt sich blos darum, ob die Gleichung des vierten Grades, auf die man schliesslich hingeführt wird, bei den Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen, welche die bekannten Glasarten besitzen, reelle Wurzeln hat oder nicht.

47.

Nehmen wir an, dass die erste und die dritte Linse aus derselben, die zweite hingegen aus einer anderen Glasart bestehe, und wenden, wo nicht ausdrücklich eine Abweichung angegeben wird, dieselben Bezeichnungen an, wie im Vorhergehenden, so erhalten wir für den einen Lichtstrahl die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
n &= 1 \\
n' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\
n'' &= N', \text{ oder } = M', \text{ oder } = m' \\
n''' &= N, \text{ oder } = M, \text{ oder } = m \\
n^{IV} &= 1 \\
N\pi' &= \pi + (N-1)R \\
N'\pi'' &= N\pi_, + (N'-N)R' \\
N\pi''' &= N'\pi_{,,} - (N'-N)R'' \\
\pi^{IV} &= N\pi_{,,,} - (N-1)R''' \\
\pi_, &= \pi' + \pi'^2 d \\
\pi_{,,} &= \pi'' + \pi''^2 d' \\
\pi_{,,,} &= \pi''' + \pi'''^2 d''
\end{aligned}$$

Für den zweiten Lichtstrahl ergeben sich ähnliche Gleichungen, in denen M statt N, und M' statt N' zu setzen sind.

48.

Die eben aufgestellten Gleichungen geben leicht, nachdem man

$$R - R''' = 2\Delta$$
$$R' - R'' = 2\Delta'$$

gesetzt hat,

$$\pi^{IV} - \pi = 2(N-1)(\Delta - \Delta') + 2(N'-1)\Delta' + A'$$

und wenn die angedeutete Veränderung vorgenommen wird,

$$\pi^{IV} - \pi = 2(M-1)(\Delta - \Delta') + 2(M'-1)\Delta' + B'$$

wo

$$A' = N\pi'^2 d + N'\pi''^2 d' + N\pi'''^2 d''$$
$$B' = M\pi'^2 d + M'\pi''^2 d' + M\pi'''^2 d''$$

sind. Vergleicht man diese Gleichungen mit den (a) und (a*) des Art. 21, so findet man, dass sie mit den letzteren bis auf die kleinen Unterschiede, dass hier $\Delta - \Delta'$ statt Δ vorkommt, und A' und B' jede Ein Glied mehr haben als A und B, identisch sind. Die dort gegebene Auflösung kann also auch hier, mit Berücksichtigung dieser kleinen Unterschiede, angewandt werden.

Setzt man nemlich

$$l = \tfrac{1}{2}(B' + A'), \quad l' = \tfrac{1}{2}(B' - A')$$
$$z = \frac{M-N}{m-1}, \quad z' = \frac{M'-N'}{m'-1}$$

so werden

$$\Delta = \Delta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{IV} - \pi)\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} - \tfrac{1}{2}l\frac{z'}{(z'-z)(m-1)} + \frac{l'}{(z'-z)(m-1)}$$

$$\Delta' = -\tfrac{1}{2}(\pi^{IV} - \pi)\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} + \tfrac{1}{2}l\frac{z}{(z'-z)(m'-1)} - \frac{l'}{(z'-z)(m'-1)}$$

49.

Die zwei anderen, hier zu erfüllenden Gleichungen haben beide ursprünglich die Form

$$0 = L + L' + L'' + L''' + 2\pi' d L + 2\pi'' d'(L + L') - 2\pi''' d'' L'''$$

und unterscheiden sich von einander nur dadurch, dass in der einen N und N', in der anderen M und M' zu substituiren sind; wir brauchen aus diesem Grunde nur die Eine derselben zu entwickeln, und werden dazu die von N und N' abhängende wählen.

50.

Die Ausdrücke der verschiedenen L, welche wir bei der folgenden Entwickelung benutzen werden, finden sich unter (5) und (6) des Art. 8, und zwar soll für L und L'' der Ausdruck (5), sowie für L' und L''' der Ausdruck (6) den Entwickelungen zu Grunde gelegt werden. Wir bekommen demzufolge

$$L = \frac{N-1}{N^2}\{(R-\pi)^3 - N\pi(R-\pi)^2\}$$
$$L' = \frac{N'(N'-N)}{N^2}\{N'(R'-\pi'')^3 - N\pi''(R'-\pi'')^2\}$$
$$L'' = -\frac{N'(N'-N)}{N^2}\{N'(R''-\pi_{\prime\prime})^3 - N\pi_{\prime\prime}(R''-\pi_{\prime\prime})^2\}$$
$$L''' = -\frac{N-1}{N^2}\{(R'''-\pi^{\text{IV}})^3 - N\pi^{\text{IV}}(R'''-\pi^{\text{IV}})^2\}$$

Die Reduction der Summe $L + L'''$ ist leicht zu bewirken. Setzt man

$$2s = (R-\pi) + (R'''-\pi^{\text{IV}})$$
$$2D = (R-\pi) - (R'''-\pi^{\text{IV}})$$
$$= 2\Delta + (\pi^{\text{IV}} - \pi)$$

woraus

$$R - \pi = s + D$$
$$R''' - \pi^{\text{IV}} = s - D$$

folgen, so bekommt man ohne Mühe aus den vorstehenden Ausdrücken:

$$L + L''' = \frac{N-1}{N^2}\{(6D + N(\pi^{\text{IV}}-\pi))s^2 - 2N(\pi^{\text{IV}}+\pi)Ds + 2D^3 + N(\pi^{\text{IV}}-\pi)D^2\}$$

wo s die einzige Unbekannte ist.

Die Summe $L' + L''$ lässt sich auf gleiche Weise behandeln. Setzt man hier

$$2g' = (R'-\pi'') + (R''-\pi_{\prime\prime})$$
$$2D' = (R'-\pi_{\prime\prime}) - (R''-\pi_{\prime\prime})$$
$$= 2\Delta' + (\pi_{\prime\prime} - \pi'')$$
$$= 2\Delta' + \pi''^2 d'$$

woraus

$$R' - \pi'' = g' + D'$$
$$R'' - \pi_{\prime\prime} = g' - D'$$

folgen, so erhält man eben so wie oben:

$$L' + L'' = \frac{N'(N'-N)}{N^2}\{(6N'D' + N(\pi_{\prime\prime} - \pi''))g'^2 - 2N(\pi_{\prime\prime} + \pi'')D'g' +$$
$$+ 2N'D'^3 + N(\pi_{\prime\prime} - \pi'')D'^2\}$$

in welchem Ausdruck aber ausser g' noch die Unbekannte $(\pi_{\prime\prime} + \pi'')$ vorkommt, und daher eine weitere Reduction erforderlich ist.

54.

Die Gleichungen des Art. 47 geben

$$N'\pi'' = \pi + (N-1)R + (N'-N)R' + N\pi'^2 d$$
$$N'\pi_{\prime\prime} = \pi^{\text{IV}} + (N-1)R''' + (N'-N)R'' - N\pi'''^2 d''$$

folglich wird

$$N'(\pi_{,,}+\pi'') = \pi^{\text{IV}}+\pi + (N-1)(R+R''') + (N'-N)(R'+R'') + N\pi'^2 d - N\pi'''^2 d''$$

Führen wir jetzt die Substitution

$$2s' = (R'-\pi''') + (R''-\pi^{\text{IV}})$$

ein, und benutzen ausserdem die schon oben angewandte Substitution

$$2s = (R-\pi) + (R'''-\pi^{\text{IV}})$$

so verwandelt man die vorstehende Gleichung leicht in

$$\pi_{,,}+\pi'' = (\pi^{\text{IV}}+\pi) + 2\frac{N-1}{N'}s + 2\frac{N'-N}{N'}s' + \frac{N}{N'}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

Die Gleichung des vor. Art., durch welche g' eingeführt wurde, giebt aber

$$2g' = 2s' + (\pi^{\text{IV}}+\pi) - (\pi_{,,}+\pi'')$$

und in Verbindung mit der vorhergehenden:

$$g' = -\frac{N-1}{N'}s + \frac{N}{N'}s' - \frac{N}{2N'}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

Aus dieser Gleichung erhält man

$$g'^2 = \frac{N^2}{N'^2}s'^2 - 2\frac{N(N-1)}{N'^2}s's + \frac{(N-1)^2}{N'^2}s^2 - \frac{N}{N'^2}(Ns'-(N-1)s)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')$$

$$\begin{aligned}(\pi_{,,}+\pi'')g' = {} & 2\frac{N(N'-N)}{N'^2}s'^2 - 2\frac{(N-1)(N'-2N)}{N'^2}s's - 2\frac{(N-1)^2}{N'^2}s^2 \\ & + \frac{N}{N'}(\pi^{\text{IV}}+\pi)s' - \frac{N-1}{N'}(\pi^{\text{IV}}+\pi)s \\ & - \frac{N}{N'^2}\left((N'-2N)s' + 2(N-1)s + \tfrac{1}{2}N'(\pi^{\text{IV}}+\pi)\right)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\end{aligned}$$

womit der zu Ende des vor. Art. erhaltene Ausdruck von $L' + L''$ übergeht in:

$$\begin{aligned}L'+L'' = 2\frac{N'-N}{N^2N'}\Big\{ & \left\{N^2(N'+2N)D'+\tfrac{N^3}{2}\pi''^2 d'\right\}s'^2 \\ & -\left\{4N(N-1)(N'+N)D'+N^2(N-1)\pi''^2 d'\right\}s's \\ & +\left\{(N-1)^2(3N'+2N)D'+\tfrac{N}{2}(N-1)^2\pi''^2 d'\right\}s^2 \\ & -\left\{N^2N'D'(\pi^{\text{IV}}+\pi)+2N^2(N'+N)D'(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}s' \\ & +\left\{NN'(N-1)D'(\pi^{\text{IV}}+\pi)+N(N-1)(3N'+2N)D'(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}s \\ & +\left\{N'^3D'^3+\tfrac{1}{2}NN'^2D'^2\pi''^2 d'+\tfrac{1}{2}N^2N'D'(\pi^{\text{IV}}+\pi)(\pi'^2 d-\pi'''^2 d'')\right\}\Big\}\end{aligned}$$

52.

Hiemit ist die Gleichung des Art. 49 so weit entwickelt, als erforderlich ist; führt man die Substitutionen aus, und setzt

$$a = \frac{N^2}{N'}(N'+2N)(N'-N)D' + \frac{N^3}{2N'}(N'-N)\pi''^2 d'$$

$$b = 4\frac{N}{N'}(N-1)(N'+N)(N'-N)D' + \frac{N^2}{N'}(N-1)(N'-N)\pi''^2 d'$$

$$c = \frac{(N-1)^2}{N'}(3N'+2N)(N'-N)D' + 3(N-1)D$$
$$+ \frac{N}{2}(N-1)(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi) + \frac{N}{2N'}(N-1)^2(N'-N)\pi''^2 d'$$

$$e = N^2(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + 2\frac{N^2}{N'}(N'+N)(N'-N)D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$f = N(N-1)(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) - N(N-1)D(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$
$$+ \frac{N}{N'}(N-1)(3N'+2N)(N'-N)D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$g = N'^2(N'-N)D'^3 + (N-1)D^3 + \frac{N}{2}(N-1)D^2(\pi^{\mathrm{IV}}-\pi) + C$$

wo zur Abkürzung

$$C = \frac{NN'}{2}(N'-N)D'^2\pi''^2 d' + \frac{N^2}{2}(N'-N)D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$
$$+ N^2\pi' L d + N^2\pi''(L+L')d' - N^2\pi''' L'' d''$$

geschrieben worden ist, dann wird die eine Endgleichung

$$0 = as'^2 - bs's + cs^2 - es' + fs + g$$

Hier dürfen s und s' als die einzigen Unbekannten betrachtet werden, da die Glieder, welche mit d, d', d'' multiplicirt sind, auf die nemliche Art berücksichtigt werden können, wie im vor. Abschnitte gezeigt worden ist. Die zweite Endgleichung bekommt man dadurch, dass man in den vorstehenden Ausdrücken allenthalben M statt N, und M' statt N' schreibt. Bezeichnet man die durch diese Verwandlung entstehenden Coefficienten mit den gleichen, aber mit einem Striche versehenen Buchstaben, so dass

$$a' = \frac{M^2}{M'}(M'+2M)(M'-M)D' + \frac{M^3}{2M'}(M'-M)\pi''^2 d'$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

werden, so entsteht die folgende zweite Endgleichung

$$0 = a's'^2 - b's's + c's^2 - e's' + f's + g'$$

Hat man aus diesen beiden Endgleichungen s und s' bestimmt, welche Bestimmung auf die Auflösung einer Gleichung des vierten Grades führt, so ergeben sich

$$R = s + D + \pi$$
$$R''' = s - D + \pi^{\mathrm{IV}}$$
$$R' = s' + \Delta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$
$$R'' = s' - \Delta' + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

53.

Die Frage, ob das im Vorhergehenden entwickelte Linsensystem einer Anwendung fähig ist oder nicht, wird am einfachsten durch die Berechnung eines Beispiels entschieden, und es soll daher mit Anwendung der im vor. Abschnitt angewandten Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse ein Fernrohrobjectiv nach den eben entwickelten Formeln berechnet werden. Zuerst soll angenommen werden, dass die beiden äusseren Linsen von Flintglas und die mittlere von Kronglas sei. Zufolge des Art. 27 sind daher unsere Daten

$$N = 1.61800$$
$$N' = 1.51870$$
$$M = 1.66024$$
$$M' = 1.53956$$

und ausserdem sind $\pi = 0$, $\pi^{\text{IV}} = 1$. Die Werthe von Δ und Δ' brauchen hier nicht von Neuem berechnet zu werden, da man leicht einsehen wird, dass sie unmittelbar aus dem Art. 27 entnommen werden können. Für die erste Annäherung werden hier

$$\Delta - \Delta' = -1.1564, \qquad \Delta' = +2.3417$$

und folglich

$$\Delta = +1.1853$$
$$D = +1.6853, \qquad D' = +2.3417$$

Die obigen Daten liefern ferner

$$N' - N = -0.09930, \qquad M' - M = -0.12068$$
$$N' + N = +3.1367, \qquad M' + M = +3.1998$$
$$N' + 2N = 4.7547, \qquad M' + 2M = 4.8600$$
$$3N' + 2N = 7.7921, \qquad 3M' + 2M = 7.9391$$

und hieraus ergeben sich durch eine kurze Rechnung die beiden Endgleichungen, die, nachdem mit den Coefficienten von s'^2 dividirt worden ist, die folgenden sind:

$$0 = s'^2 - 1.0076\,s's - 1.6616\,s^2 - 0.3193\,s' + 1.0059\,s - 0.7554$$
$$0 = s'^2 - 1.0474\,s's - 1.3223\,s^2 - 0.3168\,s' + 0.8775\,s - 0.4257$$

Aus dem Unterschiede dieser beiden Gleichungen erhält man

$$s' = \frac{8.524\,s^2 - 3.225\,s + 8.282}{s - 0.0628}$$

womit s' vollständig aus einer derselben eliminirt werden muss. Man gelangt dadurch zu einer Gleichung des vierten Grades in s,

welche zur Bestimmung dieser Unbekannten dient. Hat man hiemit die Werthe von s erhalten, so giebt die vorstehende Gleichung des ersten Grades in s' zu jedem Werthe von s den entsprechenden Werth von s'. Es ist aber im gegenwärtigen Falle überflüssig die genannte Elimination auszuführen, da der Ueberblick schon lehrt, dass alle vier Wurzeln der genannten biquadratischen Gleichung imaginär werden. Es lässt sich also, wenigstens mit den der obigen Rechnung zu Grunde gelegten Daten, kein Objectiv von der angenommenen Form construiren, welches sowohl die Rand- wie die Centralstrahlen zweier verschiedenen Farben mit einander vereinigt. Man darf auch nicht hoffen, diese Vereinigungen durch Anwendung anderer Glasarten zu Wege bringen zu können, da die dem Beispiel zu Grunde gelegten zu denjenigen gehören, welche in ihren Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen die grössten Verschiedenheiten von einander darbieten, die man kennt, und die Anwendung von Glasarten mit geringeren Verschiedenheiten auf Endgleichungen hinführen muss, deren Coefficienten noch geringere Verschiedenheiten von einander darbieten, als die obigen.

54.

Obgleich sich voraussehen lässt, dass die Verwechselung der beiden Glasarten mit einander ein ähnliches Resultat herbeiführen wird, als das eben erhaltene, so will ich doch nicht unterlassen, die betreffenden Zahlenwerthe hier anzusetzen. Es wird also jetzt angenommen, dass die beiden äusseren Linsen aus Kronglas und die mittlere aus Flintglas bestehen, wodurch mit Beibehaltung derselben Glasarten wie oben sich die folgenden Daten ergeben:

$$N = 1.51870$$
$$N' = 1.61800$$
$$M = 1.53956$$
$$M' = 1.66024$$

Da wir nun

$$\varDelta - \varDelta' = +\ 2.3417, \quad \varDelta' = -\ 1.1564$$

bekommen müssen, so werden

$$D = +\ 1.6853, \quad D' = -\ 1.1564$$

und da aus den jetzigen Daten

$$N'-N = +0.09930, \quad M'-M = +0.12068$$
$$N'+N = 3.1367, \quad M'+M = 3.1998$$
$$N'+2N = 4.6554, \quad M'+2M = 4.7394$$
$$3N'+2N = 7.8914, \quad 3M'+2M = 8.0599$$

folgen, so erhalten wir die beiden Endgleichungen:

$$0 = s'^2 - 0.92050 s's - 3.76059 s^2 - 0.34755 s' + 1.86087 s - 4.19871$$
$$0 = s'^2 - 0.94639 s's - 3.11985 s^2 - 0.35030 s' + 1.60533 s - 3.43965$$

nebst

$$s' = \frac{24.75 s^2 - 9.87 s + 29.32}{s + 0.1062}$$

*) Der Ueberblick zeigt auch hier sogleich, dass man auf lauter imaginäre Werthe der Unbekannten s und s' kommen muss, folglich das Objectiv wieder unmöglich wird.

55.

Obgleich, wie man im Vorhergehenden gesehen hat, ein Objectiv von der in Rede stehenden Form, in welchem die Central- und die Randstrahlen von zwei verschiedenen Farben mit einander vereinigt werden, nicht hergestellt werden kann, so lässt sich doch ein solches Objectiv, in welchem die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt werden, ausführen. Diess soll jetzt gezeigt werden. Da wir unter der letztgenannten Bedingung nur drei Gleichungen zu erfüllen haben, während die Form unseres Objectivs uns vier Unbekannte darbietet, und folglich eine beliebige vierte Gleichung den drei übrigen hinzugefügt werden kann, so lässt die gegenwärtige Aufgabe eine grosse Anzahl von Auflösungen zu; strenge genommen eine unendlich grosse Anzahl, wenn nicht angenommen werden dürfte, dass eine Anzahl der Auflösungen wieder auf imaginäre Werthe der Unbekannten hinführen würde.

56.

Es soll die Auflösung der im vor. Art. ausgesprochenen Aufgabe hier nur auf eine einzige Art, und zwar mit Hinzufügung der Bedingung, dass die Halbmesser der beiden äusseren Linsenober-

*) Hr. v. Glasenapp hat die Güte gehabt, die obigen numerischen Rechnungen auszuführen.

flächen einander gleich sein, aber entgegengesetzte Lage haben sollen, durchgeführt werden. Zufolge dieser Bedingung erhalten wir die Gleichung

$$R + R''' = 0$$

aus welcher in Verbindung mit der überhaupt geltenden Gleichung

$$R - R''' = 2\varDelta$$

hervorgeht, dass

$$R = \varDelta, \quad R''' = -\varDelta$$

folglich bekannte Grössen sind. Aus derselben Gleichung geht ferner hervor, dass die im Art. 50 eingeführte Grösse s den Ausdruck

$$s = -\tfrac{1}{2}(\pi^{\text{IV}} + \pi)$$

annimmt. Es zeigt sich hiemit, dass auch die Summe $L + L'''$ eine bekannte Grösse wird, welche, wenn man wieder die mittleren Brechungsverhältnisse der beiden anzuwendenden Glasarten mit m und m' bezeichnet, folgenden Werth annimmt:

$$L + L''' = \frac{m-1}{m^2}\Big\{2D^3 + mD^2(\pi^{\text{IV}} - \pi) + (m + \tfrac{3}{2})D(\pi^{\text{IV}} + \pi)^2 + \\ + \tfrac{m}{4}(\pi^{\text{IV}} - \pi)(\pi^{\text{IV}} + \pi)^2\Big\}$$

wie aus dem im Art. 50 erhaltenen Ausdruck dieses Aggregats unmittelbar hervorgeht.

57.

Um den Werth von $L' + L''$ zu erhalten, wenden wir uns an den dafür im Art. 50 gefundenen Ausdruck, in welchen wir nicht nur die mittleren Brechungsverhältnisse, sondern auch

$$k = m'g'$$

einführen. Es wird hiemit zunächst

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\Big\{(6D' + \tfrac{m}{m'}(\pi_{\prime\prime} - \pi''))k^2 - 2mD'(\pi_{\prime\prime} + \pi'')k + \\ + 2m'^2D'^3 + mm'D'^2(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\Big\}$$

Sei nun

$$R' + R'' = 2\sigma$$

dann erhält man aus der Gleichung des Art. 50 für g'

$$2m'\sigma = 2k + m'(\pi_{\prime\prime} + \pi'')$$

und aus dem Art. 51

$$m'(\pi_{\prime\prime} + \pi'') = \pi^{\text{IV}} + \pi + 2(m' - m)\sigma + m(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'') \quad . \; . \; . \quad (a)$$

Die Elimination von σ zwischen diesen beiden Gleichungen giebt

$$m(\pi_{\prime\prime} + \pi'') = 2\frac{m'-m}{m'}k + (\pi^{\text{IV}} + \pi) + m(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'') \quad . \; . \; . \quad (b)$$

wodurch der obige Ausdruck für $L' + L''$ in den folgenden verwandelt wird, in welchem k als die einzige Unbekannte betrachtet werden kann:

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\left\{\left(2\,\frac{m'+2m}{m'}\,D' + \frac{m}{m'}(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\right)k^2 - \right.$$

$$\left. -2(D'(\pi^{\mathrm{IV}}+\pi) + mD'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d''))\,k + 2m'^2 D'^3 + mm'D'^2(\pi_{\prime\prime} - \pi'')\right\}$$

Die Gleichungen (a) und (b) geben ausserdem durch die Elimination von $\pi_{\prime\prime} + \pi''$

$$\sigma = \frac{k + \frac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)}{m} + \tfrac{1}{2}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

womit die Aufgabe schon gelöst ist, da man vermöge der Bedeutung von σ und $\varDelta'$ sogleich

$$R' = \sigma + \varDelta', \quad R'' = \sigma - \varDelta'$$

erhält.

58.

Setzt man zur Abkürzung:

$$a = 2\,\frac{m'-m}{m'}(m' + 2m)D' + m\,\frac{m'-m}{m'}\,\pi''^2 d'$$

$$b = (m' - m)D'(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi) + m(m' - m)D'(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$c = 2m'^2(m' - m)D'^3 + 2(m-1)D^3 + m(m-1)D^2(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)$$

$$+ (m-1)(m + \tfrac{3}{2})D(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)^2 + \tfrac{m}{4}(m-1)(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)^2 + C$$

wo

$$C = mm'(m' - m)D'^2 \pi''^2 d' + 2m^2 \pi' L d + 2m^2 \pi''(L + L')d' - 2m^2 \pi''' L'' d''$$

und wie in der nächst vorhergehenden Aufgabe

$$D = \varDelta + \tfrac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} - \pi)$$

$$D' = \varDelta' + \tfrac{1}{2}\pi'' d'$$

sind, so wird die Endgleichung

$$0 = ak^2 - 2bk + c$$

Nachdem man hieraus die beiden Werthe von k gefunden hat, berechnet man für jeden derselben

$$\sigma = \frac{k + \frac{1}{2}(\pi^{\mathrm{IV}} + \pi)}{m} + \tfrac{1}{2}(\pi'^2 d - \pi'''^2 d'')$$

$$R' = \sigma + \varDelta', \quad R'' = \sigma - \varDelta'$$

während stets

$$R = \varDelta, \qquad R''' = -\varDelta$$

sind. In der ersten Annäherung werden wieder hier wie oben die Glieder, welche von den Linsendicken abhängen, weggelassen.

59.

Um zu zeigen, dass hieraus reelle Objective entstehen, wollen wir wieder den einfachsten Weg einschlagen, und ein Beispiel berechnen. Der Kürze wegen soll von diesem Beispiel jedoch nur die erste Annäherung angegeben werden, da jeder, der die genaueren Werthe der Halbmesser kennen lernen will, leicht selbst die zweite, und wo nöthig die dritte Annäherung hinzufügen kann. Es sollen wieder dieselben Daten angewandt werden, welche oben benutzt wurden, und das Beispiel auch für die beiden Annahmen über die Lage der zwei Glasarten ausgeführt werden.

Legt man zuerst die Kronglaslinse in die Mitte, so bekommt man, gleichwie im Art. 53,

$$\varDelta = +\, 1.1853, \quad \varDelta' = +\, 2.3417$$
$$D = +\, 1.6853, \quad D' = +\, 2.3417$$

und für die Berechnung der Endgleichung sind

$$m = 1.6391$$
$$m' = 1.5291$$

zu setzen. Nachdem mit dem Coefficienten von k^2 dividirt worden ist, erhält man

$$0 = k^2 - 2(9.2016)\,k - (0.5778)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$k = +\, 2.111 \quad \text{und} \quad k = -\, 1.793$$

woraus

$$\sigma = +\, 1.593 \quad \text{und} \quad \sigma = -\, 0.789$$
$$R' = +\, 3.935 \qquad\qquad R' = +\, 1.553$$
$$R'' = -\, 0.749 \qquad\qquad R'' = -\, 3.131$$

folgen. Wir haben hier also wieder zwei verschiedene Objective erhalten, in welchen beiden

$$R = +\, 1.185$$
$$R''' = -\, 1.185$$

sind. Die Kronglaslinse ist in beiden biconvex, und sämmtliche Flintglaslinsen sind Menisken; die inneren Halbmesser sind bedeutend von einander verschieden.

60.

Legen wir jetzt die Flintglaslinse in die Mitte, so erhalten wir zunächst, gleichwie im Art. 54,

$$\Delta = + 1.1853, \quad \Delta' = - 1.1564$$
$$D = + 1.6853, \quad D' = - 1.1564$$

und die Daten zur Berechnung der Endgleichung sind jetzt

$$m = 1.5291$$
$$m' = 1.6391$$

aus welchen

$$0 = k^2 - 2(9.2417)k - (1.1078)$$

hervorgeht. Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$k = + 3.758 \quad \text{und} \quad k = - 3.410$$

woraus

$$\sigma = + 2.785 \quad \text{und} \quad \sigma = - 1.903$$
$$R' = + 1.629 \qquad R' = - 3.059$$
$$R'' = + 3.941 \qquad R'' = - 0.747$$

folgen, zu welchen Werthen wieder

$$R = + 1.185$$
$$R''' = - 1.185$$

gehören. Im ersten dieser beiden Objective sind die zwei ersten Linsen Menisken, die dritte biconvex, im zweiten Objectiv hingegen ist die erste Linse biconvex und die zweite und dritte Menisken; die inneren Halbmesser sind wieder sehr von einander verschieden.

61.

Als Einleitung zur folgenden Aufgabe soll noch untersucht werden, ob dasselbe Linsensystem, welches uns im Vorhergehenden beschäftigt hat, mit Beibehaltung der zuletzt eingeführten Bedingung reell wird, wenn man statt der beiden äusseren Halbmesser die beiden inneren einander gleich und entgegengesetzt liegend annimmt. Um ganz kurz verfahren zu können, sollen hiebei die Linsendicken, die wieder als sehr klein angenommen werden, ganz ausser Berücksichtigung bleiben.

Da unter der gegenwärtigen Annahme

$$R' + R'' = \sigma = 0$$

ist, so wird

$$k = -\tfrac{1}{2}(\pi^{IV} + \pi)$$

und der im Art. 57 für $L' + L''$ erhaltene Ausdruck geht über in

$$L' + L'' = \frac{m'-m}{m^2}\left\{2m'^2 D'^3 + \frac{\frac{1}{2}m'+m}{m'} D'(\pi^{IV} + \pi)^2\right\}$$

und ist völlig bekannt. Der Ausdruck des Art. 50 für $L + L'''$ kann mit der blossen Veränderung von N in m angewandt werden. Setzt man daher hier

$$a = (m-1)(6D + m(\pi^{IV} - \pi))$$
$$b = m(m-1)D(\pi^{IV} + \pi)$$
$$c = 2(m-1)D^3 + m(m-1)D^2(\pi^{IV} - \pi) + 2m'^2(m'-m)D'^3$$
$$+ (m'-m)\frac{\frac{1}{2}m'+m}{m'} D'(\pi^{IV} + \pi)^2$$

so wird die Endgleichung

$$0 = as^2 - 2bs + c$$

Wendet man diese Auflösung auf die vorhergehenden Daten an, so erhält man, wenn die Kronglaslinse in die Mitte gelegt wird,

$$0 = s^2 - 2(9.3707)s + (9.4071)$$

und wenn die Flintglaslinse in die Mitte gelegt wird

$$0 = s^2 - 2(9.3450)s + (9.9983)$$

Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen sind imaginär, und folglich ist es unmöglich, ein solches Objectiv herzustellen.

62.

Aus dem Vorhergehenden giebt sich zu erkennen, dass, obschon sich ein Objectiv von vier Brechungen und der hier in Rede stehenden Form, welches zwei Randstrahlen von verschiedener Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt, nicht herstellen lässt, man doch ein Objectiv dieser Form herrichten kann, in dem die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen vereinigt werden, mit anderen Worten, ein Objectiv, welches denselben Bedingungen genügt, wie das im vor. Abschnitte berechnete. Im gegenwärtigen Falle kann ein solches Objectiv auf verschiedene Arten construirt werden, da eine Bedingung willkührlich bleibt. Es ist gezeigt worden, dass das Objectiv möglich wird, wenn man annimmt, dass die

äusseren Halbmesser einander gleich sind, und entgegengesetzte Lage haben, und man würde auch unter dieser oder jener anderen Bedingung ein solches herstellen können, aber unter jeder Bedingung ist es nicht möglich. Diess zeigt der zuletzt betrachtete Fall. Unter der Annahme, dass die beiden inneren Halbmesser einander gleich seien und entgegengesetzt liegen, ist das Objectiv unmöglich, und noch andere solche Fälle würden sich herbeiführen lassen.

Alle diese Untersuchungen sind unter der Voraussetzung angestellt, dass die Linsendicken so kleine Grössen seien, dass man mit der Berücksichtigung der ersten Potenzen derselben ausreicht; es lässt sich daher die Frage aufwerfen, welche Resultate durch ein Linsensystem von der hier in Rede stehenden Form erreicht werden können, wenn man annimmt, dass wenigstens Eine der Linsendicken so gross ist, dass man sie strenge berücksichtigen muss. Zur Erörterung dieser Frage soll das Folgende einen Beitrag liefern.

63.

Nehmen wir jetzt an, dass die Dicke der mittleren Linse so gross sei, dass sie strenge berücksichtigt werden muss, und übergehen wir hiebei, der Kürze wegen, die Dicken der beiden äusseren Linsen, die als sehr klein angenommen werden sollen. Diese Uebergehung ist zwar durchaus nicht nothwendig, da die genannten Linsendicken hier eben so berücksichtigt werden könnten, wie bei den im Vorhergehenden gelösten Aufgaben; ich werde sie blos der kürzeren Darstellung wegen einführen, und dem Leser die leichte Ergänzung überlassen.

Wenden wir uns zur Gleichung des Art. 17, die für sechs Brechungen ausgeschrieben ist, und entfernen vor Allem daraus die zwei Brechungen, die der dort angenommenen grossen Entfernung zwischen der dritten und vierten brechenden Oberfläche zunächst liegen; wir eignen dadurch diese Gleichung dem jetzt in Rede stehenden Falle zu. Betrachten wir hierauf zunächst nur den von k''' unabhängigen Theil dieser Gleichung, welcher, gleichwie in den anderen oben behandelten Fällen, für sich gleich Null werden muss. Substituiren wir hier die im Art. 47 angegebenen, unserer Aufgabe zu-

kommenden Brechungsverhältnisse, und wenden die mittleren derselben an, berücksichtigen auch die Gleichungen

$$R - R''' = 2\Delta, \quad R' - R''' = 2\Delta'$$

so bekommen wir

$$\pi^{IV} - \pi = 2(m-1)(\Delta - \Delta') + 2(m'-1)\Delta' + m'\pi_{,,}\pi''d' \quad \ldots \quad (a)$$

wo d' die grosse Dicke der mittleren Linse bezeichnet.

Betrachten wir unter denselben Voraussetzungen den mit k''' multiplicirten Theil der angezogenen Gleichung, so wird dieser, wenn wir zur Abkürzung

$$\lambda = 1 + \pi_{,,}d'$$

setzen:

$$0 = (L + L')\lambda^2 + L'' + L''' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Diese Gleichungen (a) und (b) sind der weiteren Entwickelung zu unterwerfen.

64.

Wendet man die Gleichung (a) auf zwei verschiedene Lichtstrahlen des Sonnenspectrums an, mit anderen Worten, schreibt man erst N und N', und darauf M und M' statt m und m' darin, so entstehen zwei Gleichungen, welche gleichwie vorher die Bedingung des Achromatismus der Centralstrahlen bilden. Die Gleichung (b) dient hierauf mit Anwendung von m und m', um die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen zu vereinigen. Diese Umstände sind die nemlichen wie in den vorhergehenden Aufgaben, nur müssen hier, der grossen Linsendicke d' wegen, die erhaltenen Gleichungen anders behandelt werden, als in den vorhergehenden Aufgaben. Da die vier Halbmesser der Linsenflächen, nebst d', fünf verfügbare Grössen ausmachen, während nur drei Gleichungen zu erfüllen sind, so kann man zwei willkührliche Bedingungen einführen, und diese sollen darin bestehen, dass wir sowohl die beiden äusseren, wie die beiden inneren Halbmesser, jedes Paar für sich, einander gleich aber entgegengesetzt liegend annehmen. Diese beiden Bedingungen werden durch die Gleichungen

$$R + R''' = 0, \quad R' + R'' = 0$$

ausgedrückt, welche in Verbindung mit

$$R - R''' = 2\Delta, \quad R' - R'' = 2\Delta'$$

die Werthe

$$R = \Delta, \quad R' = \Delta'$$
$$R''' = -\Delta, \quad R'' = -\Delta'$$

geben.

65.

Die Gleichung (a) bleibt nach der Einführung der beiden eben genannten Bedingungen dieselbe, aber sie lässt sich in zwei Gleichungen zerlegen, die dazu angewandt werden können, um derselben eine andere äussere Form zu geben. Aus den im Art. 47 aufgestellten Relationen zwischen den Reciproken der Vereinigungsweiten erhalten wir jetzt, wenn wir die mittleren Brechungsverhältnisse anwenden, und wie oben die Linsendicken d und d'' übergehen, die Ausdrücke

$$m'\pi'' = (m-1)(\Delta-\Delta') + (m'-1)\Delta' + \pi$$
$$m'\pi_{,,} = -(m-1)(\Delta-\Delta') - (m'-1)\Delta' + \pi^{IV}$$

deren Unterschied, wie man leicht findet, mit (a) identisch ist. Wendet man diese beiden Gleichungen nach einander an, um m' in dem Gliede $m'\pi_{,,}\pi''d'$ der Gleichung (a) zu eliminiren, so bekommt man

$$(m-1)(\Delta-\Delta') + (m'-1)\Delta' = \frac{\pi^{IV} - \pi(1+\pi_{,,}d')}{2+\pi_{,,}d'}$$
$$(m-1)(\Delta-\Delta') + (m'-1)\Delta' = \frac{\pi^{IV}(1-\pi''d') - \pi}{2-\pi''d'}$$

Nun giebt die Gleichung

$$\pi_{,,} - \pi'' = \pi_{,,}\pi''d'$$

des Art. 12 leicht

$$(1-\pi''d')(1+\pi_{,,}d') = 1$$

und die Verbindung dieser mit der im Art. 63 eingeführten Grösse λ führt auf

$$(k) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1-\pi''d' = \frac{1}{\lambda}, \quad 1+\pi_{,,}d' = \lambda$$

womit beide obigen Gleichungen in

$$(c) \quad \ldots\ldots \quad (m-1)(\Delta-\Delta') + (m'-1)\Delta' = \frac{\pi^{IV} - \pi\lambda}{1+\lambda}$$

übergehen. Diese Gleichung ist mit der (a) gleichbedeutend, obgleich sie eine andere äussere Form besitzt.

66.

Um die zwischen d' und λ stattfindende Relation zu erhalten, bemerke ich, dass die Substitution von (c) in die vorstehenden Glei-

chungen für $m'\pi''$ und $m'\pi_{,,}$

$$m'\pi'' = (\pi^{\text{IV}}+\pi)\frac{1}{1+\lambda}$$

$$m'\pi_{,,} = (\pi^{\text{IV}}+\pi)\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

giebt; eliminirt man hiemit π'' und $\pi_{,,}$ aus den (k), so führen beide auf dieselbe Gleichung, nemlich

$$\lambda^2 - (\pi^{\text{IV}}+\pi)\frac{d'}{m'}\lambda - 1 = 0$$

Sieht man nun d' als bekannt an, so erhält man:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left\{\frac{d'}{m'}(\pi^{\text{IV}}+\pi) \pm \sqrt{\frac{d'^2}{m'^2}(\pi^{\text{IV}}+\pi)^2+4}\right\}$$

es entsprechen folglich immer jedem Werthe von d' zwei reelle Werthe von λ. Sieht man hingegen λ als bekannt an, so wird

$$d' = \frac{m'}{\pi^{\text{v}}+\pi}\,\frac{\lambda^2-1}{\lambda}$$

woraus folgt, dass nicht jedem Werthe von λ ein statthafter Werth von d' entspricht. Denn, vorausgesetzt dass $\pi^{\text{IV}}+\pi$ positiv ist, so wird d' negativ und folglich unmöglich, wenn entweder λ zwischen 0 und 1 liegt, oder wenn λ negativ und $-\lambda > 1$ ist. Wenn hingegen $(\pi^{\text{IV}}+\pi)$ negativ ist, so sind die eben ausgeschlossenen Werthe von λ die einzigen, welche ein mögliches d' geben.

67.

Wenden wir uns zur Gleichung (c) des vorvor. Art. und beziehen sie auf die beiden Lichtstrahlen des Sonnenspectrums, deren Brechungsverhältnisse N und N', so wie bez. M und M' sind, dann erhalten wir

$$(N-1)(\Delta-\Delta') + (N'-1)\Delta' = \frac{\pi''-\pi\lambda}{1+\lambda}$$

$$(M-1)(\Delta-\Delta') + (M'-1)\Delta' = \frac{\pi^{\text{IV}}-\pi\lambda}{1+\lambda}$$

Hier ist vorausgesetzt, dass λ wie oben vom mittleren Brechungsverhältniss abhängig gemacht werde, welche Annahme eine kleine Uebergehung in sich schliesst, die aber nur sehr geringe Wirkung auf das Resultat äussern, und schliesslich, wenn man will, auch ausgeglichen werden kann. Lösen wir statt der obigen Gleichungen die folgenden auf:

$$(N-1)(l-l') + (N'-1)l' = 1$$
$$(M-1)(l-l') + (M'-1)l' = 1$$

(welches durch die Ausdrücke der Artt. 21 oder 48 geschehen kann,) so dass l und l' bekannte Grössen werden, dann ergeben sich

$$\Delta = \frac{l\pi^{\text{IV}} - l\pi\lambda}{1+\lambda}, \quad \Delta' = \frac{l'\pi^{\text{IV}} - l'\pi\lambda}{1+\lambda}$$

womit Δ und Δ' in Function von λ dargestellt sind.

Um überflüssige Weitläufigkeiten zu vermeiden, wollen wir von nun an annehmen, dass parallele Lichtstrahlen auf das in Betracht stehende Linsensystem einfallen, wodurch $\pi = 0$ wird, und da wir jedenfalls $\pi^{\text{IV}} = 1$ setzen dürfen, so verwandeln sich die vorstehenden Ausdrücke in die folgenden:

$$\Delta = \frac{l}{1+\lambda}, \quad \Delta' = \frac{l'}{1+\lambda}$$

welche von nun an angewandt werden sollen.

68.

Gehen wir zur Gleichung (b) des Art. 63 über, und entnehmen für diese die Ausdrücke der verschiedenen L aus den Gleichungen (5) und (6) des Art. 8, so erhält man die Formeln

$$L = \frac{m-1}{m^2}\{(\Delta-\pi)^3 - m\pi(\Delta-\pi)^2\}$$
$$L' = \frac{m'(m'-m)}{m^2}\{m'(\Delta'-\pi'')^3 - m\pi''(\Delta'-\pi'')^2\}$$
$$L'' = \frac{m'(m'-m)}{m^2}\{m'(\Delta'+\pi_{,,})^3 + m\pi_{,,}(\Delta'+\pi_{,,})^2\}$$
$$L''' = \frac{m-1}{m^2}\{(\Delta+\pi^{\text{IV}})^3 + m\pi^{\text{IV}}(\Delta+\pi^{\text{IV}})^2\}$$

deren Entwickelung wir auf die folgende Weise ausführen werden.

Durch Hülfe der Gleichungen

$$\pi = 0, \qquad \Delta = \frac{l}{1+\lambda}$$

erhalten wir sogleich

$$(a) \; \ldots\ldots\ldots \; m^2(1+\lambda)^3 L = (m-1)l^3$$

und ziehen wir die Gleichungen

$$m'\pi'' = \frac{1}{1+\lambda}, \quad \Delta' = \frac{l'}{1+\lambda}$$

hinzu, so ergiebt sich ohne Mühe

$$(b) \; \ldots\ldots \; m^2(1+\lambda)^3 L' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'(m'l'-1)^3 - m(m'l'-1)^2\}$$

Da ferner wegen $\pi^{\text{IV}} + \pi = 1$

$$m'\pi_{,,} = \frac{\lambda}{1+\lambda}$$

wird, so entsteht der Ausdruck

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'(m'l'+\lambda)^3 + m\lambda(m'l'+\lambda)^2\}$$

welcher durch die Entwickelung der Potenzen

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{(m'+m)\lambda^3 + m'(3m'+2m)l'\lambda^2 + \\ + m'^2(3m'+m)l'^2\lambda + m'^4 l'^3\} \quad (c)$$

giebt. Man kann bemerken, dass dieser Ausdruck in den von L' übergeht, wenn man in der rechten Seite $\lambda = -1$ setzt.

Endlich wird, wenn man $\pi^{\text{IV}} = 1$ macht, durch Hülfe der vorstehenden Gleichungen

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{(l+1+\lambda)^3 + m(1+\lambda)(l+1+\lambda)^2\}$$

und nach der Entwickelung der Potenzen:

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{(m+1)\lambda^3 + ((2m+3)(l+1)+m)\lambda^2 + \\ + ((m+3)(l+1)^2 + 2m(l+1))\lambda + (l+1+m)(l+1)^2\} \quad (d)$$

wozu bemerkt werden kann, dass der obige Ausdruck von L daraus entsteht, wenn in der rechten Seite $\lambda = -1$ gesetzt wird.

69.

Stellen wir nun die im vor. Art. erhaltenen Ausdrücke (a), (b), (c), (d) der Gleichung (b) des Art. 63 gemäss zusammen, und setzen zur Abkürzung:

$$\begin{aligned}
b &= (m-1)l^3 \\
b' &= \frac{m'-m}{m'}(m'l'-1)^3 - \frac{m}{m'^2}(m'-m)(m'l'-1)^2 \\
a'' &= \frac{(m'-m)(m'+m)}{m'^2} \\
b'' &= \frac{m'-m}{m'}(3m'+2m)l' \\
c'' &= (m'-m)(3m'+m)l'^2 \\
e'' &= m'^2(m'-m)l'^3 \\
a''' &= (m-1)(m+1) \\
b''' &= (m-1)(2m+3)(l+1) + (m-1)m \\
c''' &= (m-1)(m+3)(l+1)^2 + 2m(m-1)(l+1) \\
e''' &= (m-1)(l+1+m)(l+1)^2
\end{aligned}$$

so wird die Endgleichung

$$0 = (a''+a''')\lambda^3 + (b+b'+b''+b''')\lambda^2 + (c''+c''')\lambda + (e''+e''')$$

Hat man hieraus λ bestimmt, so findet man

$$d' = m'\frac{\lambda^2-1}{\lambda}$$

Da die vorstehende cubische Gleichung immer wenigstens Eine reelle Wurzel hat, so wird man immer wenigstens Einen möglichen Werth für d' erhalten, vorausgesetzt, dass nicht immer die oben erörterten beiden Ausnahmefälle eintreten, welche d' negativ, folglich unmöglich machen.

70.

Zur näheren Beurtheilung der Möglichkeit des in Betrachtung stehenden Linsensystems sollen jetzt einige numerische Beispiele berechnet werden. Zuerst nehme ich wieder dieselben beiden Glasarten an, welche zu den vorhergehenden Beispielen gedient haben, und setze voraus, dass die mittlere Linse von Kronglas sei. Man erkennt leicht, dass unter diesen Voraussetzungen die Werthe der mit l und l' bezeichneten Grössen das Doppelte der im Art. 53 für $\varDelta$ und $\varDelta'$ erhaltenen Werthe betragen. Wir bekommen daher sogleich

$$l = +\ 2.3706, \quad l' = +\ 4.6834$$

und es sind hier ferner

$$m = 1.6391, \quad m' = 1.5291$$

Durch Anwendung von Logarithmen von blos vier Decimalen ergeben sich die Werthe

$$b = +\ 8.51$$
$$b' = -\ 13.89$$
$$a'' = -\ 0.149, \quad b'' = -\ 2.65, \quad c'' = -\ 15.02, \quad e'' = -\ 26.41$$
$$a''' = +\ 1.686, \quad b''' = +\ 14.58, \quad c''' = +\ 40.74, \quad e''' = +\ 36.38$$

Die hieraus folgende Endgleichung

$$1.537\lambda^3 + 6.55\lambda^2 + 25.72\lambda + 9.97 = 0$$

hat nur die einzige reelle Wurzel

$$\lambda = -\ 0.4300$$

welcher Werth zu erkennen giebt, dass das in Betracht stehende Linsensystem bei den hier gewählten Daten nicht unmöglich ist. Berechnen wir aber die Reciproken der Halbmesser, nebst der Dicke der mittleren Linse, so finden wir

$$R = -R''' = +\ 4.658$$
$$R' = -R'' = +\ 8.215$$
$$d' = 2.898$$

wodurch sich zeigt, dass das Linsensystem, obgleich theoretisch möglich, dennoch praktisch unausführbar ist, wenigstens wenn dessen Brennweite nicht äusserst klein sein soll. Denn da die Dicke der mittleren Linse nahe das Dreifache der Brennweite beträgt, so würde dieses Linsensystem schon bei mässig kleinen Brennweiten eine unausführbar grosse Dicke bekommen müssen; um so mehr ist diess bei grossen Brennweiten der Fall. Auch werden, wie man sieht, die Krümmungen der Linsenoberflächen hier schon sehr gross, welcher Umstand die Oeffnung der Linsen, schon bei den kleinsten Brennweiten, sehr beeinträchtigen würde.

Als besondere Merkwürdigkeit dieses Linsensystems kann angeführt werden, dass es das Bild des unendlich weit entfernten Gegenstandes aufrecht zeigt, wie leicht erkannt wird.

71.

Als zweites Beispiel sollen dieselben Glasarten angewandt, aber die Flintglaslinse in die Mitte gelegt werden. Die Werthe von l und l' entsprechen jetzt auf dieselbe Weise wie im vorigen Beispiel denen von Δ und Δ' des Art. 54; es sind nemlich jetzt

$$l = +\ 2.3706, \quad l' = -\ 2.3128$$

nebst

$$m = 1.5291, \qquad m' = 1.6391$$

Die hieraus folgende Endgleichung wird

$$1.468\lambda^3 + 8.60\lambda^2 + 36.47\lambda + 25.80 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel

$$\lambda = -\ 0.8547$$

ist. Es ergeben sich hiemit

$$R = -R''' = +\ 16.31$$
$$R' = -R'' = -\ 15.93$$
$$d' = 0.517$$

Obgleich hier die Dicke der mittleren Linse bedeutend kleiner ausgefallen ist als im vorigen Beispiel, und nur ohngefähr die Hälfte der Brennweite des Linsensystems beträgt, so ist sie doch immer noch zu gross, als dass dieses Linsensystem praktisch ausführbar

wäre, wenn nicht die Brennweite sehr klein angenommen wird. Es tritt hier noch der störende Umstand hinzu, dass die Krümmungen der Oberflächen der Linsen über die Maassen gross werden.

Das hier erhaltene Linsensystem giebt übrigens, wie gewöhnlich, umgekehrte Bilder.

72.

Man kann die Vermuthung aufstellen, ob nicht das in Untersuchung stehende Linsensystem möglich werden könnte, wenn man es aus anderen Glasarten, als die bisher zu Grunde gelegten, zusammensetzt. Um hierüber Auskunft zu erhalten, soll statt des oben angewandten Flintglases ein solches der Rechnung zu Grunde gelegt werden, dessen hier in Betracht kommende Brechungsverhältnisse

$$N = 1.58$$
$$M = 1.614$$

sind. Ich darf annehmen, dass es Flintglasarten giebt, deren Brechungsverhältnisse ohngefähr die vorstehenden sind. Während ich annehme, dass die beiden äusseren Linsen aus diesem Glase bestehen, soll für die mittlere Linse wie bisher dasjenige Kronglas angewandt werden, dessen correspondirende Brechungsverhältnisse

$$N' = 1.5187$$
$$M' = 1.53956$$

sind. Die mittleren Brechungsverhältnisse werden nun

$$m = 1.5970$$
$$m' = 1.5291$$

und aus diesen Daten bekommt man zuerst

$$l = + 2.3736$$
$$l' = + 6.1410$$

so wie die Endgleichung

$$1.460\lambda^3 - 3.66\lambda^2 + 21.81\lambda - 3.00 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel sehr nahe

$$\lambda = + 0.14$$

ist. Dieser Werth von λ wird aber auf einen negativen, folglich unmöglichen Werth von d' führen, und das hier betrachtete Linsensystem ist demnach in jedem Betracht unmöglich.

Vergleichen wir nun dieses Resultat mit dem des Art. 70,

welches $\lambda = -0.43$ gab, so folgt, dass für Flintglasarten, deren Brechungsverhältnisse zwischen den dort und den hier angewandten liegen, die Werthe von λ zwischen -0.43 und $+0.14$ liegen müssen. Diesen Werthen entsprechen aber wachsende Werthe von d', die bis ins Unendliche sich steigern, und dann unmöglich werden. Da nun die im Art. 70 angewandten Brechungsverhältnisse des Flintglases zu den grössten gehören, die vorhanden sind, so zeigt sich die Unmöglichkeit, ein Linsensystem von der angenommenen Form herzustellen, welches den hier geforderten Bedingungen entspricht.

73.

Wendet man wieder die Brechungsverhältnisse des vor. Art. an, verlegt aber die Flintglaslinse in die Mitte, so bekommt man

$$l = +2.373$$
$$l' = -3.768$$

und die Endgleichung

$$1.421\lambda^3 + 0.77\lambda^2 + 38.80\lambda + 20.25 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel sehr nahe

$$\lambda = -0.52$$

ist. Hier ist wieder das Linsensystem theoretisch möglich, aber man erhält

$$R = -R''' = +4.94$$
$$R' = -R'' = -7.85$$
$$d' = 2.24$$

und aus den oben angeführten Gründen ist also auch dieses Linsensystem praktisch unausführbar.

74.

Da ein achromatisches Linsensystem von der in Rede stehenden Form nicht hergestellt werden kann, so wollen wir untersuchen, ob sich nicht ein solches herstellen lässt, in welchem man von der Bedingung des Achromatismus absieht, und blos die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den Centralstrahlen derselben Brechung vereinigt. Ein solches Linsensystem kann man auch so definiren, dass die

Abweichung wegen der Kugelgestalt in demselben gehoben ist; es wird mithin zur Klasse der sogenannten Aplanaten oder aplanatischen Loupen gehören, welche vielfache Anwendung finden.

Die Auflösung dieser Aufgabe beruht wieder auf der Erfüllung der Gleichungen (a) und (b) des Art. 63, während in (a) die mittleren Brechungsverhältnisse zu belassen, und dieselben wiederum in (b) einzuführen sind. Wir könnten demgemäss die schon gegebene Entwickelung von (b) anwenden, aber da diese jetzt anders geordnet werden muss, so wollen wir etwas weiter zurückgehen.

Setzen wir wieder $\pi = 0$, $\pi^{\text{IV}} = 1$, dann erhalten wir aus den Gleichungen des Art. 68:

$$m^2(1+\lambda)^3 L = (m-1)l^3$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4 l'^3 - m'^2(3m'+m)l'^2 + m'(3m'+2m)l' - (m'+m)\}$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L'' = \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4 l'^3 + m'^2(3m'+m)\lambda l'^2 + m'(3m'+2m)\lambda^2 l' + (m'+m)\lambda^3\}$$

$$m^2(1+\lambda)^3 L''' = (m-1)\{l^3 + (m+3)(1+\lambda)l^2 + (2m+3)(1+\lambda)^2 l + (m+1)(1+\lambda)^3\}$$

deren Substitution in die oben angezogene Gleichung (b)

$$(m-1)\{(1+\lambda^2)l^3 + (m+3)(1+\lambda)l^2 + (2m+3)(1+\lambda)^2 l + (m+1)(1+\lambda)^3\}$$
$$+ \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4(1+\lambda^2)l'^3 + m'^2(3m'+m)(1-\lambda)\lambda l'^2 +$$
$$+ 2m'(3m'+2m)\lambda^2 l' + (m'+m)(\lambda-1)\lambda^2\} = 0$$

ergiebt. Seien

$$l = \frac{k}{m-1}, \quad l' = \frac{k'}{m'-m}$$

und zur Abkürzung:

$$a = \frac{1+\lambda^2}{(m-1)^2}, \qquad b = \frac{m+3}{m-1}(1+\lambda)$$
$$c = (2m+3)(1+\lambda)^2, \quad e = (m-1)(m+1)(1+\lambda)^3$$
$$a' = \frac{m'^2}{(m'-m)^2}(1+\lambda^2), \quad b' = \frac{3m'+m}{m'-m}(1-\lambda)\lambda$$
$$c' = 2\,\frac{3m'+2m}{m'}\lambda^2, \qquad e' = \frac{(m'-m)(m'+m)}{m'^2}(\lambda-1)\lambda^2$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$0 = ak^3 + bk^2 + ck + e + a'k'^3 + b'k'^2 + c'k' + e'$$

in welcher k oder k' eliminirt werden muss.

75.

Durch die vorhergehenden Substitutionen haben wir schon die Gleichung (a) des Art. 63 in die folgende verwandelt,

$$(m-1)l + (m'-m)l' = 1$$

Führt man hierin die Grössen k und k' des vor. Art. ein, so geht sie über in

$$k + k' = 1$$

womit aus der letzten Gleichung des vor. Art. leicht k oder k' eliminirt werden kann. Eliminirt man k, so bekommt man die Endgleichung

$$0 = (a'-a)k'^3 + (b'+3a+b)k'^2 + (c'-3a-2b-c)k' + (e'+a+b+c+e)$$

Hat man hieraus k' berechnet, so werden

$$R = -R''' = \frac{1-k'}{(m-1)(1+\lambda)}$$

$$R' = -R'' = \frac{k'}{(m'-m)(1+\lambda)}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

76.

Da die Endgleichung, welche wir eben erhalten haben, von zwei Unbekannten, nemlich von k' und λ, oder was dasselbe ist, von k' und d' abhängt, so lassen sich viele verschiedene aplanatische Loupen von der hier verlangten Form herstellen, von denen manche indess nicht annehmbar sein dürften. Zur Berechnung muss man ursprünglich einen passenden Werth von d' annehmen, und damit durch die Gleichung

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{d'}{m'} \pm \sqrt{4 + \frac{d'^2}{m'^2}}\right)$$

den entsprechenden Werth von λ aufsuchen, worauf die übrige Rechnung bestimmt ist. Da jedem Werthe von d' zwei Werthe von λ entsprechen, von welchen der eine positiv, und der andere negativ ist, so bekommt man für jeden angenommenen Werth von d' zwei verschiedene aplanatische Loupen, von denen jedoch diejenige, welche dem negativen Werthe von λ entspricht, gemeiniglich ausge-

schlossen werden muss, da sie auf sehr grosse Krümmungen der Linsenoberflächen führt.

Zur scharfen und definitiven Berechnung einer solchen aplanatischen Loupe gehört übrigens noch die Zuziehung der Dicken der beiden äusseren Linsen, die im Vorstehenden übergangen worden sind. Man kann diese beiden Dicken immer einander gleich, und als sehr klein ansehen, sie folglich durch die oben entwickelten allgemeinen Ausdrücke leicht mit in Rechnung ziehen. Sie sollen übrigens weiter unten angegeben werden.

77.

Zur Berechnung eines Beispiels werden wir hier zuerst dieselben Brechungsverhältnisse annehmen, die uns bei den meisten Beispielen gedient haben, nemlich

$$m = 1.6391$$
$$m' = 1.5291$$

und die Dicke der mittleren Linse

$$d' = 0.2$$

setzen. Es folgt hieraus

$$\lambda = +1.06752, \text{ und } = -0.93673$$

wovon nur der positive Werth angewandt werden soll. Man bekommt nun durch die Ausdrücke des Art. 74:

$$a = +5.238,\quad b = +15.007,\quad c = +26.85,\quad e = +14.91$$
$$a' = +413.3,\quad b' = +4.079,\quad c' = +11.72,\quad e' = -0.011$$

und hieraus die Endgleichung

$$408.1\,k'^3 + 34.80\,k'^2 - 60.85\,k' + 61.99 = 0$$

deren einzige reelle Wurzel

$$k' = -0.6600$$

ist. Schliesslich werden hiemit

$$R = -R''' = +1.256$$
$$R' = -R'' = +2.901$$

gefunden. Diess ist ein ausführbares Resultat.

78.

Wir wollen noch ein Beispiel mit Zugrundelegung der mittleren Brechungsverhältnisse, die zu dem Beispiel des Art. 72 gedient haben, durchführen, nemlich

$$m = 1.5970$$
$$m' = 1.5291$$

und dabei wieder $\lambda = + 1.06752$ setzen. Es werden nun

$$a = 6.001, \quad b = 15.78, \quad c = 26.49, \quad e = 13.71$$
$$a' = 1084.7, \quad b' = 6.564, \quad c' = 11.60, \quad e' = - 0.007$$
$$1078.7 k'^3 + 40.35 k'^2 - 64.45 k' + 61.97 = 0$$
$$k' = - 0.4516$$
$$R = - R''' = + 1.176$$
$$R' = - R'' = + 3.216$$

welches Resultat vom vorhergehenden nur wenig verschieden ist. Dass aplanatische Loupen der in Rede stehenden Form mit Erfolg ausgeführt werden können, ist praktisch nachgewiesen, da die Herren STEINHEIL solche anfertigen, die im ganzen nicht unbeträchtlichen Gesichtsfelde sehr reine Bilder geben. Dass der Mangel an Achromatismus hier keine merkliche Undeutlichkeit hervorbringt, kann vielleicht als eine besondere Eigenthümlichkeit des Auges angesehen, und damit erklärt werden, dass das Auge bei der Betrachtung eines Gegenstandes durch eine Loupe für die Abweichung wegen Kugelgestalt weit empfindlicher ist, als für den Chromatismus.

---

§. 4. Anhang und Nachtrag.

79.

Mit der Bezifferung dieses Artikels bricht das Manuscript des Autors plötzlich ab, ohne die am Schlusse des Art. 76 in Aussicht gestellten Angaben über die Dicke der beiden äusseren Linsen zu enthalten. Die dem Manuscripte beiliegenden Brouillonblätter geben über den Inhalt der beabsichtigten Fortsetzung keine bestimmte Auskunft: es scheint, dass der Verfasser noch die Differentialformeln zu entwickeln gedachte, durch welche der Einfluss einer Aenderung in den Linsenkrümmungen auf die Vereinigungsweite der Strahlen bestimmt wird*).

Den bezüglichen Aufzeichnungen des Verfassers entlehnen wir die folgenden Artikel.

*) Vergl. die Anmerkung am Schlusse des Art. 40.

80.

»Es ist in Bezug auf achromatische Objective überhaupt ein wesentlicher Umstand zu erörtern, nämlich zu untersuchen, wie viel an der guten Wirkung des Objectivs eingebüsst wird, wenn die berechneten Werthe der Halbmesser der brechenden Oberflächen in der Ausführung nicht genau hergestellt worden sind. Es ist diese Untersuchung um so mehr erforderlich, da auch der geschickteste Künstler die genaue Ausführung dieser Maasse nicht verbürgen kann, und sie ihm Anleitung giebt, die Halbmesser zu erkennen, deren Aenderung am zweckmässigsten vorgenommen wird, wenn ein angefertigtes Objectiv bei der Prüfung desselben Verbesserungen wünschenswerth oder nothwendig erscheinen lässt.

Die Lösung dieser Aufgabe besteht in der Ermittelung der Differentialquotienten der Brennweite in Bezug auf die genannten Halbmesser, wobei aber genügend ist, diese Differentialquotienten auf die mit der Abscissenaxe parallel einfallenden Strahlen zu beschränken.«

81.

Da die vom Verfasser angestellten analytischen Entwickelungen der Differentialformeln eine Bezeichnungsweise voraussetzen, die von der in der vorhergehenden Abhandlung gewählten wesentlich abweicht, so mag hier die Mittheilung der numerischen Anwendungen genügen. Dieselben beziehen sich auf zwei Objective, welche mit den im obigen §. 2 berechneten nahe übereinkommen, wenn man die Längenmaasse entsprechend reducirt.

»Setzt man die Brennweite $f = 1127^L.7$
die halbe Oeffnung $k = 35.0$

so sollen die vier Halbmesser resp. die folgenden Werthe erhalten:

I. Objectiv	II. Objectiv
$r = +1793^L.247$	$r = +470^L.333$
$r' = -277.974$	$r' = -496.525$
$r'' = -277.974$	$r'' = -496.525$
$r''' = -647.532$	$r''' = +26965.6$

Mit diesen Daten findet sich:

für das erste Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'''}\right)$
rothe Centralstrahlen	+ 0.2055	− 8.5340	+ 10.1678	− 1.8744
rothe Randstrahlen	+ 0.2061	− 8.9169	+ 10.5628	− 1.8946
violette Centralstrahlen	+ 0.2138	− 8.8745	+ 10.8592	− 2.0025
violette Randstrahlen	+ 0.2144	− 9.2574	+ 11.2542	− 2.0227

für das zweite Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial r'''}\right)$
rothe Centralstrahlen	+ 3.0212	− 2.6875	+ 3.2020	− 0.0010808
rothe Randstrahlen	+ 3.0304	− 2.7442	+ 3.2674	− 0.0010829
violette Centralstrahlen	+ 3.1430	− 2.7955	+ 3.4207	− 0.0011547
violette Randstrahlen	+ 3.1522	− 2.8522	+ 3.4861	− 0.0011568

82.

»Man sieht, dass ein Fehler in den Halbmessern der brechenden Oberflächen in diesen beiden Objectiven sehr ungleiche und verschiedene Wirkung äussert; beim ersten Halbmesser ist die Wirkung im ersten Objectiv kleiner als im zweiten, aber bei den anderen drei Halbmessern findet das Entgegengesetzte statt. Die Wirkung eines Fehlers beim dritten Halbmesser ist bei beiden Objectiven am grössten. Habe man z. B. in der Ausführung dieses Halbmessers um fünf Linien gefehlt, so werden die Aenderungen der Vereinigungsweiten der oben betrachteten Lichtstrahlen der Reihe nach

	im ersten Objectiv	im zweiten Objectiv
	$50\overset{L}{.}84$	$16\overset{L}{.}01$
	52.81	16.34
	54.30	17.10
	56.27	17.43
grösste Längenabweichung	$5\overset{L}{.}43$	$1\overset{L}{.}42$

Nun zeigte aber die in der früheren Abhandlung geführte Untersuchung des Königsberger Heliometerobjectivs, dass in diesem bei derselben Gattung von Strahlen die grösste Abweichung $= 1\overset{L}{.}244$ ist*), und dennoch ist dieses Objectiv eines der besten vorhandenen, und zur Zufriedenheit BESSEL's ausgefallen. Man erkennt hieraus, dass eine Längenabweichung wie die eben angeführte für die Anwendung ohne sonderlichen Nachtheil bleibt, und dass daher das obige zweite Objectiv, dessen eben erhaltene grösste Längenabweichung nur unbedeutend grösser ist, als die des Königsberger Objectivs, in dem Halbmesser, dessen Fehler den grössten Einfluss äussert, einen Fehler von 5 Linien verträgt, während bei dem ersten Objective dieser Fehler wohl eine merkliche Abnahme der Deutlichkeit der Bilder verursachen würde. Das zweite Objectiv ist also sicherer und leichter herzustellen als das erste.

83.

»Wenn man annehmen darf, dass der Fehler des zweiten und des dritten Halbmessers in der Ausführung derselbe bleibt, so wird die Totalwirkung dieses Fehlers gleich der Summe der Einzelwirkungen dieser beiden Halbmesser, folglich in diesem Falle

*) Siehe Art. 77 der ersten dioptrischen Abhandlung, S. 161 dieses Bandes.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial r''}\right)$$

beim ersten Ojectiv	beim zweiten Objectiv
+ 1.6338	+ 0.5145
+ 1.6459	+ 0.5232
+ 1.9847	+ 0.6252
+ 1.9968	+ 0.6339

Die Wirkung eines Fehlers wird also unter dieser Voraussetzung viel kleiner, aber beim zweiten Objectiv mehr wie drei Mal so klein als beim ersten, während die betreffenden Halbmesser des zweiten Objectivs weniger als zwei Mal so gross sind als die des ersten.

84.

»Um diese Betrachtungen zu vervollständigen, muss der Umstand mit hinzugezogen werden, dass der bei der Ausführung eines Objectivs zu befürchtende Fehler in den Halbmessern der brechenden Oberflächen bei verschiedener Grösse dieser Halbmesser verschieden ausfallen muss. Ein gleichförmigeres Maass des zu befürchtenden Fehlers erhält man durch Einführung der »Krümmung« dieser Oberflächen, wenn man darunter die Abscisse der Randstrahlen in ihrem Einfallspunkt versteht, die dem Sinus Versus des betreffenden Centriwinkels gleich ist. Bezeichnet man hier diese, jedesmal von der betreffenden Oberfläche an gerechneten Abscissen mit ϱ, ϱ', etc., so erhält man mit hinreichender Genauigkeit die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 2\frac{\partial f}{\partial r}\left(\frac{r}{k}\right)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial \varrho'} = 2\frac{\partial f}{\partial r'}\left(\frac{r'}{k}\right)^2, \quad \text{etc.}$$

die man sowohl auf die Centralstrahlen wie auf die Randstrahlen anwenden darf.

Nimmt man nun 0.01 zur Einheit an, so findet man für die beiden obigen Objective die folgenden numerischen Werthe:

für das erste Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'''}\right)$
für die rothen Centralstrahlen	+ 10.79	− 10.31	+ 12.28	− 12.82
– – – Randstrahlen	+ 10.82	− 10.77	+ 12.76	− 12.97
– – violetten Centralstrahlen	+ 11.22	− 10.56	+ 13.12	− 13.71
– – – Randstrahlen	+ 11.25	− 11.18	+ 13.59	− 13.85

für das zweite Objectiv

	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho''}\right)$	$\left(\frac{\partial f}{\partial \varrho'''}\right)$
für die rothen Centralstrahlen	+ 10.89	− 10.82	+ 12.89	− 13.31
– – – Randstrahlen	+ 10.92	− 11.05	+ 13.15	− 13.34
– – violetten Centralstrahlen	+ 11.33	− 11.25	+ 13.77	− 14.22
– – – Randstrahlen	+ 11.36	− 11.48	+ 14.03	− 14.25

Also die Wirkung eines und desselben Fehlers in den Krümmungen der Halbmesser der brechenden Oberflächen ist (vorausgesetzt, dass die Kugelgestalt dieser Oberflächen stets erhalten bleibt) in diesen beiden Objectiven bis auf Weniges dieselbe, nur ist beim zweiten Objectiv die aus einem solchen Fehler entstehende Aenderung in den Vereinigungsweiten der verschiedenen Strahlengattungen geringer als beim ersten Objectiv. Jenes verträgt also ohne grössere Beeinträchtigung seiner Wirkungen grössere Fehler in diesen Krümmungen als dieses.«

Nachtrag.

85.

Im Art. 20 ist die Gleichung $\pi''' - \pi = P + Qk^2$ aufgestellt und behufs Beseitigung der sphärischen Abweichung in die beiden Gleichungen

$$\pi''' - \pi = P \quad \text{und} \quad Q = 0$$

zerfällt worden. Es ist aber leicht zu sehen, dass die in die gegenseitigen Abstände d der Linsenoberflächen multiplicirten Glieder in P selbst noch von k abhängen, so dass P eigentlich die Form $P + \frac{\partial P}{\partial k^2} k^2$ annimmt, mithin Q um $\frac{\partial P}{\partial k^2}$ zu vermehren ist. Dadurch erleiden die in der Abhandlung gegebenen Entwickelungen an einigen Orten gewisse Modificationen, welche im Folgenden aufgeführt werden sollen. Es war dem Verfasser keineswegs entgangen, dass die in seinem Manuscript enthaltenen Formeln mit einigen in EULER's Dioptrik abgeleiteten Resultaten nicht völlig im Einklang standen, und er sprach gegen den Schreiber dieser Zeilen das Bedauern aus, dass er bei dem Zustande seiner Augen vorläufig nicht daran denken könne, dem Grunde dieser Abweichung nachzuforschen. Wäre es ihm vergönnt gewesen, die letzte Hand an die Redaction seiner Abhandlung zu legen, so würden die hier in den Nachtrag verwiesenen Ergänzungen vermuthlich schon im Texte der Abhandlung Berücksichtigung gefunden haben. Einer Entschuldigung dafür, dass der Herausgeber nicht diese Umarbeitung unternommen, wird es hoffentlich nicht bedürfen; wohl aber hat derselbe ausdrücklich zu betonen, dass ihm für die Mängel dieses Nachtrags die Verantwortlichkeit allein zur Last fällt.

86.

Gehen wir von den im Art. 14 gegebenen Fundamentalgleichungen aus, welche wir in der Form

$$n^{i+1}\pi^{1+i)} = n^{i+1} - n^{i)} R^{i} + n^{i}\pi_{i} + \frac{1}{2} L^{i} k^{i} k^{i}$$

schreiben können, so werden durch dieselben die reciproken Vereinigungsweiten $\pi'\ \pi''\ \pi'''\ \ldots$ als (lineare) Functionen von k^2 bestimmt. Da jedoch

die auf der rechten Seite vorkommenden Grössen $\pi, \pi_{\prime\prime}, \pi_{\prime\prime\prime} \ldots$ nach Art. 12 den Relationen

$$d = \frac{1}{\pi'} - \frac{1}{\pi_{\prime}}, \quad d' = \frac{1}{\pi''} - \frac{1}{\pi_{\prime\prime}}, \quad \text{u. s. w.}$$

genügen, so müssen auch die Glieder $n'\pi_{\prime}$, $n''\pi_{\prime\prime} \ldots$ von k abhängen, und es kann diese Abhängigkeit innerhalb der Grenzen der hier erforderlichen Genauigkeit dadurch berücksichtigt werden, dass man aus ihnen die resp. Glieder

$$2n' \frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2} \frac{k'^2}{2}, \quad 2n'' \frac{\partial \pi_{\prime\prime}}{\partial k''^2} \frac{k''^2}{2} \quad \text{u. s. w.}$$

aussondert und mit den bereits explicite von k abhängigen Gliedern vereinigt.

Dadurch nehmen die erwähnten Fundamentalgleichungen die Gestalt an

$$n^{i+1}\pi^{i+1} = (n^{i+1} - n^{i}) R^{i} + n^{i}\pi_{i} + \frac{1}{2}\left(L^{i} + 2n^{i}\frac{\partial \pi_{i}}{\partial k^{i2}}\right) k^{i}_{1}k^{i}$$

wo jetzt $\pi, \pi_{\prime\prime}, \pi_{\prime\prime\prime} \ldots$ die Werthe dieser Grössen für $k = 0$, d. h. die der Richtung der optischen Achse entsprechenden reciproken Vereinigungsweiten bezeichnen. Aus den in den Artt. 12 und 13 bewiesenen Relationen erhält man leicht

$$\left(\frac{k'}{\pi_{\prime}}\right)^2 \frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2} = \left(\frac{k}{\pi'}\right)^2 \frac{\partial \pi'}{\partial k^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \pi_{\prime}}{\partial k'^2} = \left(\frac{k}{k'}\right)^4 \frac{\partial \pi'}{\partial k^2} \quad \text{u. s. w.}$$

mithin nach ausgeführter Substitution:

$$\begin{aligned}
n'\pi' &= (n' - n)\, R + n\pi + \tfrac{1}{2} L k^2 \\
n''\pi'' &= (n'' - n')\, R' + n'\pi_{\prime} + \tfrac{1}{2}\left\{L' + 2n'\left(\frac{k}{k'}\right)^4 \frac{\partial \pi'}{\partial k^2}\right\} k'^2 \\
n'''\pi''' &= (n''' - n'')\, R'' + n''\pi_{\prime\prime} + \tfrac{1}{2}\left\{L'' + 2n''\left(\frac{k'}{k''}\right)^4 \frac{\partial \pi''}{\partial k'^2}\right\} k''^2
\end{aligned}$$

u. s. w. Hieraus ergeben sich durch Differentiation

$$\begin{aligned}
2n' \frac{\partial \pi'}{\partial k^2} &= L \\
2n'' \frac{\partial \pi''}{\partial k'^2} &= L' + 2n'\left(\frac{k}{k'}\right)^4 \frac{\partial \pi'}{\partial k^2} = L' + \left(\frac{k}{k'}\right)^4 L \\
2n''' \frac{\partial \pi'''}{\partial k''^2} &= L'' + 2n''\left(\frac{k'}{k''}\right)^4 \frac{\partial \pi''}{\partial k'^2} = L'' + \left(\frac{k'}{k''}\right)^4 L' + \left(\frac{k}{k''}\right)^4 L
\end{aligned}$$

u. s. w. Damit gehen die Gleichungen hervor:

$$\left.\begin{aligned}
n'\pi' &= (n' - n)\, R + n\pi + \tfrac{1}{2} L k^2 \\
n''\pi'' &= (n'' - n')\, R' + n'\pi_{\prime} + \frac{1}{2k'^2}\{L k^4 + L' k'^4\} \\
n'''\pi''' &= (n''' - n'')\, R'' + n''\pi_{\prime\prime} + \frac{1}{2k''^2}\{L k^4 + L' k'^4 + L'' k''^4\}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (A)$$

deren Gesetz sofort in die Augen springt.

87.

Will man aus den vorstehenden Gleichungen durch successive Addition die den Formeln des Art. 15 entsprechenden Ausdrücke ableiten, so darf man nur in der jedesmaligen letzten Gleichung die von k abhängigen Glieder beibehalten, und erhält folgende Reihe von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} n'\pi' &= n\pi + (n'-n)R + \frac{1}{2}Lk^2 \\ n''\pi'' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'\pi_{,}d + \frac{1}{2k'^2}\{Lk^4 + L'k'^4\} \\ n'''\pi''' &= n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + (n'''-n'')R'' + n'\pi'\pi_{,}d + n''\pi''\pi_{,,}d' \\ &\quad + \frac{1}{2k''^2}\{Lk^4 + L'k'^4 + L''k''^4\} \end{aligned}\right\} (B)$$

Hier gelten die Werthe der sämmtlichen π auf der rechten Seite für $k = 0$, während die von k abhängigen Glieder vermöge der Relationen des Art. 13 auf die Form gebracht werden können

$$n''\pi'' \quad \ldots \frac{1}{2}k^2\{(1+\pi_{,}d)^2L + (1-\pi'd)^2L'\}$$

$$\begin{aligned} n'''\pi''' \ldots \frac{1}{2}k^2\{(1+\pi_{,}d)^2(1+\pi_{,,}d')^2L + (1-\pi'd)^2(1+\pi_{,,}d')^2L' + \\ + (1-\pi'd)^2(1-\pi''d')^2L''\} \end{aligned}$$

Die Abweichungen dieser Ausdrücke von denen des Art. 15 erklären sich einfach aus dem Umstande, dass dort die in den sogenannten Nebengliedern vorkommenden $\pi'\pi_{,} \ldots$ noch Functionen von k geblieben sind. Für kleine Werthe der Entfernungen $d\ d' \ldots$ erhält man den Gleichungen des Art. 16 entsprechend

$$n''\pi'' = n\pi + (n'-n)R + (n''-n')R' + n'\pi'^2d + \frac{1}{2}k^2\{L + L' + 2\pi'd(L-L')\}$$

$$n'''\pi''' = \quad \ldots \quad + \frac{1}{2}k^2\{L + L' + L'' + 2\pi'd(L - L' - L'') + 2\pi''d'(L + L' - L'')\}$$

ebenfalls mit leicht erkennbarem Gesetze.

Ebenso nehmen in dem, Art. 17 erörterten Falle von sechs Brechungen die von k abhängigen Glieder unter den jetzigen Voraussetzungen die Form an

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k'''^2(1 + 2\pi^{IV}d'' + 2\pi^{V}d^{IV})\{[L + L' + L'' + 4\pi'dL + 4\pi''d'(L+L')](1+\pi_{,,,}d'')^4 + \\ + [L''' + L^{IV} + L^{V} - 4\pi^{IV}d'''(L^{IV} + L^{V}) - 4\pi^{V}d^{IV}L^{V}]\} \end{aligned}$$

88.

Wenden wir uns zu den Modificationen, welche in Folge der vorstehenden allgemeinen Entwickelungen in den Anwendungen auf specielle Fälle eintreten, so haben wir zunächst die Gleichung (b) des Art. 22 zu betrachten. Dieselbe wird zu ersetzen sein durch

$$0 = L + L' + L'' + 4\pi'Ld - 4\pi''L''d'$$

so dass, wie leicht zu sehen, keine weitere Aenderung als die Verdoppelung der Art. 25 eingeführten Hülfsgrösse C' vorzunehmen ist. Schreibt man zur Abkürzung

$$u + w = 2v\,, \quad u' + w' = 2v'\,, \quad \delta D = \frac{v^2 d}{2m}\,, \quad \delta D' = \frac{v'^2 d'}{2m'}$$

so erhält man leicht

$$2C' = 4\,(R-\pi)^2\left(\frac{1}{m} - \frac{m\pi}{v}\right)\delta D + 4\,(R''-\pi''')^2\left(\frac{1}{m'} - \frac{m'\pi'''}{v'}\right)\delta D'$$

Hiermit gehen bei der zweiten Approximation die Endgleichungen der Artt. 28 und 29 resp. über in

$$(0.085891)\,g^2 + 2\,(0.837887)\,g + (1.579097) = 0$$

und
$$(0.084183)\,g^2 + 2\,(0.835147)\,g + (1.575457) = 0$$

Für das erste Objectiv folgen daraus die Werthe

$$g = -6.53412\,, \quad R = +0.63146\,, \quad R' = -4.05433\,, \quad R'' = -1.73904$$

mit einer Differenz von + 67 Einheiten der letzten Stelle, während für das zweite Objectiv

$$g = -4.75857\,, \quad R = +2.38630\,, \quad R' = -2.28254\,, \quad R'' = -0.03041$$

gefunden werden. Diese Werthe haben um 579 Einheiten der letzten Stelle abgenommen.

Die Rechnung für die dritte Annäherung in Bezug auf das zweite Objectiv ergibt endlich

$$\begin{aligned} A &= +0.0076429 & \Delta &= +2.334419 \\ B &= +0.0079523 & \Delta' &= -1.156448 \\ C &= +0.000895 & D &= +2.336233 \\ 2C' &= +0.024446 & D' &= -1.155762 \end{aligned}$$

nebst der Endgleichung

$$(0.0841906)\,g^2 + 2\,(0.8351474)\,g + (1.5754422) = 0$$

und hieraus

$$g = -4.758163\,, \quad R = +2.386646\,, \quad R' = -2.282192\,, \quad R'' = +0.030706$$

89.

Bei den im §. 3 behandelten Linsensystemen mit vier Brechungen geht zunächst die Formel des Art. 49 in die modificirte Gleichung

$$0 = L + L' + L'' + L''' + 4\pi' d L + 4\pi'' d' (L + L') - 4\pi''' d'' L'''$$

über, wodurch der Werth der Art. 52 definirten Hülfsgrösse C eine entsprechende Aenderung erleidet. Die Glieder der zweiten Zeile, nämlich

$$+ N^2\pi' L d + N^2\pi''(L + L')\,d' - N^2\pi''' L''' d''$$

haben einfach den Factor 2 zu erhalten. Diese Aenderung trägt sich auf die in den beiden Endgleichungen durch g und g' bezeichneten Glieder über, von

denen das letztere mit der in den Artt. 50 und 51 ebenso bezeichneten Hülfsgrösse g' selbstverständlich nicht verwechselt werden darf. In Art. 58 sind es wiederum die Grössen C resp. c, welche durch die in Rede stehende Aenderung betroffen werden. Da indessen in den numerischen Anwendungen allenthalben die Linsendicken vernachlässigt worden sind, so bleiben die nur für die erste Approximation berechneten Resultate unverändert.

90.

Erst bei Art. 63 u. folgg., wo die Dicke der mittleren Linse als beträchtlich vorausgesetzt wird, treten wesentlichere Modificationen ein. Die Gleichung (b) des Art. 63 verwandelt sich in

$$0 = (L + L')\lambda^4 + L'' + L'''$$

und durch Ausführung der in den Artt. 68 und 69 gelehrten Rechnung in die Endgleichung

$$(b + b')\lambda^4 + (a'' + a''')\lambda^3 + (b'' + b''')\lambda^2 + (c'' + c''')\lambda + e'' + e''' = 0$$

welche folglich jetzt auf den vierten Grad in Bezug auf λ steigt.

Substituirt man dagegen die Ausdrücke des Art. 74, so nehmen die dort aufgestellten Formeln die folgende Gestalt an:

$$(m-1)\{(1+\lambda^4)\,l^3 + (m+3)(1+\lambda)\,l^2 + (2m+3)(1+\lambda)^2 l + (m+1)(1+\lambda)^3\}$$
$$+ \frac{m'-m}{m'^2}\{m'^4(1+\lambda^4)\,l'^3 + m'^2(3m'+m)(1-\lambda)^3\lambda\, l'^2$$
$$+ m'(3m'+2m)(1+\lambda^2)\lambda^2 l' + (m'+m)(1-\lambda)\lambda^3\} = 0$$

oder

$$0 = ak^3 + bk^2 + ck + e + a'k'^3 + b'k'^2 + c'k' + e'$$

wo

$$k = (m-1)\,l, \qquad k' = (m'-m)\,l'$$
$$a = \frac{1+\lambda^4}{(m-1)^2}, \qquad b = \frac{m+3}{m-1}(1+\lambda)$$
$$c = (2m+3)(1+\lambda)^2, \qquad e = (m-1)(m+1)(1+\lambda)^3$$
$$a' = \frac{m'^2}{(m'-m)^2}(1+\lambda^4), \qquad b' = \frac{3m'+m}{m'-m}(1-\lambda^3)\lambda$$
$$c' = \frac{3m'+2m}{m'}(1+\lambda^2)\lambda^2, \qquad e' = \frac{(m'-m)(m'+m)}{m'^2}(1-\lambda)\lambda^3$$

91.

Es sollen jetzt die numerischen Beispiele der Artt. 70, 71, 72, 73, 77 und 78 untersucht werden.

In den Fällen der Art. 70—73 erhält man für λ die Endgleichungen

$$5.385\lambda^4 - 1.538\lambda^3 - 11.922\lambda^2 - 25.723\lambda - 9.955 = 0, \quad \lambda = -0.4743$$
$$1.768\lambda^4 - 1.468\lambda^3 - 10.376\lambda^2 - 36.472\lambda - 25.797 = 0, \quad \lambda = -0.8677$$
$$14.971\lambda^4 - 1.460\lambda^3 - 11.304\lambda^2 - 21.823\lambda + 2.992 = 0, \quad \lambda = +0.1286$$
$$9.617\lambda^4 - 1.421\lambda^3 - 10.363\lambda^2 - 38.808\lambda - 20.245 = 0, \quad \lambda = -0.5760$$

welche zu analogen Betrachtungen Anlass geben, wie die in den angeführten Artikeln angestellten, da es sich hier nur um Wurzeln λ handeln kann, welche von ± 1 nicht allzu sehr abweichen. Während indessen in dem Falle des Art. 72 ein entsprechendes Linsensystem überhaupt nicht existirte, führt jetzt die zweite Wurzel der obigen dritten Gleichung

$$\lambda = +1.3606$$

auf ein Linsensystem mit den Dimensionen

$$R = -R''' = +1.0052 \qquad d' = 0.9566$$
$$R' = -R'' = +2.6009$$

Obschon also auch hier die Dicke der mittleren Kronglaslinse der Brennweite nahe gleich und folglich praktisch nicht herstellbar sein wird, bleibt doch die Frage offen, ob durch eine weitere Aenderung der Brechungsverhältnisse nicht ein Werth von λ herbeigeführt werden könnte, der die Einheit weniger überstiege und damit zulässige Dimensionen zur Folge hätte. Die Linsenkrümmungen sind, wie man sieht, sehr mässig.

92.

Was endlich die in den Artt. 77 und 78 berechneten aplanatischen Systeme betrifft, so ergeben sich wiederum nur unbedeutende Verschiedenheiten. Die entsprechenden Werthe stehen wie folgt:

Erstes System.

$$a = +5.628 \quad b = +15.0076 \quad c = +26.8369 \quad e = +14.9069$$
$$a' = +444.290 \quad b' = +13.0870 \quad c' = +12.5424 \quad e' = +0.0107$$
$$438.66\,k'^3 + 44.979\,k'^2 - 61.194\,k' + 62.390 = 0$$
$$k' = -0.65160 \qquad R = -R''' = +1.2499$$
$$R' = -R'' = +2.8653$$

Zweites System.

$$a = +6.450 \quad b = +15.9204 \quad c = +26.4771 \quad e = +13.7019$$
$$a' = +1166.877 \quad b' = +21.0576 \quad c' = +12.4086 \quad e' = +0.0068$$
$$1160.43\,k'^3 + 56.328\,k'^2 - 65.259\,k' + 62.556 = 0$$
$$k' = -0.44586 \qquad R = -R''' = +1.1714$$
$$R' = -R'' = +3.1773$$

93.

Zum Schlusse mögen die Werthe der partiellen Differentialquotienten der Vereinigungsweiten, genommen sowohl nach den Reciproken der Linsenhalbmesser, als nach den Brechungsexponenten und den Abständen der brechenden Flächen, angeführt werden. Die Ausdrücke $\frac{\partial \pi}{\partial R}$ dienen zur Berechnung der im Art. 81 geforderten Grössen $\frac{\partial f}{\partial r}$, und zwar findet man leicht

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left(\frac{R}{\pi^{IV}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial R}, \quad \frac{\partial f}{\partial r'} = \left(\frac{R'}{\pi^{IV}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial R'}, \quad \frac{\partial f}{\partial r''} = \left(\frac{R''}{\pi^{IV}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial R''}, \quad \frac{\partial f}{\partial r'''} = \left(\frac{R'''}{\pi^{IV}}\right)^2 \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial R'''}$$

Den Bezeichnungen des Art. 84 gemäss hat man ferner

$$\varrho = r - \sqrt{r^2 - k^2}$$

oder mit Vernachlässigung von k^4

$$\varrho = \frac{1}{2} R k^2, \quad \text{folglich } d\varrho = \frac{1}{2} k^2 dR$$

mithin

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = -\frac{2}{(k\pi^{\mathrm{IV}})^2}\frac{\partial \pi^{\mathrm{IV}}}{\partial R} \quad \text{u. s. w.}$$

Mit Hülfe der Differentialquotienten nach n und d kann der Einfluss einer Aenderung in den Brechungsverhältnissen und den Linsendicken auf die Vereinigungsweite der Strahlen ermittelt werden.

Die Ableitung der betreffenden Differentialausdrücke bietet keine Schwierigkeit, als etwa die Länge der Rechnung. Benutzt man die abgekürzten Bezeichnungen

$$S = 3(R - \pi')^2 - 2\pi(R - \pi'), \qquad S' = 3(R' - \pi'')^2 - 2\pi_{,}(R' - \pi'')$$

$$T = 4R(\pi - \pi') + 3(\pi'^2 - \pi^2), \qquad T' = 4R'(\pi_{,} - \pi'') + 3(\pi''^2 - \pi_{,}^2)$$

$$U = (R - \pi')(R - 3\pi') + \pi(R - \pi), \qquad U' = (R' - \pi'')(R' - 3\pi'') + \pi_{,}(R' - \pi_{,})$$

$$V = (R - \pi')(R - 2\pi'), \qquad V' = (R' - \pi'')(R' - 2\pi'')$$

u. s. w., so erhält man mit leichter Mühe

$$\frac{\partial L}{\partial R} = (n' - n) S, \qquad \frac{\partial L}{\partial n} = -(R - \pi) U \qquad \frac{\partial L}{\partial n'} = (R - \pi') V$$

$$\frac{\partial L'}{\partial R} = (n' - n)\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2 T', \qquad \frac{\partial L'}{\partial R'} = (n'' - n') S' \qquad \frac{\partial L'}{\partial d} = n'\pi_{,}^2 T'$$

$$\frac{\partial L'}{\partial n} = -(R - \pi)\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2 T', \qquad \frac{\partial L'}{\partial n'} = (R - \pi')\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2 T' - (R' - \pi_{,}) U', \qquad \frac{\partial L'}{\partial n''} = (R' - \pi'') V'$$

$$\frac{\partial L''}{\partial R} = (n' - n)\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial R'} = (n'' - n')\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial R''} = (n''' - n'') S''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial d} = n'\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial d'} = n''\pi_{,,}^2 T''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial n} = -(R - \pi)\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 T'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial n'} = \left\{(R - \pi')\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2 - (R' - \pi_{,})\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\right\} T''$$

$$\frac{\partial L''}{\partial n''} = (R' - \pi'')\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2 T'' - (R'' - \pi_{,,}) U'', \qquad \frac{\partial L''}{\partial n'''} = (R'' - \pi''') V''$$

u. s. w.

94.

Schreibt man noch der Kürze halber

$$[1,1] = Lk^4 - L'k'^4$$

$$[1,2] = Lk^4 - L'k'^4 - L''k''^4$$

$$[2,1] = Lk^4 + L'k'^4 - L''k''^4$$

etc., so ergeben sich mittelst der Ausdrücke des vorigen Artikels

für eine Brechung:

$$\frac{\partial \pi'}{\partial R} = \frac{n'-n}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} S k^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} U k^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'}{\partial n'} = \frac{R-\pi'}{n'}\left\{1 + \frac{1}{2} V k^2\right\}$$

für zwei Brechungen:

$$\frac{\partial \pi''}{\partial R} = \frac{n'-n}{n''}\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial R'} = \frac{n''-n'}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} S' k'^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial d} = \frac{n'}{n''}\pi_{,}^2\left\{1 + \frac{1}{2} T' k'^2 + \frac{[1,1]}{n'\pi' k k'}\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n''}\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n'} = -\frac{R'-\pi_{,}}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} U' k'^2\right\}$$
$$+ \frac{R-\pi'}{n''}\left(\frac{\pi_{,}}{\pi'}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V k^2 + T' k'^2) + \frac{[1,1]}{n' k k'} d\right\}$$
$$\frac{\partial \pi''}{\partial n''} = \frac{R'-\pi''}{n''}\left\{1 + \frac{1}{2} V' k'^2\right\}$$

für drei Brechungen:

$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R} = \frac{n'-n}{n'''}\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R'} = \frac{n''-n'}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(S' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial R''} = \frac{n'''-n''}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} S'' k''^2\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial d} = \frac{n'}{n'''}\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n'\pi' k k'} + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial d'} = \frac{n''}{n'''}\pi_{,,}^2\left\{1 + \frac{1}{2} T'' k''^2 + \frac{[2,1]}{n''\pi'' k' k''}\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n} = -\frac{R-\pi}{n'''}\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n'} = -\frac{R'-\pi_{,}}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(U' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$+ \frac{R-\pi'}{n'''}\left(\frac{\pi_{,}\pi_{,,}}{\pi'\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V k^2 + T' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[1,2]}{n' k k'} d + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n''} = -\frac{R''-\pi_{,,}}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} U'' k''^2\right\}$$
$$+ \frac{R'-\pi''}{n'''}\left(\frac{\pi_{,,}}{\pi''}\right)^2\left\{1 + \frac{1}{2}(V' k'^2 + T'' k''^2) + \frac{[2,1]}{n'' k' k''} d'\right\}$$
$$\frac{\partial \pi'''}{\partial n'''} = \frac{R''-\pi'''}{n'''}\left\{1 + \frac{1}{2} V'' k''^2\right\}$$

Das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke ist leicht erkennbar, so dass dieselben ohne Schwierigkeit auf eine beliebige Anzahl von Brechungen ausgedehnt werden können.

October 1874.

Scheibner.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

